

MO417 — Complexidade de Algoritmos I

Cid Carvalho de Souza Cândia Nunes da Silva
Orlando Lee

18 de abril de 2008

Projeto de algoritmos por indução

- A seguir, usaremos a técnica de indução para desenvolver algoritmos para certos problemas.
- Isto é, a formulação do algoritmo vai ser análoga ao desenvolvimento de uma demonstração por indução.
- Assim, para resolver o problema P falamos do projeto de um algoritmo em dois passos:
 - 1 Exibir a resolução de uma ou mais instâncias pequenas de P (casos base);
 - 2 Exibir como a solução de toda instância de P pode ser obtida a partir da solução de uma ou mais instâncias menores de P .

Indução matemática no projeto de algoritmos

Projeto de algoritmos por indução

Este processo indutivo resulta em algoritmos recursivos, em que:

- a base da indução corresponde à resolução dos casos base da recursão;
- a aplicação da hipótese de indução corresponde a uma ou mais chamadas recursivas; e
- o passo da indução corresponde ao processo de obtenção da resposta para o caso geral a partir daquelas devolvidas pelas chamadas recursivas.

Projeto de algoritmos por indução

- Um benefício imediato é que o uso (correto) da técnica nos dá uma prova da corretude do algoritmo.
- A complexidade do algoritmo resultante é expressa numa recorrência.
- Frequentemente o algoritmo é eficiente, embora existam exemplos simples em que isso não acontece.
- Iniciaremos com dois exemplos que usam **indução**:
 - 1 cálculo do valor de polinômios e
 - 2 obtenção de subgrafos maximais com restrições de grau.

Exemplo 1 - Cálculo de polinômios

Problema:

Dada uma seqüência de números reais $a_n, a_{n-1}, \dots, a_1, a_0$, e um número real x , calcular o valor do polinômio

$$P_n(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0.$$

Naturalmente este é um problema bem simples. Estamos interessados em projetar um algoritmo que faça o menor número de operações aritméticas (multiplicações, principalmente).

Exemplo 1 - Cálculo de polinômios

Problema:

Dados uma seqüência de números reais $a_n, a_{n-1}, \dots, a_1, a_0$, e um número real x , calcular o valor do polinômio

$$P_n(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0.$$

Hipótese de indução: (primeira tentativa)

Dados uma seqüência de números reais a_{n-1}, \dots, a_1, a_0 , e um número real x , sabemos calcular o valor de

$$P_{n-1}(x) = a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0.$$

- **Caso base:** $n = 0$. A solução é a_0 .
- Para calcular $P_n(x)$, basta calcular x^n , multiplicar o resultado por a_n e somar o resultado com $P_{n-1}(x)$.

Exemplo 1 - Solução 1 - Algoritmo

CálculoPolinômio(A, x)

▷ **Entrada:** Coeficientes $A = a_n, a_{n-1}, \dots, a_1, a_0$ e real x .

▷ **Saída:** O valor de $P_n(x)$.

1. **se** $n = 0$ **então** $P \leftarrow a_0$
2. **senão**
3. $A' \leftarrow a_{n-1}, \dots, a_1, a_0$
4. $P' \leftarrow \text{CálculoPolinômio}(A', x)$
5. $xn \leftarrow 1$
6. **para** $i \leftarrow 1$ **até** n **faça** $xn \leftarrow xn * x$
7. $P \leftarrow P' + a_n * xn$
8. **devolva** (P)

Exemplo 1 - Solução 1 - Complexidade

Chamando de $T(n)$ o número de operações aritméticas realizadas pelo algoritmo, temos a seguinte recorrência para $T(n)$:

$$T(n) = \begin{cases} 0, & n = 0 \\ T(n-1) + (n+1) \text{ multiplicações} + 1 \text{ adição}, & n > 0. \end{cases}$$

Não é difícil ver que

$$\begin{aligned} T(n) &= \sum_{i=1}^n [(i+1) \text{ multiplicações} + 1 \text{ adição}] \\ &= (n+3)n/2 \text{ multiplicações} + n \text{ adições.} \end{aligned}$$

Nota: o número de multiplicações pode ser diminuído calculando x^n com o algoritmo de exponenciação rápida que veremos mais tarde.

