MO417 — Complexidade de Algoritmos I

Cid Carvalho de Souza Cândida Nunes da Silva
Orlando Lee

7 de novembro de 2011

Revisado por Zanoni Dias

Árvore Geradora Mínima

Cid Carvalho de Souza, Cândida Nunes da Silva, Orlando Lee MO417 — Complexidade de Algoritmos – v. 2.1

Árvore Geradora Mínima

- Suponha que queremos resolver o seguinte problema: dado um conjunto de computadores, onde cada par de computadores pode ser ligado usando uma quantidade de fibra ótica, encontrar uma rede interconectando-os que use a menor quantidade de fibra ótica possível.
- Este problema pode ser modelado por um problema em grafos não orientados ponderados onde os vértices representam os computadores, as arestas representam as conexões que podem ser construídas e o peso/custo de uma aresta representa a quantidade de fibra ótica necessária.

Cid Carvalho de Souza, Cândida Nunes da Silva, Orlando Lee MO417 — Complexidade de Algoritmos – v. 2.1

Árvore Geradora Mínima

- Nessa modelagem, o problema que queremos resolver é encontrar um **subgrafo gerador** (que contém todos os vértices do grafo original), **conexo** (para garantir a interligação de todas as cidades) e cuja soma dos custos de suas arestas seja a menor possível.
- Obviamente, o problema só tem solução se o grafo for conexo. Daqui pra frente vamos supor que o grafo de entrada é conexo.
- Além disso, o sugrafo gerador procurado é sempre uma árvore (supondo que os pesos são positivos).

Cid Carvalho de Souza, Cândida Nunes da Silva, Orlando Lee MO417 — Complexidade de Algoritmos – v. 2.1

Árvore Geradora Mínima

Problema da Árvore Geradora Mínima

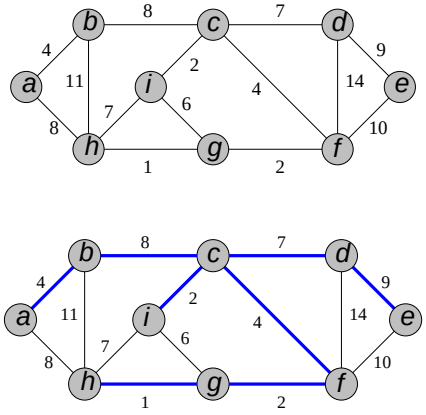
Entrada: grafo conexo $G = (V, E)$ com pesos $w(u, v)$ para cada aresta (u, v).

Saída: subgrafo gerador conexo T de G cujo peso total

$$w(T) = \sum_{(u,v) \in T} w(u, v)$$

seja o menor possível.

Exemplo



Árvore Geradora Mínima

- Veremos dois algoritmos para resolver o problema:
  - algoritmo de Prim
  - algoritmo de Kruskal
- Ambos algoritmos usam estratégia gulosa. Eles são exemplos clássicos de algoritmos gulosos.

Algoritmo genérico

- A estratégia gulosa usada baseia-se em um algoritmo genérico que constrói uma AGM incrementalmente.
- O algoritmo mantém um conjunto de arestas A que satisfaz o seguinte invariante:

  No início de cada iteração, A está contido em uma AGM.
- Em cada iteração, determina-se uma aresta (u, v) tal que $A' = A \cup \{(u, v)\}$ também satisfaz o invariante.

  Uma tal aresta é chamada aresta segura (para A).

Algoritmo genérico

AGM-GENÉRICO(G, w)
1 $A \leftarrow \emptyset$
2 **enquanto** A não é uma árvore geradora
3 Encontre uma aresta (u, v) segura para A
4 $A \leftarrow A \cup \{(u, v)\}$
5 **devolva** A

Obviamente o "algoritmo" está correto!

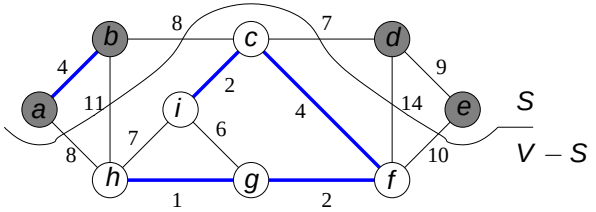
Note que nas linhas 2–4 A está propriamente contido em uma AGM, digamos T. Logo, existe uma aresta segura (u, v) em $T - A$.

Naturalmente, para que isso seja um algoritmo de verdade, é preciso especificar como encontrar uma aresta segura.

Como encontrar arestas seguras

Considere um grafo $G = (V, E)$ e seja $S \subset V$.

Denote por $\delta(S)$ o conjunto de arestas de G com um extremo em S e outro em $V - S$. Dizemos que um tal conjunto é um corte.

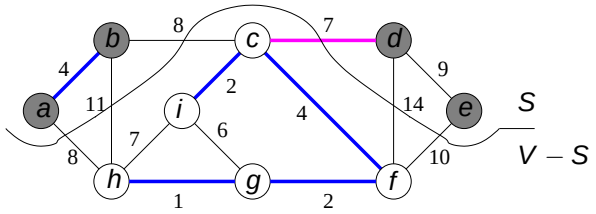


Um corte $\delta(S)$ respeita um conjunto A de arestas se não contém nenhuma aresta de A.

Como encontrar arestas seguras

Uma aresta de um corte $\delta(S)$ é leve se tem o menor peso entre as arestas do corte.

Teorema 23.1: (CLRS)
Seja G um grafo com pesos nas arestas dado por w. Seja A um subconjunto de arestas contido em uma AGM. Seja $\delta(S)$ um corte que respeita A e (u, v) uma aresta leve desse corte. Então (u, v) é uma **aresta segura**.



