MO417 — Complexidade de Algoritmos I

Cid Carvalho de Souza Cândida Nunes da Silva
Orlando Lee

29 de setembro de 2008

Algoritmos gulosos

Algoritmos Gulosos: Conceitos Básicos

- Tipicamente algoritmos gulosos são utilizados para resolver problemas de **otimização**.
- Uma característica comum dos problemas onde se aplicam algoritmos gulosos é a existência **subestrutura ótima**, semelhante à programação dinâmica!
- Programação dinâmica: tipicamente os subproblemas são resolvidos à otimalidade **antes** de se proceder à escolha de um elemento que irá compor a solução ótima.
- Algoritmo Guloso: primeiramente é feita a escolha de um elemento que irá compor a solução ótima e só **depois** um subproblema é resolvido.

Algoritmos Gulosos: Conceitos Básicos

- Um algoritmo guloso sempre faz a escolha que parece ser a *"melhor"* a cada iteraçãousando um **critério guloso**.
  É uma decisão **localmente** ótima.
- Propriedade da **escolha gulosa**: garante que a cada iteração é tomada uma decisão que irá levar a um ótimo global.
- Em um algoritmo guloso uma escolha que foi feita **nunca é revista**, ou seja, não há qualquer tipo de *backtracking*.
- Em geral é fácil projetar ou descrever um algoritmo guloso. O **difícil** é provar que ele funciona!

Seleção de Atividades

- $S = \{a_1, \ldots, a_n\}$: conjunto de n atividades que podem ser executadas em um mesmo local. Exemplo: palestras em um auditório.
- Para todo $i = 1, \ldots, n$, a atividade a_i começa no instante s_i e termina no instante f_i, com $0 \leq s_i < f_i < \infty$.
  Ou seja, supõe-se que a atividade a_i será executada no intervalo de tempo (semi-aberto) $[s_i, f_i)$.

Definição

As atividades a_i e a_j são ditas **compatíveis** se os intervalos $[s_i, f_i)$ e $[s_j, f_j)$ são disjuntos.

Problema de Seleção de Atividades

Encontre em S um subconjunto de atividades mutuamente compatíveis que tenha tamanho **máximo**.

Seleção de Atividades

- Exemplo:

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
s_i	1	3	0	4	3	5	6	8	8	2	12
f_i	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14

- Pares de atividades incompatíveis: (a_1, a_2), (a_1, a_3)
  Pares de atividades compatíveis: (a_1, a_4), (a_4, a_8)
- Conjunto **maximal** de atividades compatíveis: (a_3, a_9, a_{11}).
- Conjunto **máximo** de atividades compatíveis: (a_1, a_4, a_8, a_{11}).

As atividades estão ordenadas em ordem crescente de intantes de término! Isso será importante mais adiante.

Seleção de Atividades

- Vimos que tanto os algoritmos gulosos quanto aqueles que usam programação dinâmica valem-se da existência da propriedade de subestrutura ótima.
- Inicialmente verificaremos que o problema da seleção de atividades tem esta propriedade e, então, projetaremos um algoritmo por programação dinâmica.
- Em seguida, mostraremos que há uma forma de resolver uma quantidade consideravelmente menor de subproblemas do que é feito na programação dinâmica.
- Isto será garantido por uma **propriedade de escolha gulosa**, a qual dará origem a um algoritmo guloso.
- Este processo auxiliará no entendimento da diferença entre estas duas técnicas de projeto de algoritmos.

Seleção de Atividades

Suponha que $f_1 \leq f_2 \leq \ldots \leq f_n$, ou seja, as atividades estão ordenadas em ordem crescente de instantes de término.

Definição

Denote $S_{ij} = \{a_k \in S : f_i \leq s_k < f_k \leq s_j\}$, ou seja, S_{ij} é o conjunto de atividades que começam depois do término de a_i e terminam antes do início de a_j.

- Atividades artificiais: a_0 com $f_0 = 0$ e a_{n+1} com $s_{n+1} = \infty$
- Tem-se que $S = S_{0,n+1}$ e, com isso, S_{ij} está bem definido para qualquer par (i, j) tal que $0 \leq i, j \leq n + 1$.
- Note que $S_{ij} = \emptyset$ para todo $i \geq j$.
  Por quê?

