

MO417 – Complexidade de Algoritmos
Segundo Semestre de 2011
Décima Lista de Exercícios

Reduções

1. Sejam P1 e P2 dois problemas tais que $P1 \propto_n P2$ e suponha que P1 tem cota inferior $\Omega(n \lg n)$, onde n é um parâmetro que mede o tamanho da entrada do problema P1. Quais das seguintes afirmações são verdadeiras? Justifique as suas respostas.
 - (a) $\Omega(n \lg n)$ também é cota inferior para P2.
 - (b) Todo algoritmo que resolve P1 também pode ser usado para resolver P2.
 - (c) Todo algoritmo que resolve P2 também pode ser usado para resolver P1.
 - (d) O problema P2 pode ser resolvido no pior caso em tempo $O(n \lg n)$.

2. Considere os seguintes problemas:

INTERVALOS: Dados n intervalos na reta real, definidos pelos seus pontos de início e de fim, deseja-se obter a lista de todos os intervalos que estão contidos dentro de pelo menos um dos outros intervalos passados na entrada.

MAXIMAIS: Diz-se que um ponto $p = (x_p, y_p)$ do plano domina um outro ponto distinto $q = (x_q, y_q)$ do plano se $x_p \geq x_q$ e $y_p \geq y_q$. Um ponto p é dito ser maximal em relação a um conjunto de pontos S se p pertence a S e nenhum ponto de S domina p . Deseja-se obter todos os pontos maximais de um conjunto S contendo n pontos distintos no plano.

 - (a) Encontre uma redução de complexidade linear de INTERVALOS para MAXIMAIS.
 - (b) Encontre uma redução de complexidade linear de MAXIMAIS para INTERVALOS.

3. Uma matriz quadrada é dita ser triangular inferior (superior) se todos os seus elementos não nulos estiverem na diagonal principal ou abaixo (acima) dela. Seja MMIS o problema de multiplicar uma matriz triangular inferior por uma matriz triangular superior e MMA o problema de multiplicar duas matrizes quadradas arbitrárias. Seja $T(n)$ a complexidade de um algoritmo ótimo para resolver MMIS quando as matrizes passadas na entrada tem dimensão $n \times n$. Suponha que $T(cn) \in O(T(n))$ para toda constante $c > 0$. Mostre que MMIS é pelo menos tão difícil quanto MMA no sentido em que estes dois problemas tem a mesma cota inferior (supondo o modelo de computação usual).

4. Seja S um conjunto de n pontos distintos do plano. Seja $G = (V, E)$ o grafo não orientado completo com n vértices de modo que exista uma relação 1 : 1 entre os vértices de V e os pontos de S . Além disso, assuma que para cada aresta (u, v) em E , esteja associado um custo $c(u, v)$ que é igual à distância euclidiana entre os pontos correspondentes a u e v em S . Mostre que a cota inferior do problema de encontrar a árvore geradora mínima de G tem cota inferior $\Omega(n \lg n)$.

NP-Completeness

1. Mostre que o problema de cobertura de vértices (CV) visto em aula permanece NP-completo mesmo se todos os vértices do grafo tiverem grau par. Se desejar, você pode usar o seguinte teorema:
"O número de vértices de grau ímpar em um grafo não orientado qualquer é sempre par."
2. Considere o problema do empacotamento (BIN) descrito abaixo.
Instância: Um conjunto finito de n objetos com pesos w_1, w_2, \dots, w_n inteiros positivos. Dois valores inteiros positivos W e k . Questão: é possível colocar todos os objetos em k caixas cujo limite de peso de cada caixa é W ?
Escreva em um pseudo-código, de alto nível, de um algoritmo não-determinístico polinomial que resolve BIN. Ou seja, mostre que este problema está em NP. Qual a complexidade do seu algoritmo?
3. Usando um dos problemas vistos em aula, prove que o problema a seguir é NP-completo: dado um grafo $G = (V, E)$ e um inteiro k , determine se G contém uma árvore geradora T tal que todo vértice em T tenha grau menor ou igual a k .
4. Considere o seguinte problema: dado um grafo não orientado $G = (V, E)$ e dois parâmetros d e k inteiros não-negativos, determine se G contém um subgrafo induzido H com pelo menos k vértices tal que o grau de cada vértice em H seja menor ou igual a d .
Prove que este problema é NP-completo.
5. Um Conjunto Independente (IS) de um grafo não-orientado $G = (V, E)$ é um sub-conjunto de vértices U para o qual, dado um par qualquer de elementos u e v de U , a aresta (u, v) não está em E . Assim, dado um grafo não-orientado G e um inteiro k pertencente ao intervalo $[1, n]$, onde $n = |V|$, deseja-se saber se G possui um conjunto independente com k vértices.
Mostre que IS está em NP-completo.
6. Assuma que o problema do caminho hamiltoniano (CaH) para grafos não orientados é NP-completo. Prove que o problema do ciclo hamiltoniano (CiH) para grafos não orientados é NP-completo.