MO417 – Complexidade de Algoritmos
Segundo Semestre de 2008
Primeira Lista de Exercícios

1 Logaritmos

1. (a) É verdade que $\lfloor \lg n \rfloor \geq \lg(n-1)$ para todo inteiro $n \geq 2$? (b) É verdade que $\lceil \lg n \rceil \leq \lg(n+1)$ para todo inteiro $n \geq 1$? Justifique suas respostas.

2. Quanto vale a soma
$$\sum_{i=1}^{n} \log i = \log 1 + \log 2 + \cdots + \log n,$$
onde $n \geq 1$ é um inteiro.

2 Prova por Indução

3. Prove por indução em n que $2^0 + 2^1 + 2^2 + \cdots + 2^n = 2^{n+1} - 1$.

4. Ache uma fórmula para a soma
$$1.2 + 2.3 + 3.4 + \cdots + n(n+1)$$
e prove sua afirmação.

5. Ache uma fórmula para a soma
$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2$$
e prove sua afirmação.

6. Ache uma fórmula para a soma
$$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \cdots + \frac{1}{2^{n-1}} + \frac{1}{2^n}$$
e prove sua afirmação.

7. Prove que as regiões formadas por n círculos no plano podem ser coloridas com duas cores de modo que regiões vizinhas tenham cores distintas.

8. O **Princípio da Casa do Pombo** (em sua forma mais simples) afirma o seguinte: se $n + 1$ bolas são distribuídas de modo arbitrário em n caixas, então pelo menos uma caixa contém mais que uma bola. Prove este princípio por indução.

9. Uma **árvore binária completa** (ABC) é definida recursivamente como segue. Uma ABC de altura 0 consiste de um nó que é a raiz. Uma ABC de altura $h + 1$ consiste de duas ABC's de altura h cujas raízes são filhos de uma nova raiz. Seja T uma ABC de altura h. A **altura** (*height*) de um nó x em T é a altura da subárvore da qual ele é raiz (a raiz de T tem altura h e uma folha tem altura 0). Prove que a soma das alturas de todos os nós em T é $2^{h+1} - h - 2$.