Segunda solução indutiva

- **Desperdício cometido na primeira solução:** recálculo de potências de x .
- **Alternativa:** eliminar essa computação desnecessária trazendo o cálculo de x^{n-1} para dentro da hipótese de indução.

Hipótese de indução reforçada:

Sabemos calcular o valor de

$P_{n-1}(x) = a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_1x + a_0$ e também o valor de x^{n-1} .

- Então, no passo de indução, primeiro calculamos x^n multiplicando x por x^{n-1} , conforme exigido na hipótese. Em seguida, calculamos $P_n(x)$ multiplicando x^n por a_n e somando o valor obtido com $P_{n-1}(x)$.
- Note que para o caso base $n = 0$, a solução agora é $(a_0, 1)$.

Exemplo 1 - Solução 2 - Algoritmo

CálculoPolinômio(A, x)

▷ **Entrada:** Coeficientes $A = a_n, a_{n-1}, \dots, a_1, a_0$ e real x .

▷ **Saída:** O valor de $P_n(x)$ e o valor de x^n .

1. **se** $n = 0$ **então** $P \leftarrow a_0; xn \leftarrow 1$
2. **senão**
3. $A' \leftarrow a_{n-1}, \dots, a_1, a_0$
4. $P', x' \leftarrow \text{CálculoPolinômio}(A', x)$
5. $xn \leftarrow x * x'$
6. $P \leftarrow P' + a_n * xn$
7. **devolva** (P, xn)

Exemplo 1 - Solução 2 - Complexidade

Novamente, se $T(n)$ é o número de operações aritméticas realizadas pelo algoritmo, $T(n)$ é dado por:

$$T(n) = \begin{cases} 0, & n = 0 \\ T(n-1) + 2 \text{ multiplicações} + 1 \text{ adição}, & n > 0. \end{cases}$$

A solução da recorrência é

$$\begin{aligned} T(n) &= \sum_{i=1}^n (2 \text{ multiplicações} + 1 \text{ adição}) \\ &= 2n \text{ multiplicações} + n \text{ adições.} \end{aligned}$$

Terceira solução indutiva

- A escolha de considerar o polinômio $P_{n-1}(x)$ na hipótese de indução não é a única possível.
- Podemos **reforçar** ainda mais a h.i. e ter um ganho de complexidade:

Hipótese de indução mais reforçada:

Sabemos calcular o valor do polinômio

$$P'_{n-1}(x) = a_n x^{n-1} + a_{n-1} x^{n-2} \dots + a_1.$$

- Note que $P_n(x) = xP'_{n-1}(x) + a_0$. Assim, bastam uma multiplicação e uma adição para obtermos $P_n(x)$ a partir de $P'_{n-1}(x)$.
- O caso base é trivial pois, para $n = 0$, a solução é a_0 .

Exemplo 1 - Solução 3 - Complexidade

Temos que $T(n)$ é dado por

$$T(n) = \begin{cases} 0, & n = 0 \\ T(n-1) + 1 \text{ multiplicação} + 1 \text{ adição}, & n > 0. \end{cases}$$

A solução é

$$\begin{aligned} T(n) &= \sum_{i=1}^n (1 \text{ multiplicação} + 1 \text{ adição}) \\ &= n \text{ multiplicações} + n \text{ adições.} \end{aligned}$$

Essa forma de calcular $P_n(x)$ é chamada de **regra de Horner**.

Exemplo 1 - Solução 3 - Algoritmo

CálculoPolinômio(A, x)

▷ **Entrada:** Coeficientes $A = a_n, a_{n-1}, \dots, a_1, a_0$ e real x .

▷ **Saída:** O valor de $P_n(x)$.