Seleção de Atividades

- **Subestrutura ótima**: considere o *subproblema* da seleção de atividades definido sobre S_{ij}. Suponha que a_k pertence a uma solução ótima de S_{ij}.

  Como $f_i \leq s_k < f_k \leq s_j$, uma solução ótima para S_{ij} que contenha a_k será composta pelas atividades de uma solução ótima de S_{ik}, pelas atividades de uma solução ótima de S_{kj} e por a_k.
  Por quê?

Seleção de Atividades

- **Definição**: para todo $0 \leq i, j \leq n+1$, seja $c[i,j]$ o valor ótimo do problema de seleção de atividades para a instância S_{ij}.
- Deste modo, o valor ótimo do problema de seleção de atividades para instância $S = S_{0,n+1}$ é $c[0, n+1]$.
- **Fórmula de recorrência**:

$$c[i,j] = \begin{cases} 0 & \text{se } S_{ij} = \emptyset \\ \max\limits_{i<k<j : a_k \in S_{ij}} \{c[i,k] + c[k,j] + 1\} & \text{se } S_{ij} \neq \emptyset \end{cases}$$

  Agora é fácil escrever o algoritmo de programação dinâmica. (Exercício.)

Seleção de Atividades

Podemos "converter" o algoritmo de programação dinâmica em um algoritmo guloso se notarmos que o primeiro resolve subproblemas desnecessariamente.

Teorema: (escolha gulosa)

Considere o subproblema definido para uma instância não-vazia S_{ij}, e seja a_m a atividade de S_{ij} com o menor tempo de término, i.e.:

$$f_m = \min\{f_k : a_k \in S_{ij}\}.$$

Então **(a)** existe uma solução ótima para S_{ij} que contém a_m e **(b)** S_{im} é vazio e o subproblema definido para esta instância é trivial, portanto, a escolha de a_m deixa apenas um dos subproblemas com solução possivelmente não-trivial, já que S_{mj} pode não ser vazio.

Seleção de Atividades

Método geral para provar que uma algoritmo guloso funciona

- Mostre que o problema tem subestrutura ótima.
- Mostre que se a foi a primeira escolha do algoritmo, então **existe** alguma solução ótima que contém a. Segue então por indução e pela subestrutura ótima que o algoritmo sempre faz escolhas corretas.

Seleção de Atividades

Vou mostrar que existe uma solução ótima para $S = S_{0,n+1}$ que contém a_m.

Seja A um conjunto de atividades mutuamente compatíveis de tamanho máximo em S_{ij}. Se $a_m \in A$ então nada há a fazer. Suponha então que $a_m \notin A$.

Seja $a_k \in A$ com menor f_k. Seja $A' = A - \{a_k\} \cup \{a_m\}$. Então A' também é conjunto de atividades mutuamente compatíveis de tamanho máximo. (Por quê?)

Este parece ser um truque importante: modificar uma solução ótima "*genérica*" e obter uma solução ótima com a(s) escolha(s) gulosa(s). Tenho que me lembrar disso.

Seleção de Atividades

Usando o teorema anterior, um modo simples de projetar um algoritmo seria o seguinte:

- Suponha que estamos tentando resolver S_{ij}.
- Determine a atividade a_m com menor tempo de término em S_{ij}.
- Resolva o subproblema S_{mj} e junte a_m à solução obtida na recursão. Devolva este conjunto de atividades.

Seleção de Atividades

SelecAtivGulRec(s, f, i, j)

▷ **Entrada:** vetores s e f com instantes de início e término das atividades $a_i, a_{i+1}, \ldots, a_j$, sendo $f_i \leq \ldots \leq f_j$.
▷ **Saída:** conjunto de tamanho máximo de índices de atividades mutuamente compatíveis.

1. $m \leftarrow i + 1$;
   ▷ Busca atividade com menor tempo de término que está em S_{ij}
2. **enquanto** $m < j$ **e** $s_m < f_i$ **faça** $m \leftarrow m + 1$;
3. **se** $m \geq j$ **então devolva** $\emptyset$;
4. **senão**
5. **se** $f_m > s_j$ **então devolva** $\emptyset$; ▷ $a_m \notin S_{ij}$
6. **senão devolva** $\{a_m\} \cup$ SelecAtivGulRec(s, f, m, j).