Como encontrar arestas seguras

Corolário 23.2 (CLRS)
Seja G um grafo com pesos nas arestas dado por w. Seja A um subconjunto de arestas contido em uma AGM. Seja C um componente (árvore) de $G_A = (V, A)$. Se (u, v) é uma aresta leve de $\delta(C)$, então (u, v) é segura para A.

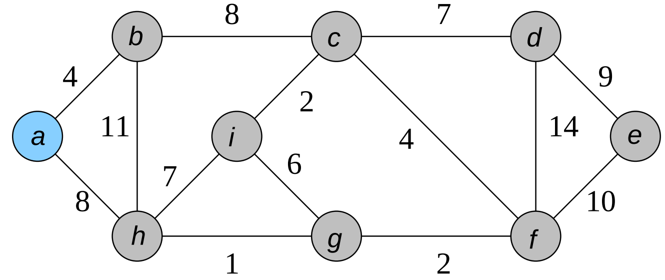
Os algoritmos de Prim e Kruskal são especializações do algoritmo genérico e fazem uso do Corolário 23.2.

O algoritmo de Prim

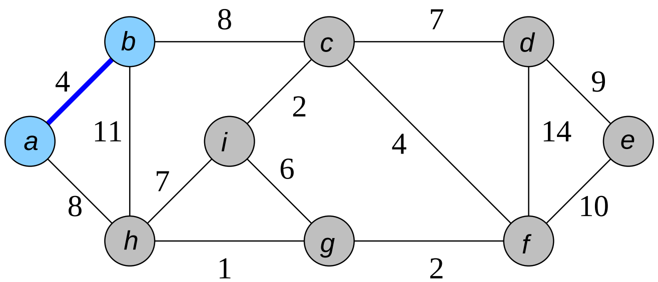
- No algoritmo de Prim, o conjunto A é uma árvore com raiz r (escolhido arbitrariamente no início). Inicialmente, A é vazio.
- Em cada iteração, o algoritmo considera o corte $\delta(C)$ onde C é o conjunto de vértices que são extremos de A.
- Ele encontra uma aresta leve (u, v) neste corte e acrescenta-a ao conjunto A e começa outra iteração até que A seja uma árvore geradora.

Um detalhe de implementação importante é como encontrar eficientemente uma aresta leve no corte.