1. **se** $n = 0$ **então** $P \leftarrow a_0$
2. **senão**
3. $A' \leftarrow a_n, a_{n-1}, \dots, a_1$
4. $P' \leftarrow \text{CálculoPolinômio}(A', x)$
5. $P \leftarrow x * P' + a_0$
6. **devolva** (P)

Projeto por indução - Exemplo 2 Subgrafos Maximais

- Suponha que você esteja planejando uma festa onde queira maximizar as interações entre as pessoas. Uma festa animada, mas sem recursos ilícitos para aumentar a animação.
- Uma das maneiras de conseguir isso é fazer uma lista dos possíveis convidados e, para cada um desses, a lista dos convidados com quem ele(a) interagiria durante a festa.
- Em seguida, é só localizar o maior subgrupo de convidados que interagiriam com, no mínimo, digamos, k outros convidados dentro do subgrupo.

Exemplo 2 - Subgrafos Maximais

Formulação do problema usando grafos:

Dado um grafo simples G (não-orientado) com n vértices e um inteiro $k \leq n$, encontrar em G um subgrafo induzido H com o número máximo de vértices, tal que o grau de cada vértice de H seja $\geq k$. Se um tal subgrafo H não existir, o algoritmo deve identificar esse fato.

Definições:

H é um **subgrafo induzido** de um grafo G , uma aresta de G está em H se, e somente se, tem ambos os seus extremos em H .

Um subgrafo qualquer G' de G é **maximal** com relação a uma propriedade P se G' satisfizer P e não existir em G outro subgrafo próprio que contenha G' e satisfaça P .

Exemplo 2 - Indução

Usando o método indutivo:

Hipótese de indução:

Dados inteiros n, k e um grafo G com menos que n vértices, sabemos como encontrar um subgrafo maximal H de G com grau mínimo $\geq k$.

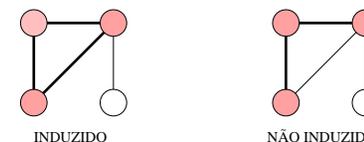
Caso base: o primeiro valor de n para o qual faz sentido buscarmos tais subgrafos H é $n = k + 1$, caso contrário não há como satisfazer a restrição de grau mínimo.

Assim, quando $n = k + 1$, a única forma de existir em G um subgrafo induzido com grau mínimo k é que **todos** os vértices tenham grau igual a k .

Se isso ocorrer, a resposta é $H = G$; caso contrário $H = \emptyset$.

Exemplo 2 (cont.)

- Exemplo de um subgrafo que é induzido e de outro subgrafo que não é induzido em um grafo G :



- Como exemplo de subgrafos maximais (propriedade relativa à continência) que não são máximos (propriedade relativa ao tamanho) em um grafo G , veja definição de **clique em grafos**.
- No nosso exemplo, o conceito de *maximal* é equivalente ao de *máximo* (número de vértices).
Você pode provar esta afirmativa ?

Exemplo 2 - Indução (cont.)

- Seja então G um grafo com n vértices e $k \geq 0$ um inteiro tal que $n > k + 1$.
- Se todos os vértices de G têm grau $\geq k$ não há nada mais a fazer. Devolva $H = G$.
- Caso contrário, seja v um vértice com grau $< k$. É fácil ver que nenhum subgrafo que é solução para o problema conterá v . Assim, v pode ser removido e a hipótese de indução aplicada ao grafo resultante G' .
- Seja H' o subgrafo devolvido pela aplicação da h.i. em G' . Então H' também é resposta para G . ■

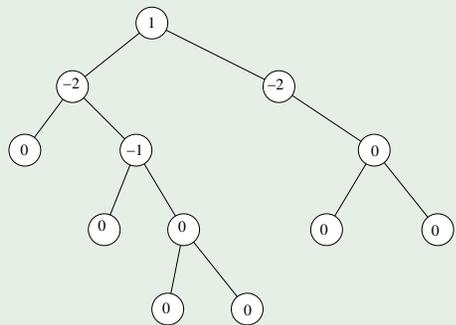
Exemplo 2 - Algoritmo

SubgrafoMaximal(G, k)

- ▷ **Entrada:** Grafo G com n vértices e um inteiro $k \geq 0$.
- ▷ **Saída:** Subgrafo induzido H de G com grau mínimo k .
- 1. **se** $(n < k + 1)$ **então** $H \leftarrow \emptyset$
- 2. **senão se** todo vértice de G tem grau $\geq k$
- 3. **então** $H \leftarrow G$
- 4. **senão**
- 5. seja v um vértice de G com grau $< k$
- 6. $H \leftarrow$ SubgrafoMaximal($G - v, k$)
- 7. **devolva** H

Exemplo 3 (cont.)

