PL e o Simplex

Eduardo C. Xavier

Instituto de Computação/Unicamp

15 de março de 2012

Revisado por Zanoni Dias

Algoritmo Simplex

- Vimos como opera o algoritmo Simplex.

$$\begin{array}{rrrrr} z = & 0 & +3x_1 & +x_2 & +2x_3 \\ x_4 = & 30 & -x_1 & -x_2 & -3x_3 \\ x_5 = & 24 & -2x_1 & -2x_2 & -5x_3 \\ x_6 = & 36 & -4x_1 & -x_2 & -2x_3 \end{array}$$

Algoritmo Simplex

- Achar variável em N com c_j positivo.
- Exemplo: x_1.

$$\begin{array}{rrrrr} z = & 0 & +3x_1 & +x_2 & +2x_3 \\ x_4 = & 30 & -x_1 & -x_2 & -3x_3 \\ x_5 = & 24 & -2x_1 & -2x_2 & -5x_3 \\ x_6 = & 36 & -4x_1 & -x_2 & -2x_3 \end{array}$$

- Calcula máximo incremento de x_1 satisfazendo restrição de não negatividade de x's básicas.

$$\Delta_4 = \frac{30}{1} = 30, \Delta_5 = \frac{24}{2} = 12 \text{ e } \Delta_6 = \frac{36}{4} = 9$$

Algoritmo Simplex

- Máximo incremento é 9 fazendo x_6 ser Não-Básica.

$$\begin{array}{rrrrr} z = & 0 & +3x_1 & +x_2 & +2x_3 \\ x_4 = & 30 & -x_1 & -x_2 & -3x_3 \\ x_5 = & 24 & -2x_1 & -2x_2 & -5x_3 \\ x_6 = & 36 & -4x_1 & -x_2 & -2x_3 \end{array}$$

$$\begin{array}{rrrrr} z = & 0 & +3x_1 & +x_2 & +2x_3 \\ x_4 = & 30 & -x_1 & -x_2 & -3x_3 \\ x_5 = & 24 & -2x_1 & -2x_2 & -5x_3 \\ x_1 = & \frac{36}{4} & -\frac{x_2}{4} & -\frac{2x_3}{4} & -\frac{x_6}{4} \end{array}$$

Algoritmo Simplex

- Realizamos o pivoteamento que é a substituição de x_1 nas demais equações.

$$
\begin{array}{llllll}
z = & 0 & +3x_1 & +x_2 & +2x_3 \\
x_4 = & 30 & -x_1 & -x_2 & -3x_3 \\
x_5 = & 24 & -2x_1 & -2x_2 & -5x_3 \\
x_1 = & \frac{36}{4} & -\frac{x_2}{4} & -\frac{2x_3}{4} & -\frac{x_6}{4}
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{lllll}
z = & 0 & +3(\frac{36}{4} - \frac{x_2}{4} - \frac{2x_3}{4} - \frac{x_6}{4}) & +x_2 & +2x_3 \\
x_4 = & 30 & -(\frac{36}{4} - \frac{x_2}{4} - \frac{2x_3}{4} - \frac{x_6}{4}) & -x_2 & -3x_3 \\
x_5 = & 24 & -2(\frac{36}{4} - \frac{x_2}{4} - \frac{2x_3}{4} - \frac{x_6}{4}) & -2x_2 & -5x_3 \\
x_1 = & \frac{36}{4} & -\frac{x_2}{4} & -\frac{2x_3}{4} & -\frac{x_6}{4}
\end{array}
$$

Algoritmo Simplex

$$
\begin{array}{lllll}
z = & 0 & +3(\frac{36}{4} - \frac{x_2}{4} - \frac{2x_3}{4} - \frac{x_6}{4}) & +x_2 & +2x_3 \\
x_4 = & 30 & -(\frac{36}{4} - \frac{x_2}{4} - \frac{2x_3}{4} - \frac{x_6}{4}) & -x_2 & -3x_3 \\
x_5 = & 24 & -2(\frac{36}{4} - \frac{x_2}{4} - \frac{2x_3}{4} - \frac{x_6}{4}) & -2x_2 & -5x_3 \\
x_1 = & \frac{36}{4} & -\frac{x_2}{4} & -\frac{2x_3}{4} & -\frac{x_6}{4}
\end{array}
$$