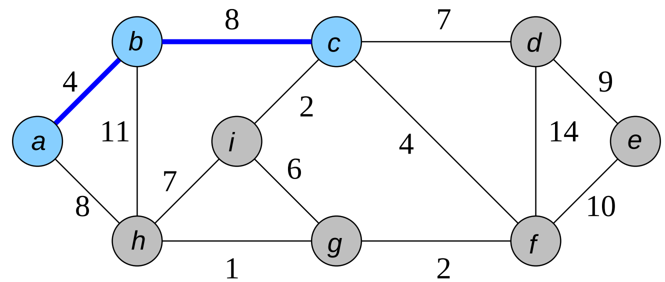
O algoritmo de Prim



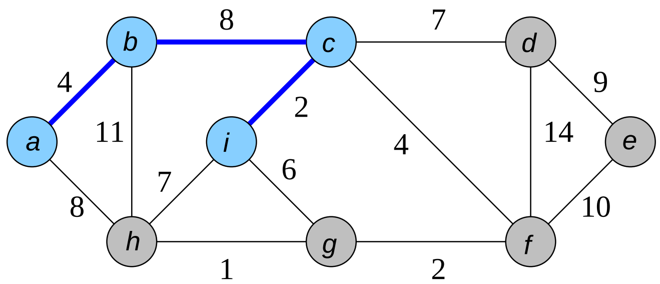
O algoritmo de Prim



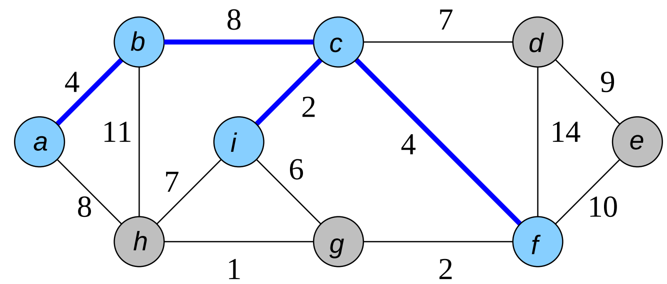
O algoritmo de Prim



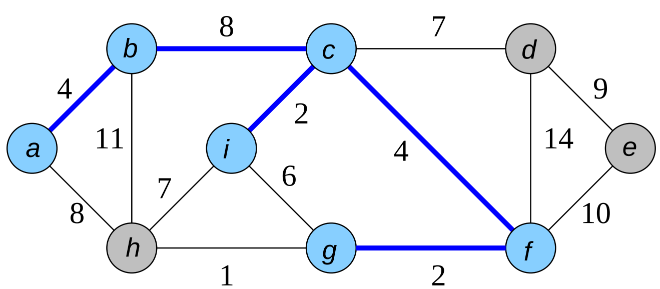
O algoritmo de Prim



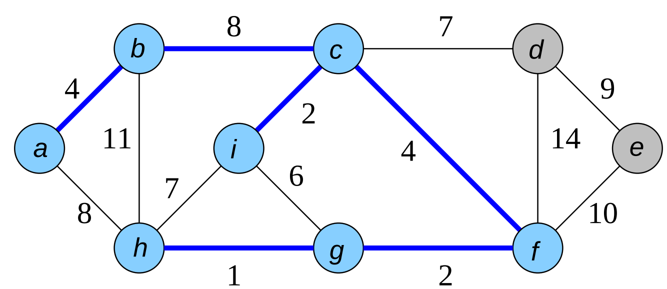
O algoritmo de Prim



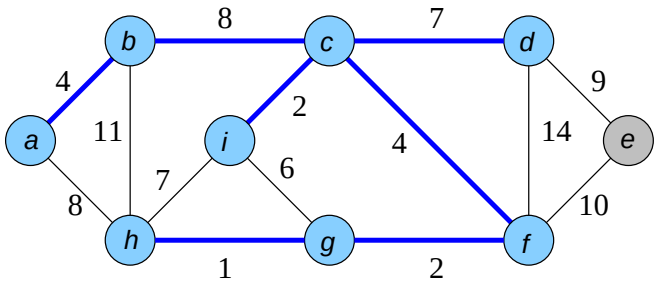
O algoritmo de Prim



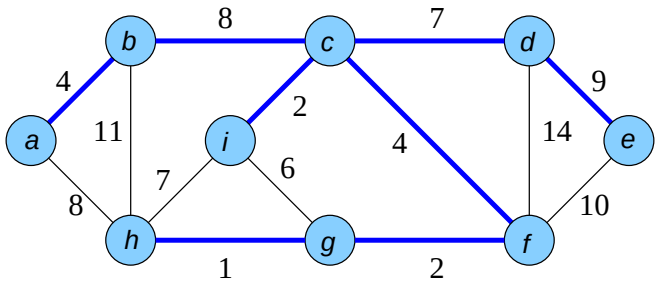
O algoritmo de Prim



O algoritmo de Prim



O algoritmo de Prim



O algoritmo de Prim

O algoritmo mantém durante sua execução as seguintes informações:

- Todos os vértices que não estão na árvore estão em uma fila de prioridade (de mínimo) Q.
- Cada vértice v em Q tem uma chave $key[v]$ que indica o menor peso de qualquer aresta ligando v a algum vértice da árvore. Se não existir nenhuma aresta, então $key[v] = \infty$.
- A variável $\pi[u]$ indica o pai de u na árvore. Então

$$A = \{(u, \pi[u]) : u \in V - \{r\} - Q\}.$$

O algoritmo de Prim

```
AGM-PRIM(G, w, r)
 1  para cada u ∈ V[G]
 2      faça key[u] ← ∞
 3           π[u] ← NIL
 4  key[r] ← 0
 5  Q ← V[G]
 6  enquanto Q ≠ ∅ faça
 7      u ← EXTRACT-MIN(Q)
 8      para cada v ∈ Adj[u]
 9          se v ∈ Q e w(u, v) < key[v]
10              então π[v] ← u
11                   key[v] ← w(u, v)
12  retorne π
```

Corretude do algoritmo de Prim

O algoritmo mantém os seguintes invariantes.

No início de cada iteração das linhas 6–11:

- $A = \{(u, \pi[u]) : u \in V - \{r\} - Q\}$.
- O conjunto de vértices da árvore é exatamente $V[G] - Q$.
- Para cada $v \in Q$, se $\pi[v] \neq \text{NIL}$, então $key[v]$ é o peso de uma aresta $(v, \pi[v])$ de menor peso ligando v a um vértice $\pi[v]$ na árvore.

Esse invariantes garantem que o algoritmo sempre escolhe uma aresta segura para acrescentar a A e portanto, o algoritmo está correto.

Complexidade do algoritmo de Prim

Obviamente, a complexidade de AGM-PRIM depende de como a fila de prioridade Q é implementada.
Vejamos o que acontece se implementarmos Q como um min-heap.

- As linhas 1–5 podem ser executadas em tempo $O(V)$ usando BUILD-MIN-HEAP.
- O laço da linha 6 é executado $|V|$ vezes e cada operação EXTRACT-MIN consome tempo $O(\lg V)$, resultando em um tempo total $O(V \lg V)$ para todas as chamadas de EXTRACT-MIN.
- O laço das linhas 8–11 é executado $O(E)$ vezes no total. O teste de pertinência à fila Q pode ser feito em tempo constante usando um **vetor booleano**.
  Ao atualizar a chave de um vértice na linha 11 é feita uma *chamada implícita* a DECREASE-KEY que consome tempo $O(\lg V)$.
- O tempo total é $O(V \lg V + E \lg V) = O(E \lg V)$.

Complexidade do algoritmo de Prim

Pode-se fazer melhor usando uma estrutura de dados chamada *heap de Fibonacci* que guarda $|V|$ elementos e suporta as seguintes operações:

- EXTRACT-MIN: $O(\lg V)$.
- DECREASE-KEY: tempo amortizado $O(1)$.
- INSERT: tempo amortizado $O(1)$.
- Outras operações eficientes que um min-heap não suporta, como, por exemplo, UNION.
- Maiores detalhes no CLRS.

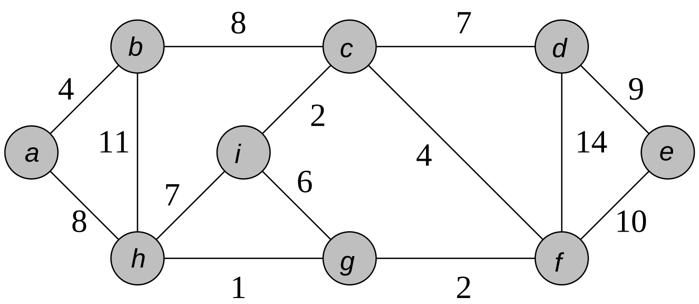
Usando um *heap de Fibonacci* para implementar Q melhoramos o tempo para $O(E + V \lg V)$.