Seleção de Atividades

- A chamada inicial será *SelecAtivGulRec*$(s, f, 0, n + 1)$.
- **Complexidade**: $\Theta(n)$.
  Ao longo de todas as chamadas recursivas,cada atividade é examinada exatamente uma vez no laço da linha 2. Em particular, a atividade a_k é examinada na última chamada com $i < k$.
- Como o algoritmo anterior é um caso simples de recursão caudal, é trivial escrever uma versão iterativa do mesmo.

Seleção de Atividades

SelecAtivGulIter(s, f, n)

▷ **Entrada:** vetores s e f com instantes de início e término das n atividades com os instantes de término em ordem crescente.
▷ **Saída:** um conjunto A de tamanho máximo contendo atividades mutuamente compatíveis.

1. $A \leftarrow \{a_1\}$;
2. $i \leftarrow 1$;
3. **para** $m \leftarrow 2$ **até** n **faça**
4. **se** $s_m \geq f_i$ **então**
5. $A \leftarrow A \cup \{a_m\}$;
6. $i \leftarrow m$;
7. **devolva** A.

Seleção de Atividades

- Observe que na linha 3, i é o índice da última atividade colocada em A. Como as atividades estão em ordenadas pelo instante de término, tem-se que:

$$f_i = \max\{f_k : a_k \in A\},$$

ou seja, f_i é sempre o maior instante de término de uma atividade em A.

- Pode-se concluir que o algoritmo faz as mesmas escolhas de *SelecAtivGulRec* e portanto, está correto.
- **Complexidade**: $\Theta(n)$.

Códigos de Huffman

- Códigos de Huffman: técnica de compressão de dados.
- Reduções no tamanho dos arquivos dependem das características dos dados contidos nos mesmos. Valores típicos oscilam entre 20 e 90%.
- Exemplo: arquivo texto contendo 100.000 caracteres no alfabeto $\Sigma = \{a, b, c, d, e, f\}$. As *freqüências* de cada caracter no arquivo são indicadas na tabela abaixo.

	a	b	c	d	e	f
Freqüência (em milhares)	45	13	12	16	9	5
Código de tamanho fixo	000	001	010	011	100	101
Código de tamanho variável	0	101	100	111	1101	1100

- Codificação do arquivo: representar cada caracter por uma seqüência de *bits*
- Alternativas:
  1. seqüências de tamanho fixo.
  2. seqüências de tamanho variável.

Códigos de Huffman

- Qual o tamanho (em *bits*) do arquivo comprimido usando os códigos acima ?
- Códigos de tamanho fixo: $3 \times 100.000 = 300.000$
  Códigos de tamanho variável:

$$(\underbrace{45 \times 1}_{a} + \underbrace{13 \times 3}_{b} + \underbrace{12 \times 3}_{c} + \underbrace{16 \times 3}_{d} + \underbrace{9 \times 4}_{e} + \underbrace{5 \times 4}_{f}) \times 1.000 = 224.000$$

Ganho de $\approx 25\%$ em relação à solução anterior.

Problema da Codificação:

Dadas as freqüências de ocorrência dos caracteres de um arquivo, encontrar as seqüências de *bits* (códigos) para representá-los de modo que o arquivo comprimido tenha tamanho mínimo.

Códigos de Huffman

Definição:

Códigos livres de prefixo são aqueles onde, dados dois caracteres quaisquer i e j representados pela codificação, a seqüência de *bits* associada a i **não** é um *prefixo* da seqüência associada a j.

Importante:

Pode-se provar que sempre **existe** uma solução ótima do problema da codificação que é dado por um código *livre de prefixo*.

Códigos de Huffman – codificação

O processo de codificação, i.e, de geração do arquivo comprimido é sempre fácil pois reduz-se a concatenar os códigos dos caracteres presentes no arquivo original em seqüência.

Exemplo: usando a codificação de tamanho variável do exemplo anterior, o arquivo original dado por `abc` seria codificado por `0101100`.

Códigos de Huffman – decodificação

- A vantagem dos códigos livres de prefixo se torna evidente quando vamos decodificar o arquivo comprimido.
- Como nenhum código é prefixo de outro código, o código que se encontra no início do arquivo comprimido não apresenta ambigüidade. Pode-se simplesmente identificar este código inicial, traduzi-lo de volta ao caracter original e repetir o processo no restante do arquivo comprimido.
- Exemplo: usando a codificação de tamanho variável do exemplo anterior, o arquivo comprimido contendo os *bits* `001011101` divide-se de **forma unívoca** em `0 0 101 1101`, ou seja, corresponde ao arquivo original dado por *aabe*.

