MO417 – Complexidade de Algoritmos
Segundo Semestre de 2008
Décima Lista de Exercícios

Reduções

1. Sejam P1 e P2 dois problemas tais que P1 $\propto_n$ P2 e suponha que P1 tem cota inferior $\Omega(n \lg n)$, onde n é um parâmetro que mede o tamanho da entrada do problema P1. Quais das seguintes afirmações são verdadeiras? Justifique as suas respostas.

   (a) $\Omega(n \lg n)$ também é cota inferior para P2.

   (b) Todo algoritmo que resolve P1 também pode ser usado para resolver P2.

   (c) Todo algoritmo que resolve P2 também pode ser usado para resolver P1.

   (d) O problema P2 pode ser resolvido no pior caso em tempo $\mathrm{O}(n \lg n)$.

2. Considere os seguintes problemas:

   INTERVALOS: Dados n intervalos na reta real, definidos pelos seus pontos de início e de fim, deseja-se obter a lista de todos os intervalos que estão contidos dentro de pelo menos um dos outros intervalos passados na entrada.

   MAXIMAIS: Diz-se que um ponto p = (xp,yp) do plano domina um outro ponto distinto q = (xq,yq) do plano se xp $\geq$ xq e yp $\geq$ yq. Um ponto p é dito ser maximal em relação a um conjunto de pontos S se p pertence a S e nenhum ponto de S domina p. Deseja-se obter todos os pontos maximais de um conjunto S contendo n pontos distintos no plano.

   (a) Encontre uma redução de complexidade linear de INTERVALOS para MAXIMAIS.

   (b) Encontre uma redução de complexidade linear de MAXIMAIS para INTERVALOS.

3. Uma matriz quadrada é dita ser triangular inferior (superior) se todos os seus elementos não nulos estiverem na diagonal principal ou abaixo (acima) dela. Seja MMIS o problema de multiplicar uma matriz triangular inferior por uma matriz triangular superior e MMA o problema de multiplicar duas matrizes quadradas arbitrárias. Seja $T(n)$ a complexidade de um algoritmo ótimo para resolver MMIS quando as matrizes passadas na entrada tem dimensão n $\times$ n. Suponha que $T(cn) \in O(T(n))$ para toda constante $c > 0$. Mostre que MMIS é pelo menos tão difícil quanto MMA no sentido em que estes dois problemas tem a mesma cota inferior (supondo o modelo de computação usual).

4. Seja S um conjunto de n pontos distintos do plano. Seja $G = (V, E)$ o grafo não orientado completo com n vértices de modo que exista uma relação $1 : 1$ entre os vértices de V e os pontos de S. Além disso, assuma que para cada aresta (u, v) em E, esteja associado um custo $c(u, v)$ que é igual à distância euclidiana entre os pontos correspondentes a u e v em S. Mostre que a cota inferior do problema de encontrar a árvore geradora mínima de G tem cota inferior $\Omega(n \lg n)$.

NP-Completude

1. Mostre que o problema de cobertura de vértices (CV) visto em aula permanece NP-completo mesmo se todos os vértices do grafo tiverem grau par. Se desejar, você pode usar o seguinte teorema:

   ”O número de vértices de grau ímpar em um grafo não orientado qualquer é sempre par.”

2. Considere o problema do empacotamento (BIN) descrito abaixo.

   Instância: Um conjunto finito de n objetos com pesos $w_1, w_2, \ldots, w_n$ inteiros positivos. Dois valores inteiros positivos W e k. Questão: é possível colocar todos os objetos em k caixas cujo limite de peso de cada caixa é W?

   Escreva em um pseudo-código, de alto nível, de um algoritmo não-determinístico polinomial que resolve BIN. Ou seja, mostre que este problema está em NP. Qual a complexidade do seu algoritmo?

3. Usando um dos problemas vistos em aula, prove que o problema a seguir é NP-completo: dado um grafo $G = (V, E)$ e um inteiro k, determine se G contém uma árvore geradora T tal que todo vértice em T tenha grau menor ou igual a k.

4. Considere o seguinte problema: dado um grafo não orientado $G = (V, E)$ e dois parâmetros d e k inteiros não-negativos, determine se G contém um subgrafo induzido H com pelo menos k vértices tal que o grau de cada vértice em H seja menor ou igual a d.

   Prove que este problema é NP-completo.

5. Um Conjunto Independente (IS) de um grafo não-orientado $G = (V, E)$ é um sub-conjunto de vértices U para o qual, dado um par qualquer de elementos u e v de U, a aresta (u, v) não está em E. Assim, dado um grafo não-orientado G e um inteiro k pertencente ao intervalo $[1, n]$, onde $n = |V|$, deseja-se saber se G possui um conjunto independente com k vértices.

   Mostre que IS está em NP-completo.

6. Prove que a seguinte variação do problema 3SAT chamada de 1-em-3SAT é um problema NP-completo. A entrada é a mesma do problema 3SAT usual. O problema é determinar se existe ou não uma atribuição aos valores das variáveis que torne a fórmula verdadeira mas de modo que em cada cláusula haja exatamente uma única variável verdadeira.

7. Assuma que o problema do caminho hamiltoniano (CaH) para grafos não orientados é NP-completo. Prove que o problema do ciclo hamiltoniano (CiH) para grafos não orientados é NP-completo.

8. Considere os problemas P1 e P2 ambos pertencentes a NP-completo. Indique para cada uma das afirmações abaixo se ela é verdadeira, falsa ou se não se sabe.

   (a) Existe uma redução de P1 para P2 que toma um tempo polinomial.
   (b) Se existe um algoritmo determinístico polinomial para resolver P2 então P = NP.
   (c) Existe uma redução de P2 para P1 que leva tempo polinomial.
   (d) Se P3 é um problema NP-difícil então P3 se reduz a P2 em tempo polinomial.
   (e) Pode-se afirmar que P1 está em PSPACE.
   (f) Não se pode afirmar que P2 está em PSPACE.