Exemplo de uma árvore binária e os fatores de balanceamento de seus nós.



Projeto por indução - Exemplo 3 Fatores de balanceamento em árvores binárias

Definição:

Árvores binárias balanceadas são estruturas de dados que minimizam o tempo de busca de informações nela armazenadas. A ideia é que, para todo nó v da árvore, o fator de balanceamento (f.b.) de v , isto é, a diferença entre a altura da subárvore esquerda e a altura da subárvore direita de v não desvie muito de zero.

- Convenciona-se que a árvore vazia tem fator de balanceamento zero e altura igual a -1 .
- Árvores AVL são exemplos de árvores binárias balanceadas, em que o f.b. de cada nó é $-1, 0$ ou $+1$.

Exemplo 3 (cont.)

Problema:

Dada uma árvore binária A com n nós, calcular os fatores de balanceamento de cada nó de A .

- Vamos projetar o algoritmo indutivamente.

Hipótese de indução:

Sabemos como calcular fatores de balanceamento de árvores com menos que n nós.

- **Caso base:** quando $n = 0$, convençamos que o f.b. é igual a zero.
- Vamos mostrar agora como usar a hipótese para calcular f.b.s de uma árvore A com exatamente n nós.

Exemplo 3 - indução (cont.)

A idéia é aplicar a h.i. às subárvores esquerda e direita da raiz e, em seguida, calcular o f.b. da raiz.

Dificuldade: o f.b. da raiz depende das alturas das subárvores esquerda e direita e não dos seus f.b.s.

Conclusão: é necessário uma h.i. mais forte!

Nova hipótese de indução:

Para um $n > 0$ qualquer, sabemos como calcular fatores de balanceamento e alturas de árvores com menos que n nós.

Exemplo 3 - Algoritmo

FatorAltura (A)

- ▷ **Entrada:** Uma árvore binária A com $n \geq 0$ nós
▷ **Saída:** A árvore A os f.b.s nos seus nós e a altura de A
1. **se** $n = 0$ **então** $h \leftarrow -1$
 2. **senão**
 3. seja r a raiz de A
 3. $h_e \leftarrow \text{FatorAltura}(A_e)$
 4. $h_d \leftarrow \text{FatorAltura}(A_d)$
 5. ▷ armazena o f.b. na raiz em $r.f$
 6. $r.f \leftarrow h_e - h_d$
 7. $h \leftarrow \max(h_e, h_d) + 1$
 8. **devolva** h

Exemplo 3 - indução (cont.)

- Novamente, o caso base $n = 0$ é fácil pois, por convenção, o f.b. é nulo e a altura igual a -1 .
- Seja A uma árvore binária com n nós, para um $n > 0$ qualquer.

Sejam (f_e, h_e) e (f_d, h_d) os f.b.s e alturas das subárvores esquerda (A_e) e direita (A_d) de A que, por h.i., sabemos como calcular.

Então, o f.b. da raiz de A é $h_e - h_d$ e a altura da árvore é $\max(h_e, h_d) + 1$.

Isto completa o cálculo dos f.b.s e da altura de A . ■

De novo, o fortalecimento da hipótese tornou a resolução do problema mais fácil.

Exemplo 3 - Complexidade

Seja $T(n)$ o número de operações executadas pelo algoritmo para calcular os f.b.s e a altura de uma árvore A de n nós. Então

$$T(n) = \begin{cases} \Theta(1), & n = 0 \\ T(n_e) + T(n_d) + \Theta(1), & n > 0, \end{cases}$$

onde n_e, n_d são os números de nós das subárvores esquerda e direita.

Exemplo 3 - Complexidade

O pior caso da recorrência parece ser quando, ao longo da recursão, um de n_e , n_d é sempre igual a zero (e o outro é sempre igual a $n - 1$).