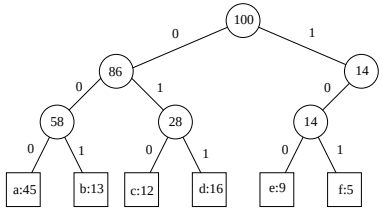
Códigos de Huffman

- Como representar de maneira conveniente uma codificação livre de prefixo de modo a facilitar o processo de decodificação?
- Solução: usar uma árvore binária.
  O filho esquerdo está associado ao *bit* ZERO enquanto o filho direito está associado ao *bit* UM. Nas folhas encontram-se os caracteres presentes no arquivo original.

Códigos de Huffman

Vejamos como ficam as árvores que representam os códigos do exemplo anterior.

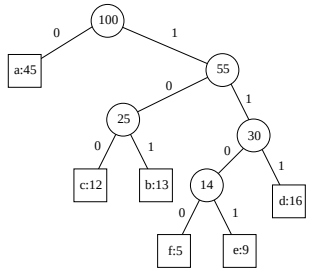
	a	*b*	*c*	*d*	*e*	*f*
Freqüência	45	13	12	16	9	5
Código fixo	000	001	010	011	100	101



Códigos de Huffman

Vejamos como ficam as árvores que representam os códigos do exemplo anterior.

	a	*b*	*c*	*d*	*e*	*f*
Freqüência	45	13	12	16	9	5
Código variável	0	101	100	111	1101	1100



Códigos de Huffman

- Pode-se mostrar (Exercício!) que uma codificação ótima sempre pode ser representada por uma árvore binária cheia, na qual cada vértice interno tem exatamente dois filhos.
- Então podemos restringir nossa atenção às árvores binárias cheias com $|C|$ folhas e $|C| - 1$ vértices internos (Exercício!), onde C é o conjunto de caracteres do alfabeto no qual está escrito o arquivo original.

Códigos de Huffman

Computando o tamanho do arquivo comprimido:

Se T é a árvore que representa a codificação, $d_T(c)$ é a profundidade da folha representado o caracter c e $f(c)$ é a sua freqüência, o tamanho do arquivo comprimido será dado por:

$$B(T) = \sum_{c \in C} f(c) d_T(c).$$

Dizemos que $B(T)$ é o **custo** da árvore T.
Isto é exatamente o tamanho do arquivo codificado.

Códigos de Huffman

- **Idéia do algoritmo de Huffman**: Começar com $|C|$ folhas e realizar sequencialmente $|C| - 1$ operações de "intercalação" de dois vértices da árvore.
  Cada uma destas intercalações dá origem a um novo vértice interno, que será o pai dos vértices que participaram da intercalação.
- A escolha do par de vértices que dará origem a intercalação em cada passo depende da soma das freqüências das folhas das subárvores com raízes nos vértices que ainda não participaram de intercalações.

Algoritmo de Huffman

Huffman(C)

▷ **Entrada:** Conjunto de caracteres C e as freqüências f dos caracteres em C.
▷ **Saída:** raiz de uma árvore binária representando uma codificação ótima livre de prefixos.

1. $n \leftarrow |C|$;
   ▷ Q é fila de prioridades dada pelas freqüências dos vértices ainda não intercalados
2. $Q \leftarrow C$;
3. **para** $i \leftarrow 1$ **até** $n - 1$ **faça**
4. **alocar novo registro** z; ▷ vértice de T
5. $z.esq \leftarrow x \leftarrow$ EXTRAI_MIN(Q);
6. $z.dir \leftarrow y \leftarrow$ EXTRAI_MIN(Q);
7. $z.f \leftarrow x.f + y.f$;
8. INSERE(Q, z);
9. **retorne** EXTRAI_MIN(Q).