- Fazendo os cálculos teremos:

$$
\begin{array}{llllll}
z = & 27 & +\frac{x_2}{4} & +\frac{x_3}{2} & -\frac{3x_6}{4} \\
x_4 = & 21 & -\frac{3x_2}{4} & -\frac{5x_3}{2} & -\frac{x_6}{4} \\
x_5 = & 6 & -\frac{3x_2}{2} & -4x_3 & +\frac{x_6}{2} \\
x_1 = & 9 & -\frac{x_2}{4} & -\frac{x_3}{2} & -\frac{x_6}{4}
\end{array}
$$

Algoritmo Simplex

- O processo continua até não haver mais variáveis em N com $c_j > 0$:

$$
\begin{array}{llllll}
z = & 28 & -\frac{x_3}{6} & -\frac{x_5}{6} & -\frac{2x_6}{3} \\
x_4 = & 18 & -\frac{x_3}{2} & +\frac{x_5}{2} & \\
x_2 = & 4 & -\frac{8x_3}{3} & -\frac{2x_5}{3} & +\frac{x_6}{3} \\
x_1 = & 8 & +\frac{x_3}{6} & +\frac{x_5}{6} & -\frac{x_6}{3}
\end{array}
$$

- Ou descobrirmos que o PL é ilimitado, como, por exemplo, ao tentar trazer x_1 para base:

$$
\begin{array}{llll}
z = 0 & +3x_1 & +x_2 & +2x_3 \\
x_4 = 30 & +x_1 & -x_2 & -3x_3 \\
x_5 = 24 & +2x_1 & -2x_2 & -5x_3 \\
x_6 = 36 & +4x_1 & -x_2 & -2x_3
\end{array}
$$

Algoritmo Simplex

Vimos que partindo de um PL viável o Simplex a cada iteração:

1. Detecta se o problema é ilimitado.
2. Ou encontra uma solução básica viável maior ou igual que a anterior.

Lema

Dado um PL (A, b, c) viável, suponha que a chamada Initialize-Simplex retorna o PL na forma relaxada com uma solução inicial básica viável. Então se Simplex retorna "ilimitado" a solução do PL é ilimitada, e caso contrário Simplex retorna uma solução viável para o PL.

Algoritmo Simplex - Degenerescência

- O algoritmo Simplex faz vários pivoteamentos, tal que a cada iteração o valor de z nunca diminui.
- Existem porém situações em que após um pivoteamento o valor de z permanece igual.
- Este fenômeno é conhecido como **degenerescência**.
- Lembre-se que o valor de z é alterado no pivoteamento para um índice e, da variável de entrada com $c_e > 0$, segundo:

$$\hat{v} \leftarrow v + c_e \hat{b_e}$$

- Logo o valor de $\hat{v}$ é igual a v quando $\hat{b_e} = 0$ o que implica $b_l = 0$, já que $\hat{b_e} = b_l / a_{le}$ (note que $a_{le} > 0$ pela escolha do simplex).

Algoritmo Simplex - Degenerescência

Considere o exemplo:

$$\begin{array}{rrrrr} z = & 0 & +x_1 & +x_2 & +x_3 \\ x_4 = & 8 & -x_1 & -x_2 & \\ x_5 = & 0 & & +x_2 & -x_3 \end{array}$$

Escolhemos x_1 para entrar na base e x_4 para sair. Após o pivoteamento teremos:

$$\begin{array}{rrrrr} z = & 8 & & +x_3 & -x_4 \\ x_1 = & 8 & -x_2 & & -x_4 \\ x_5 = & 0 & +x_2 & -x_3 & \end{array}$$

Algoritmo Simplex - Degenerescência

$$\begin{array}{rrrrr} z = & 8 & & +x_3 & -x_4 \\ x_1 = & 8 & -x_2 & & -x_4 \\ x_5 = & 0 & +x_2 & -x_3 & \end{array}$$

Escolhemos x_3 para entrar na base e x_5 para sair.

$$\begin{array}{rrrrr} z = & 8 & +x_2 & -x_4 & -x_5 \\ x_1 = & 8 & -x_2 & -x_4 & \\ x_3 = & 0 & +x_2 & & -x_5 \end{array}$$

- A função objetivo não muda de valor!
- Mas o PL relaxado é diferente. Continuando, escolhemos x_2 para entrar na base e x_1 para sair, e então z aumenta de valor.

Algoritmo Simplex

- Não sabemos a princípio se o Simplex termina.
- Pode ser que o algoritmo permaneça em um ciclo de pivoteamentos em que o valor de z permanece o mesmo!
- Pode ocorrer que partindo de um PL relaxado X, fazemos alguns pivoteamentos em que z não muda de valor e voltamos novamente para X.
- Este fenômeno é chamado de **ciclagem**.