Chega-se então a:

$$T(n) = T(1) + \sum_{i=2}^n \Theta(1) = (n + 1)\Theta(1) + n\Theta(1) \in \Theta(n).$$

Exercício:

Há algum ganho em complexidade quando ambos n_e e n_d são aproximadamente $n/2$ ao longo da recursão?

Projeto por Indução - Exemplo 4: o problema da celebridade

Vamos formalizar melhor: para um conjunto de n pessoas, associamos uma matriz $n \times n$ M tal que $M[i, j] = 1$ se a pessoa i conhece a pessoa j e $M[i, j] = 0$ caso contrário.

Problema:

Dado um conjunto de n pessoas e a matriz associada M encontrar (se existir) uma celebridade no conjunto. Isto é, determinar um k tal que todos os elementos da coluna k (exceto $M[k, k]$) são 1s e todos os elementos da linha k (exceto $M[k, k]$) são 0s.

Existe uma solução simples mas laboriosa: para cada pessoa i , verifique todos os outros elementos da linha i e da coluna i . O custo dessa solução é $2n(n - 1)$.

Projeto por Indução - Exemplo 4: o problema da celebridade

Definição

Num conjunto S de n pessoas, uma *celebridade* é alguém que é conhecido por todas as pessoas de S mas que não conhece ninguém. (Celebridades são pessoas de difícil convívio...).

Note que pode existir no máximo uma celebridade em S !

Problema:

Queremos saber se existe uma celebridade em S .

Exemplo 4 - Indução

Um argumento indutivo que parece ser mais eficiente é o seguinte:

Hipótese de Indução:

Sabemos encontrar uma celebridade (se existir) em um conjunto de $n - 1$ pessoas.

- Se $n = 1$, podemos considerar que o único elemento é uma celebridade.
- Outra opção seria considerarmos o caso **base** como $n = 2$, o primeiro caso interessante. A solução é simples: existe uma celebridade se, e somente se, $M[1, 2] \oplus M[2, 1] = 1$. Mais uma comparação define a celebridade: se $M[1, 2] = 0$, então a celebridade é a pessoa 1; se não, é a pessoa 2.

Exemplo 4 - Indução (cont.)

Tome então um conjunto $S = \{1, 2, \dots, n\}$, $n > 2$, de pessoas e a matriz M associada. Considere o conjunto $S' = S \setminus \{n\}$;

Há dois casos possíveis:

- 1 Existe uma celebridade em S' , digamos a pessoa k ; então, k é celebridade em S se, e somente se, $M[n, k] = 1$ e $M[k, n] = 0$.
- 2 Se k não for celebridade em S ou não existir celebridade em S' , então a pessoa n é celebridade em S se $M[n, j] = 0$ e $M[j, n] = 1, \forall j < n$; caso contrário não há celebridade em S .

Essa primeira tentativa, infelizmente, também conduz a um algoritmo quadrático. **Por quê?**

Exemplo 4 - Segunda tentativa

Tome então um conjunto arbitrário de $n > 2$ pessoas e a matriz M associada.

Sejam i e j quaisquer duas pessoas e suponha que, usando o argumento acima, determinemos que j não é celebridade.

Seja $S' = S \setminus \{j\}$ e considere os dois casos possíveis:

- 1 Existe uma celebridade em S' , digamos a pessoa k . Se $M[j, k] = 1$ e $M[k, j] = 0$, então k é celebridade em S ; caso contrário não há uma celebridade em S .
- 2 Não existe uma celebridade em S' ; então não existe uma celebridade em S .

Exemplo 4 - Segunda tentativa

A segunda tentativa baseia-se em um fato muito simples:

*Dadas duas pessoas i e j , é possível determinar se uma delas **não** é uma celebridade com apenas uma comparação: se $M[i, j] = 1$, então i não é celebridade; caso contrário j não é celebridade.*

Vamos usar esse argumento aplicando a hipótese de indução sobre o conjunto de $n - 1$ pessoas obtidas **removendo** dentre as n uma **pessoa que sabemos não ser celebridade**.