O algoritmo de Kruskal

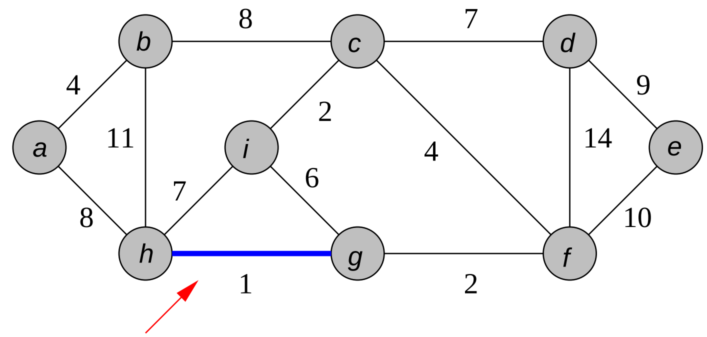
- No algoritmo de Kruskal o subgrafo $F = (V, A)$ é uma floresta. Inicialmente, A é vazio.
- Em cada iteração, o algoritmo escolhe uma aresta (u, v) de menor peso que liga vértices de componentes (árvores) distintos C e C' de $F = (V, A)$.
  Note que (u, v) é uma aresta leve do corte $\delta(C)$.
- Ele acrescenta (u, v) ao conjunto A e começa outra iteração até que A seja uma árvore geradora.

Um detalhe de implementação importante é como encontrar a aresta de menor peso ligando componentes distintos.

