

**MO417 – Complexidade de Algoritmos**  
**Segundo Semestre de 2011**  
**Primeira Lista de Exercícios**

## 1 Logaritmos

1. (a) É verdade que  $\lfloor \lg n \rfloor \geq \lg(n-1)$  para todo inteiro  $n \geq 2$ ? (b) É verdade que  $\lceil \lg n \rceil \leq \lg(n+1)$  para todo inteiro  $n \geq 1$ ? Justifique suas respostas.
2. Quanto vale a soma

$$\sum_{i=1}^n \log i = \log 1 + \log 2 + \cdots + \log n,$$

onde  $n \geq 1$  é um inteiro.

## 2 Prova por Indução

3. Prove por indução em  $n$  que  $2^0 + 2^1 + 2^2 + \cdots + 2^n = 2^{n+1} - 1$ .
4. Ache uma fórmula para a soma

$$1.2 + 2.3 + 3.4 + \cdots + n(n+1)$$

e prove sua afirmação.

5. Ache uma fórmula para a soma

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2$$

e prove sua afirmação.

6. Ache uma fórmula para a soma

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \cdots + \frac{1}{2^{n-1}} + \frac{1}{2^n}$$

e prove sua afirmação.

7. Prove que as regiões formadas por  $n$  círculos no plano podem ser coloridas com duas cores de modo que regiões vizinhas tenham cores distintas.
8. O **Princípio da Casa do Pombo** (em sua forma mais simples) afirma o seguinte: se  $n + 1$  bolas são distribuídas de modo arbitrário em  $n$  caixas, então pelo menos uma caixa contém mais que uma bola. Prove este princípio por indução.
9. Uma **árvore binária completa** (ABC) é definida recursivamente como segue. Uma ABC de altura 0 consiste de um nó que é a raiz. Uma ABC de altura  $h + 1$  consiste de duas ABC's de altura  $h$  cujas raízes são filhos de uma nova raiz. Seja  $T$  uma ABC de altura  $h$ . A **altura** (*height*) de um nó  $x$  em  $T$  é a altura da subárvore da qual ele é raiz (a raiz de  $T$  tem altura  $h$  e uma folha tem altura 0). Prove que a soma das alturas de todos os nós em  $T$  é  $2^{h+1} - h - 2$ .