- O caso base e a hipótese de indução são os mesmos que anteriormente.

Exemplo 4 - Algoritmo

Celebridade(S, M)

- ▷ **Entrada:** conjunto de pessoas $S = \{1, 2, \dots, n\}$; M , a matriz que define quem conhece quem em S .
 - ▷ **Saída:** Um inteiro $k \leq n$ que é celebridade em S ou $k = 0$
1. **se** $|S| = 1$ **então** $k \leftarrow$ elemento em S
 2. **senão**
 3. sejam i, j quaisquer duas pessoas em S
 4. **se** $M[i, j] = 1$ **então** $s \leftarrow i$ **senão** $s \leftarrow j$
 5. $S' \leftarrow S \setminus \{s\}$
 6. $k \leftarrow$ Celebridade(S', M)
 7. **se** $k > 0$ **então**
 8. **se** $(M[s, k] \neq 1)$ **ou** $(M[k, s] \neq 0)$ **então** $k \leftarrow 0$
 9. **devolva** k

Exemplo 4 - Complexidade

O algoritmo resultante tem **complexidade linear** em n .

A recorrência $T(n)$ para o número de operações executadas pelo algoritmo é:

$$T(n) = \begin{cases} \Theta(1), & n = 1 \\ T(n-1) + \Theta(1), & n > 1. \end{cases}$$

A solução desta recorrência é

$$\sum_1^n \Theta(1) = n\Theta(1) = \Theta(n).$$

Exemplo 5 - Indução

Como antes, vamos examinar o que podemos obter de uma **hipótese de indução** simples:

Hipótese de indução:

Sabemos calcular a SCM de seqüências de comprimento $n - 1$.

- Seja então $X = x_1, x_2, \dots, x_n$ uma seqüência qualquer de comprimento $n > 1$.
- Considere a seqüência X' obtida de X removendo-se x_n .
- Seja $Y' = x_j, x_{j+1}, \dots, x_j$ a SCM de X' , obtida aplicando-se a h.i.

Projeto por indução - Exemplo 5 Subseqüência consecutiva máxima (SCM)

Problema:

Dada uma seqüência $X = x_1, x_2, \dots, x_n$ de números reais (não necessariamente positivos), encontrar uma **subseqüência consecutiva** $Y = x_i, x_{i+1}, \dots, x_j$ de X , onde $1 \leq i, j \leq n$, cuja soma seja máxima dentre todas as subseqüências consecutivas.

Exemplos:

$X = [4, 2, -7, 3, 0, -2, 1, 5, -2]$ Resp: $Y = [3, 0, -2, 1, 5]$
 $X = [-1, -2, 0]$ Resp: $Y = [0]$ ou $Y = []$
 $X = [-3, -1]$ Resp: $Y = []$

Exemplo 5 - Indução

Há **três casos** a examinar:

- 1 $Y' = []$. Neste caso, $Y = x_n$ se $x_n \geq 0$ ou $Y = []$ se $x_n < 0$.
- 2 $j = n - 1$. Como no caso anterior, temos $Y = Y' || x_n$ se $x_n \geq 0$ ou $Y = Y'$ se $x_n < 0$.
- 3 $j < n - 1$. Aqui há dois subcasos a considerar:
 - 1 Y' também é SCM de X ; isto é, $Y = Y'$.
 - 2 Y' não é a SCM de X . Isto significa que x_n é parte de uma SCM Y de X . Esta tem que ser da forma $x_k, x_{k+1}, \dots, x_{n-1}, x_n$, para algum $k \leq n - 1$.

Exemplo 5 - Indução

- A hipótese de indução nos permite resolver todos os casos anteriores, exceto o último.

Não há informação suficiente na h.i. para permitir a resolução deste caso.

O que falta na h.i.?

- É evidente que, quando

$$Y = x_k, x_{k+1}, \dots, x_{n-1}, x_n,$$

então $x_k, x_{k+1}, \dots, x_{n-1}$ é um **sufixo** de X' de soma máxima entre os *sufixos* de X' .