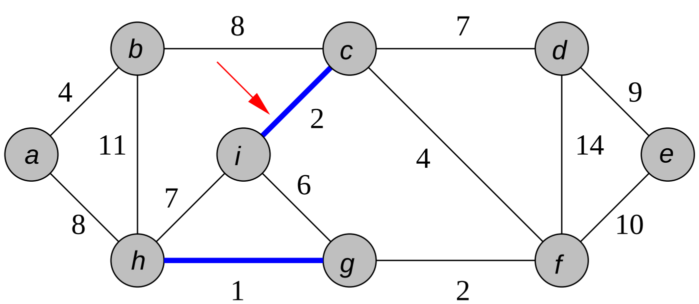
O algoritmo de Kruskal



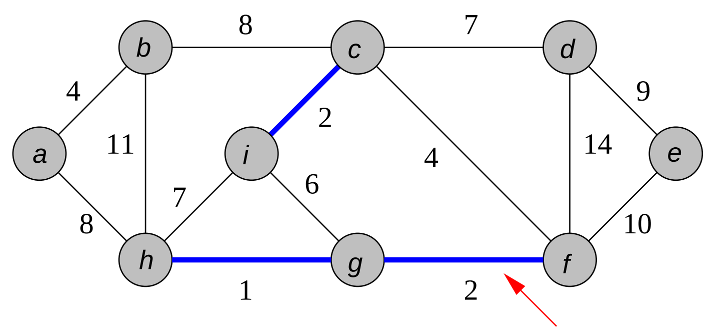
O algoritmo de Kruskal



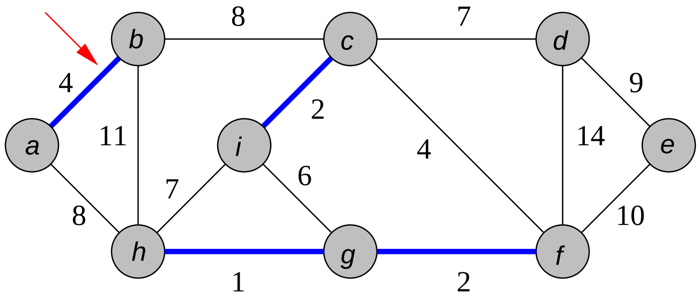
O algoritmo de Kruskal



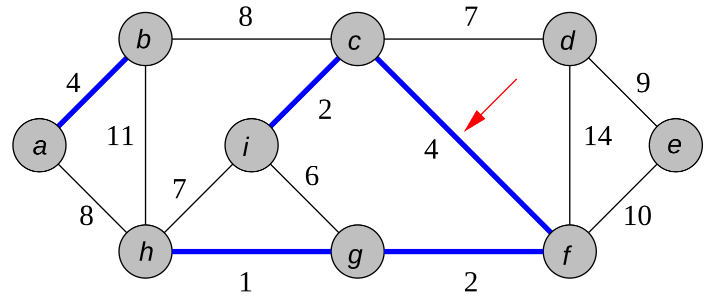
O algoritmo de Kruskal



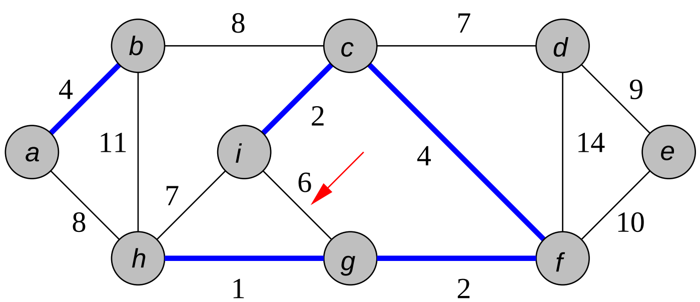
O algoritmo de Kruskal



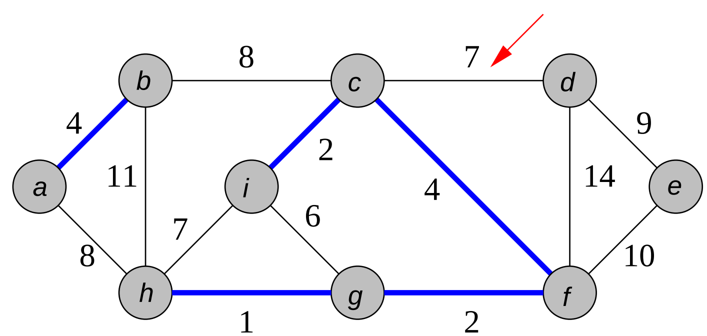
O algoritmo de Kruskal



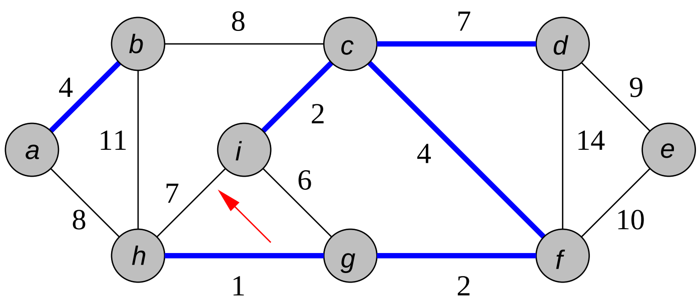
O algoritmo de Kruskal



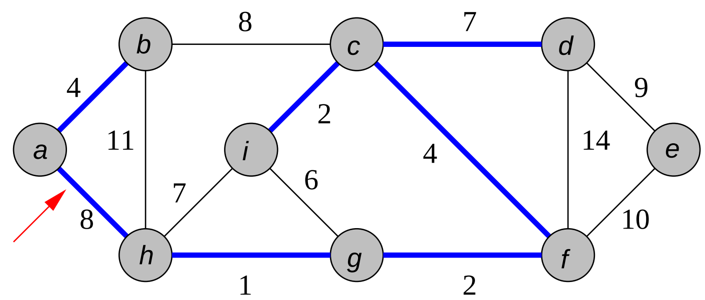
O algoritmo de Kruskal



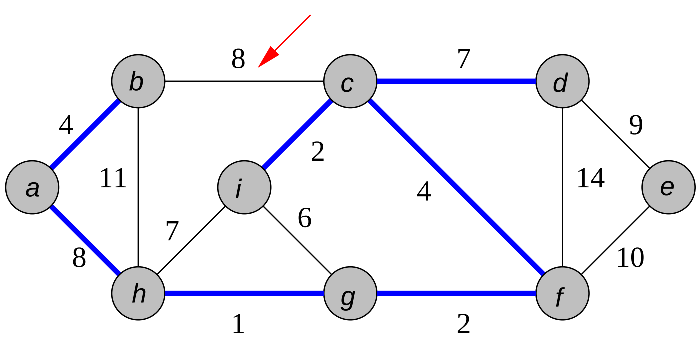
O algoritmo de Kruskal



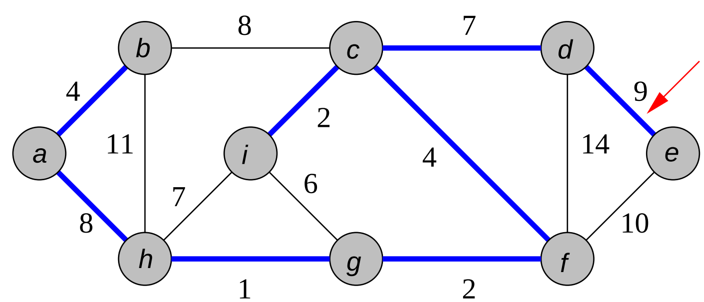
O algoritmo de Kruskal



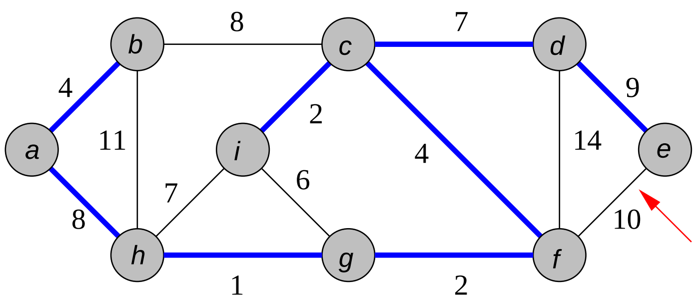
O algoritmo de Kruskal



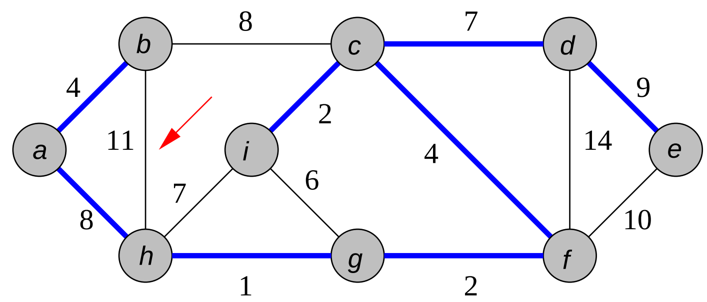
O algoritmo de Kruskal



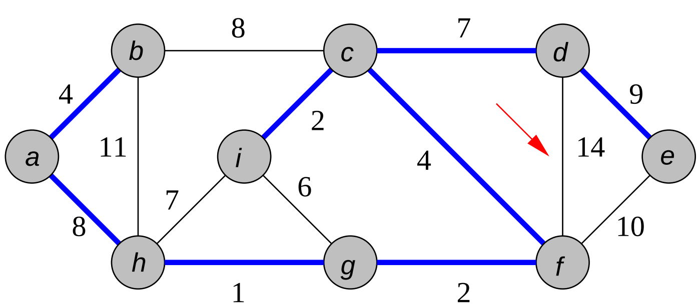
O algoritmo de Kruskal



O algoritmo de Kruskal



O algoritmo de Kruskal



O algoritmo de Kruskal

Eis uma versão inicial do algoritmo de Kruskal.