Corretude do algoritmo de Huffman

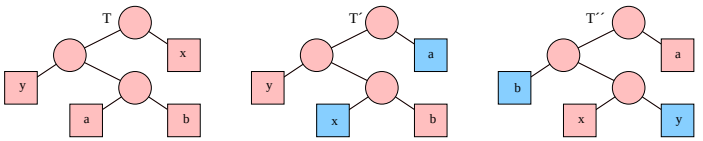
Lema 1: (escolha gulosa)

Seja C um alfabeto onde cada caracter $c \in C$ tem freqüência $f[c]$. Sejam x e y dois caracteres em C com as **menores** freqüências. Então, existe **um** código ótimo livre de prefixo para C no qual os códigos para x e y tem o mesmo comprimento e diferem apenas no último bit.

Prova do Lema 1:

- Seja T uma árvore **ótima**.
- Sejam a e b duas folhas "irmãs" (i.e. usadas em uma intercalação) mais profundas de T e x e y as folhas de T de menor freqüência.
- **Idéia:** a partir de T, obter uma outra árvore **ótima** T' com x e y sendo duas folhas "irmãs".

Corretude do algoritmo de Huffman



$$\begin{aligned} B(T) - B(T') &= \sum_{c \in C} f(c) d_T(c) - \sum_{c \in C} f(c) d_{T'}(c) \\ &= f[x] d_T(x) + f[a] d_T(a) - f[x] d_{T'}(x) - f[a] d_{T'}(a) \\ &= f[x] d_T(x) + f[a] d_T(a) - f[x] d_T(a) - f[a] d_T(x) \\ &= (f[a] - f[x])(d_T(a) - d_T(x)) \geq 0 \end{aligned}$$

Assim, $B(T) \geq B(T')$.
Analogamente $B(T') \geq B(T'')$.
Como T é ótima, T'' é ótima e o resultado vale. □

Corretude do algoritmo de Huffman

Lema 2: (subestrutura ótima)

Seja C um alfabeto com freqüência $f[c]$ definida para cada caracter $c \in C$. Sejam x e y dois caracteres de C com as menores freqüências. Seja C' o alfabeto obtido pela remoção de x e y e pela inclusão de um **novo** caracter z, ou seja, $C' = C \cup \{z\} - \{x, y\}$. As freqüências dos caracteres em $C' \cap C$ são as mesmas que em C e $f[z]$ é definida como sendo $f[z] = f[x] + f[y]$.
Seja T' uma árvore binária representado um código ótimo livre de prefixo para C'. Então a árvore binária T obtida de T' substituindo-se o vértice (folha) z pela por um vértice interno tendo x e y como fihos, representa uma código ótimo livre de prefixo para C.

Corretude do algoritmo de Huffman

Prova do Lema 2:

- Comparando os custos de T e T':
  - Se $c \in C - \{x, y\}$, $f[c]d_T(c) = f[c]d_{T'}(c)$.
  - $f[x]d_T(x) + f[y]d_T(y) = (f[x] + f[y])(d_{T'}(z) + 1) = f[z]d_{T'}(z) + (f[x] + f[y])$.
- Logo, $B(T') = B(T) - f[x] - f[y]$.
- Por contradição, suponha que existe T'' tal que $B(T'') < B(T)$.
  Pelo lema anterior, podemos supor que x e y são folhas "irmãs" em T''. Seja T''' a árvore obtida de T'' pela substituição de x e y por uma folha z com freqüência $f[z] = f[x] + f[y]$. O custo de T''' é tal que

$$B(T''') = B(T'') - f[x] - f[y] < B(T) - f[x] - f[y] = B(T'),$$

contradizendo a hipótese de que T' é uma árvore ótima para C'. □

Corretude do algoritmo de Huffman

Teorema:

O algoritmo de Huffman constrói um código ótimo (livre de prefixo).

Segue imediatamente dos Lemas 1 e 2.

Passos do projeto de algoritmos gulosos: resumo

1. Formule o problema como um **problema de otimização** no qual uma escolha é feita, restando-nos então resolver um único subproblema a resolver.
2. Provar que existe sempre uma solução ótima do problema que atende à **escolha gulosa**, ou seja, a escolha feita pelo algoritmo guloso é segura.
3. Demonstrar que, uma vez feita a escolha gulosa, o que resta a resolver é um subproblema tal que se combinarmos a resposta ótima deste subproblema com o(s) elemento(s) da escolha gulosa, chega-se à solução ótima do problema original.
   Esta é a parte que requer mais engenhosidade!
   Normalmente a prova começa com uma solução ótima *genérica* e a modificamos até que ela inclua o(s) elemento(s) identificados pela escolha gulosa.