- Assim, se conhecermos o sufixo máximo de X' , além da SCM, teremos resolvido o problema completamente para X .

Exemplo 5 - Indução

Parece então natural enunciar a seguinte h.i. fortalecida:

Hipótese de indução reforçada:

Sabemos calcular a SCM e o sufixo máximo de seqüências de comprimento $n - 1$.

É clara desta discussão também, a **base da indução**: para $n = 1$, a SCM de $X = x_1$ é x_1 caso $x_1 \geq 0$, e a seqüência vazia caso contrário. Nesse caso, o sufixo máximo é igual a SCM.

Exemplo 5 - Algoritmo

MSC(X, n)

- ▷ **Entrada:** um inteiro n e uma seqüência de n números reais $X = [x_1, x_2, \dots, x_n]$.
- ▷ **Saída:** Inteiros i, j, k e reais $MaxSeq, MaxSuf$ tais que:
 - x_i, x_j são o primeiro e último elementos da SCM de X , cujo valor é $MaxSeq$; e
 - x_k é o primeiro elemento do sufixo máximo de X , cujo valor é $MaxSuf$.
 - O valor $j = 0$ significa que X é composta de negativos somente. Neste caso, convencionamos $MaxSeq = 0$.
 - O valor $k = 0$ significa que o sufixo máximo de X é vazio. Neste caso, $MaxSuf = 0$.

Exemplo 5 - Algoritmo (cont.)

SCM(X, n): (cont.)

1. **se** $n = 1$
2. **então**
3. **se** $x_1 < 0$
4. **então** $i, j, k \leftarrow 0; MaxSeq, MaxSuf \leftarrow 0$
5. **senão** $i, j, k \leftarrow 1; MaxSeq, MaxSuf \leftarrow x_1$
6. **senão**
7. $(i, j, k, MaxSeq, MaxSuf) \leftarrow SCM(X, n - 1)$
8. **se** $MaxSuf = 0$ **então** $k \leftarrow n$
9. $MaxSuf \leftarrow MaxSuf + x_n$
10. **se** $MaxSuf > MaxSeq$
11. **então** $i \leftarrow k; j \leftarrow n; MaxSeq \leftarrow MaxSuf$
12. **senão se** $MaxSuf < 0$ **então** $MaxSuf \leftarrow 0; k \leftarrow 0$
13. **devolva** $(i, j, k, MaxSeq, MaxSuf)$

Exemplo 5 - Complexidade

A complexidade $T(n)$ de SCM é simples de ser calculada. Como no último exemplo,

$$T(n) = \begin{cases} \Theta(1), & n = 1 \\ T(n-1) + \Theta(1), & n > 1. \end{cases}$$

A solução desta recorrência é

$$\sum_1^n \Theta(1) = n\Theta(1) = \Theta(n).$$

Reforçar a hipótese de indução: preciso lembrar disso ...

Projeto por indução - Erros comuns

O que há de **errado** com o seguinte (esboço de um) algoritmo recursivo para verificar se um grafo conexo é bipartido?

- Sejam G um grafo conexo, v um vértice de G e considere o grafo $G' = G - \{v\}$.
- Se G' não for bipartido, então G também não é. Caso contrário, sejam A e B os dois conjuntos da bipartição de G' obtidos recursivamente.
- Considere agora o vértice v e sua relação com os vértices de A e B .
- Se v tiver um vizinho em A e outro em B , então G não é bipartido (já que a bipartição, se existir, deve ser única).
- Caso contrário, adicione v a A ou B , o conjunto no qual v não tem vizinhos. A bipartição está completa.

Projeto por indução - Erros comuns

Os erros discutidos nas provas por indução, naturalmente, traduzem-se em erros no projeto de um algoritmo por indução.

Exemplo:

Problema: Dado um grafo conexo G , verificar se G é bipartido ou não. Caso seja, devolver a partição dos vértices.

Definição:

Um grafo é *bipartido* se seu conjunto de vértices pode ser particionado em dois conjuntos, de forma que toda aresta de G tenha extremos em conjuntos diferentes.

Teorema:

Se G é conexo e bipartido, então a bipartição é única.