AGM-KRUSKAL(G, w)
1 $A \leftarrow \emptyset$
2 Ordene as arestas em ordem não-decrescente de peso
3 **para cada** $(u, v) \in E$ nessa ordem **faça**
4   **se** u e v estão em componentes distintos de (V, A)
5   **então** $A \leftarrow A \cup \{(u, v)\}$
6 **devolva** A

Problema: Como verificar eficientemente se u e v estão no mesmo componente da floresta $G_A = (V, A)$?

O algoritmo de Kruskal

Inicialmente $G_A = (V, \emptyset)$, ou seja, G_A corresponde à floresta onde cada componente é um vértice isolado.

Ao longo do algoritmo, esses componentes são modificados pela inclusão de arestas em A.

Uma estrutura de dados para representar $G_A = (V, A)$ deve ser capaz de executar eficientemente as seguintes operações:

- Dado um vértice u, determinar o componente de G_A que contém u e
- dados dois vértices u e v em componentes distintos C e C', fazer a união desses em um novo componente.

Estrutura de dados para conjuntos disjuntos

- Uma estrutura de dados para conjuntos disjuntos mantém uma coleção $\{S_1, S_2, \ldots, S_k\}$ de conjuntos disjuntos dinâmicos (isto é, eles mudam ao longo do tempo).
- Cada conjunto é identificado por um representante que é um elemento do conjunto.

  Quem é o representante é irrelevante, mas se o conjunto não for modificado, então o representante não pode ser alterado.

Estrutura de dados para conjuntos disjuntos

Uma estrutura de dados para conjuntos disjuntos deve ser capaz de executar as seguintes operações:

- MAKE-SET(x): cria um novo conjunto $\{x\}$.
- UNION(x, y): une os conjuntos (disjuntos) que contém x e y, digamos S_x e S_y, em um novo conjunto $S_x \cup S_y$.

  Os conjuntos S_x e S_y são descartados da coleção.
- FIND-SET(x) devolve um apontador para o representante do (único) conjunto que contém x.

Componentes conexos

```
CONNECTED-COMPONENTS(G)
1  para cada vértice v ∈ V[G] faça
2      MAKE-SET(v)
3  para cada aresta (u, v) ∈ E[G] faça
4      se FIND-SET(u) ≠ FIND-SET(v)
5          então UNION(u, v)
```

Componentes conexos

Análise do CONNECTED-COMPONENTS:

- $|V|$ chamadas a MAKE-SET
- $2|E|$ chamadas a FIND-SET
- No máximo $|V| - 1$ chamadas a UNION

O algoritmo de Kruskal

Eis a versão completa do algoritmo:

```
AGM-KRUSKAL(G, w)
1  A ← ∅
2  para cada v ∈ V[G] faça
3      MAKE-SET(v)
4  Ordene as arestas em ordem não-decrescente de peso
5  para cada (u, v) ∈ E nessa ordem faça
6      se FIND-SET(u) ≠ FIND-SET(v)
7          então A ← A ∪ {(u, v)}
8                UNION(u, v)
9  devolva A
```


O algoritmo de Kruskal

Análise do AGM-KRUSKAL:

- Ordenação: $O(E \lg E)$
- $|V|$ chamadas a MAKE-SET
- $2|E|$ chamadas a FIND-SET
- $|V| - 1$ chamadas a UNION

A complexidade depende de como essas operações são implementadas.

Estrutura de dados para conjuntos disjuntos

Sequência de operações MAKE-SET, UNION e FIND-SET:

M M M U F U U F U F F F U F

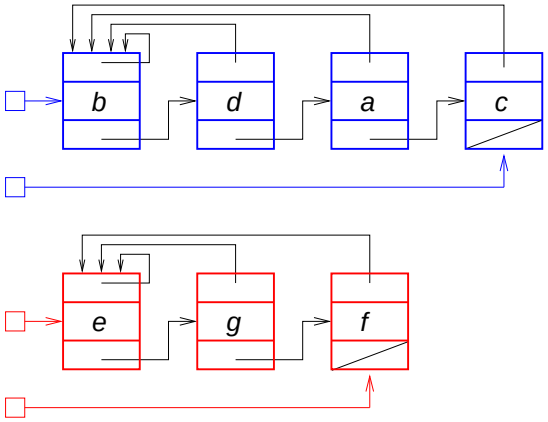
n

m

Vamos medir a complexidade das operações em termos de n e m.

Que estrutura de dados usar?
Ou seja, como representar os conjuntos?

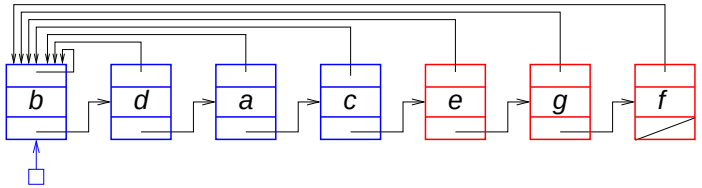
Representação por listas ligadas



- Cada conjunto tem um representante (início da lista)
- Cada nó tem um campo que aponta para o representante
- Guarda-se um apontador para o fim da lista

Representação por listas ligadas

- MAKE-SET(x): $O(1)$
- FIND-SET(x): $O(1)$
- UNION(x, y): concatena a lista de x no final da lista de y



$O(n)$ no pior caso

É preciso atualizar os apontadores para o representante.

Um exemplo de pior caso

Operação	Número de atualizações
MAKE-SET(x_1)	1
MAKE-SET(x_2)	1
⋮	⋮
MAKE-SET(x_n)	1
UNION(x_1, x_2)	1
UNION(x_2, x_3)	2
UNION(x_3, x_4)	3
⋮	⋮
UNION(x_{n-1}, x_n)	n-1

Número total de operações: $2n - 1$

Custo total: $\Theta(n^2)$

Custo amortizado de cada operação: $O(n)$

Uma heurística simples

No exemplo anterior, cada chamada de UNION requer em média tempo $\Theta(n)$ pois concatemos a maior lista no final da menor.

Uma idéia simples para evitar esta situação é sempre concatenar a menor lista no final da maior (*weighted-union heuristic*.)

Para implementar isto basta guardar o tamanho de cada lista.

Uma única execução de UNION pode gastar tempo $O(n)$, mas na média o tempo é bem menor (próximo slide).

Uma heurística simples

Teorema. Usando a representação por listas ligadas e *weighted-union heuristic*, uma sequência de m operações MAKE-SET, UNION e FIND-SET gasta tempo $O(m + n \lg n)$.
Prova.

O tempo total em chamadas a MAKE-SET e FIND-SET é $O(m)$.

Sempre que o apontador para o representante de um elemento x é atualizado, o tamanho da lista que contém x (pelo menos) dobra.

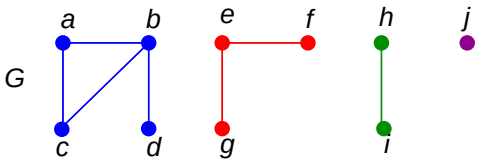
Após ser atualizado $\lceil \lg k \rceil$ vezes, a lista tem tamanho pelo menos k. Como k tem que ser menor que n, cada apontador é atualizado no máximo $O(\lg n)$ vezes.

Assim, o tempo total em chamadas a UNION é $O(n \lg n)$.

Representação por *disjoint-set forests*

- Veremos agora a representação por *disjoint-set forests*.
- Implementações ingênuas não são assintoticamente melhores do que a representação por listas ligadas.
- Usando duas heurísticas (union by rank e path compression) obtemos a representação por *disjoint-set forests* mais eficiente conhecida.

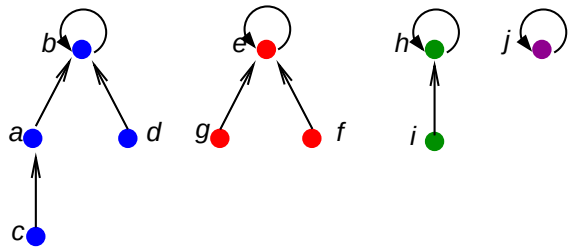
Representação por *disjoint-set forests*



Grafo com vários componentes.

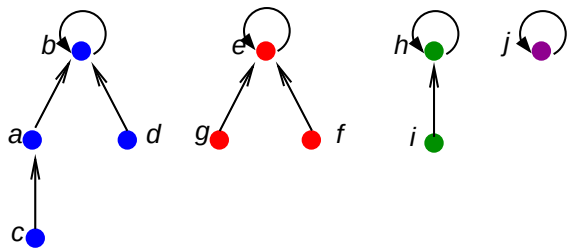
Como é a representação dos componentes na estrutura de dados *disjoint-set forests*?

Representação por *disjoint-set forests*



- Cada conjunto corresponde a uma árvore enraizada.
- Cada elemento aponta para seu pai.
- A raiz é o representante do conjunto e aponta para si mesma.

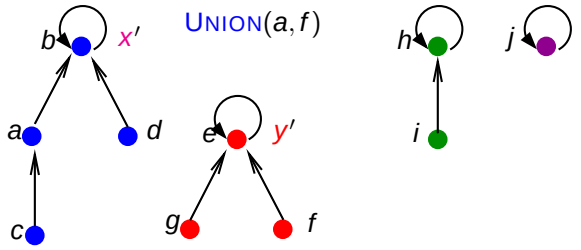
Representação por *disjoint-set forests*



MAKE-SET(x)
1 pai[x] $\leftarrow x$

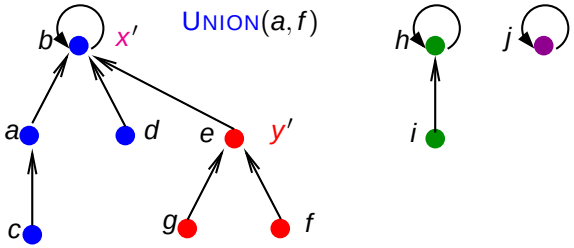
FIND-SET(x)
1 **se** $x = \text{pai}[x]$
2 **então devolva** x
3 **senão devolva** FIND-SET(pai[x])

Representação por *disjoint-set forests*



UNION(x, y)
1 $x' \leftarrow$ FIND-SET(x)
2 $y' \leftarrow$ FIND-SET(y)
3 pai[y'] $\leftarrow x'$

Representação por *disjoint-set forests*



UNION(x, y)
1 $x' \leftarrow$ FIND-SET(x)
2 $y' \leftarrow$ FIND-SET(y)
3 pai[y'] $\leftarrow x'$

Representação por *disjoint-set forests*

Com a implementação descrita até agora, não há melhoria assintótica em relação à representação por listas ligadas.

É fácil descrever uma sequência de $n - 1$ chamadas a UNION que resultam em uma cadeia linear com n nós.

Pode-se melhorar (muito) isso usado duas heurísticas:

- union by rank
- path compression

Union by rank

- A idéia é emprestada do weighted-union heuristic.
- Cada nó x possui um "posto" $\text{rank}[x]$ que é um limitante superior para a altura de x.
- Em union by rank a raiz com menor rank aponta para a raiz com maior rank.

Union by rank

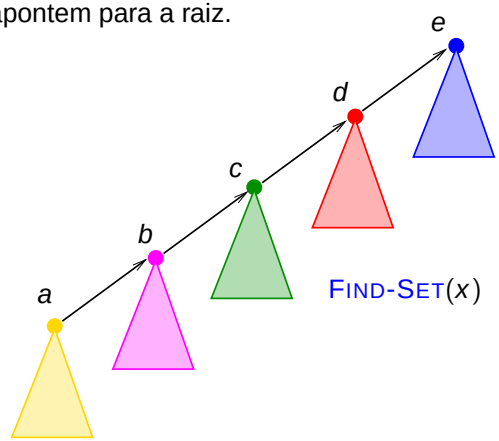
```
MAKE-SET(x)
1  pai[x] ← x
2  rank[x] ← 0

UNION(x, y)
1  LINK(FIND-SET(x), FIND-SET(y))

LINK(x, y) ▷ x e y são raízes
1  se rank[x] > rank[y]
2     então pai[y] ← x
3     senão pai[x] ← y
4           se rank[x] = rank[y]
5              então rank[y] ← rank[y] + 1
```

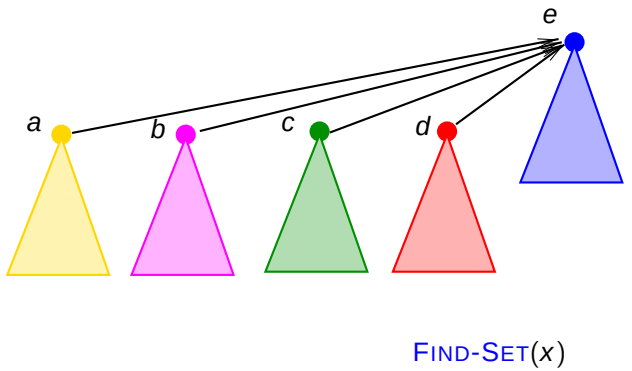

Path compression

A idéia é muito simples: ao tentar determinar o representante (raiz da árvore) de um nó fazemos com que todos os nós no caminho apontem para a raiz.

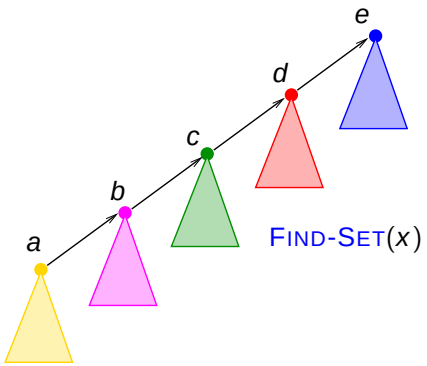


Path compression

A idéia é muito simples: ao tentar determinar o representante (raiz da árvore) de um nó fazemos com que todos os nós no caminho apontem para a raiz.



Path compression



FIND-SET(x)
1 **se** $x \neq \text{pai}[x]$
2 **então** $\text{pai}[x] \leftarrow$ FIND-SET($\text{pai}[x]$)
3 **devolva** $\text{pai}[x]$

Análise de union by rank com path compression

Vamos descrever (sem provar) a complexidade de uma sequência de operações MAKE-SET, UNION e FIND-SET quando union by rank e path compression são usados.

Primeiramente, vamos definir a Função de Ackermann $A(m,n)$:

$$A(m,n) = \begin{cases} n+1 & \text{se } m = 0, \\ A(m-1,1) & \text{se } m > 0 \text{ e } n = 0 \\ A(m-1,A(m,n-1)) & \text{se } m > 0 \text{ e } n > 0 \end{cases}$$

Note que a Função de Ackermann é monoticamente crescente, ou seja, $A(m',n) < A(m,n)$ e $A(m,n') < A(m,n)$, se $m' < m$ e $n' < n$.

Análise de union by rank com path compression

Tudo que você precisa saber é que ela cresce muito rápido.

$$A(1,0) = 2$$
$$A(1,1) = 3$$
$$A(2,2) = 7$$
$$A(3,2) = 29$$
$$A(4,2) = 2^{65536} - 3$$

Em particular, $A(4,2) = 2^{65536} - 3 \gg 10^{80}$ que é número estimado de átomos do universo...

Análise de union by rank com path compression

Considere agora inversa da função de Ackermann $A(n)$ definida como

$$\alpha(n) = \min\{k \ : \ A(k,k) \geq n\}.$$

Ou seja, para efeitos práticos $\alpha(n) \leq 4$.

Análise de union by rank com path compression

Teorema. Uma sequência de m operações MAKE-SET, UNION e FIND-SET pode ser executada em uma estrutura de dados para *disjoint-set forests* com union by rank e path compression em tempo $O(m\alpha(n))$ no pior caso.

Vamos voltar agora à implementação do algoritmo de Kruskal.

O algoritmo de Kruskal (de novo)

AGM-KRUSKAL(G, w)
1 $A \leftarrow \emptyset$
2 **para cada** $v \in V[G]$ **faça**
3 MAKE-SET(v)
4 Ordene as arestas em ordem não-decrescente de peso
5 **para cada** $(u, v) \in E$ nessa ordem **faça**
6 **se** FIND-SET$(u) \neq$ FIND-SET(v)
7 **então** $A \leftarrow A \cup \{(u, v)\}$
8 UNION(u, v)
9 **devolva** A

Complexidade:

- Ordenação: $O(E \lg E)$
- $|V|$ chamadas a MAKE-SET
- $|E| + |V| - 1 = O(E)$ chamadas a UNION e FIND-SET

O algoritmo de Kruskal (de novo)

- Ordenação: $O(E \lg E)$
- $|V|$ chamadas a MAKE-SET
- $O(E)$ chamadas a UNION e FIND-SET

Usando a representação *disjoint-set forests* com union by rank e path compression, o tempo gasto com as operações é $O((V + E)\alpha(V)) = O(E\alpha(V))$.

Como $\alpha(V) = O(\lg V) = O(\lg E)$ o passo que consome mais tempo no algoritmo de Kruskal é a ordenação.

Logo, a complexidade do algoritmo é $O(E \lg E) = O(E \lg V)$.