Algoritmo Simplex - Degenerescência

- Note que o algoritmo Simplex é executado somente se Initialize-Simplex detecta que o PL é viável.
- Se não ocorrer **ciclagem** o algoritmo necessariamente termina.

Algoritmo Simplex

Lema

Dado um conjunto B de variáveis básicas, o PL relaxado associado a B é único.

Lema

Se Simplex não termina em $\binom{n+m}{m}$ iterações então ele cicla.

- Pelo primeiro lema, cada base B determina unicamente um PL relaxado.
- Existem $n + m$ variáveis e cada base B é composta por m variáveis.
- Logo existem $\binom{n+m}{m}$ bases diferentes/PL's relaxados diferentes.
- Uma das bases corresponde a solução ótima e se o Simplex não termina após executar $\binom{n+m}{m}$ iterações então ele cicla.

Algoritmo Simplex - Degenerescência

- Ciclagem é muito raro mas pode acontecer.
- Para impedir a ciclagem existe uma regra para selecionar as variáveis que entram e saem da base.

Definição (Regra de Bland (1977))

1. *No Simplex escolha como variável de entrada 'e' aquela com valor $c_e > 0$ e índice mínimo.*
2. *No Simplex escolha como variável de saída 'l' aquela que minimiza Δ_i e caso haja empates, escolha a variável de menor índice.*

Lema

Utilizando a Regra de Bland, o algoritmo Simplex termina.

Algoritmo Simplex - Degenerescência

- Assumindo o uso da regra de Bland no Simplex, temos o seguinte resultado direto dos lemas anteriores:

Teorema

Assumindo que Initialize-Simplex retorna um PL relaxado com solução básica viável então o algoritmo Simplex termina com uma solução viável em no máximo $\binom{n+m}{m}$ iterações.

Dualidade

- Vimos que:
  - Se Initialize-Simplex retorna uma solução básica viável no PL relaxado então o algoritmo Simplex termina.
  - A solução devolvida por Simplex é viável.
- Porém não sabemos se a solução é ótima.
- Para provar que a solução devolvida por Simplex é ótima temos que estudar **dualidade**.

Dualidade

- Dado um PL na forma padrão de maximização.

$$
\begin{array}{lll}
\text{Max} & \sum_{j=1}^{n} c_j x_j & \\
\text{Restrito a:} & & \\
& \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \leq & b_i \text{ para } i = 1, \ldots, m \\
& x_j \geq & 0 \text{ para } j = 1, \ldots, n
\end{array}
$$

- Iremos criar um PL **dual** a este onde o objetivo é minimizar.
- Uma variável y para cada linha.
- Restrições passam a ser de maior igual.

Dualidade

Dado PL **primal**:

$$\begin{array}{lll} \text{Max} & \sum_{j=1}^{n} c_j x_j & \\ \text{Restrito a:} & & \\ & \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j & \leq & b_i \text{ para } i = 1, \ldots, m \\ & x_j & \geq & 0 \text{ para } j = 1, \ldots, n \end{array}$$

- O PL **dual** tem a forma:

$$\begin{array}{llll} \text{Min} & \sum_{i=1}^{m} b_i y_i & & \\ \text{Restrito a:} & & & \\ & \sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i & \geq & c_j \text{ para } j = 1, \ldots, n \\ & y_i & \geq & 0 \text{ para } i = 1, \ldots, m \end{array}$$

Dualidade

PL **primal**:

$$\begin{array}{llllll} \text{Max} & 3x_1 & +x_2 & +2x_3 & & \\ & x_1 & +x_2 & +3x_3 & \leq & 30 \\ & 2x_1 & +2x_2 & +5x_3 & \leq & 24 \\ & 4x_1 & +x_2 & +2x_3 & \leq & 36 \\ & x_1, & x_2, & x_3, & \geq & 0 \end{array}$$

E o correspondente PL **dual**:

$$\begin{array}{llllll} \text{Min} & 30y_1 & +24y_2 & +36y_3 & & \\ & y_1 & +2y_2 & +4y_3 & \geq & 3 \\ & y_1 & +2y_2 & +y_3 & \geq & 1 \\ & 3y_1 & +5y_2 & +2y_3 & \geq & 2 \\ & y_1, & y_2, & y_3, & \geq & 0 \end{array}$$

Dualidade

Teorema (Teorema Fraco da Dualidade)

Seja x uma solução viável para um PL na forma padrão e seja y uma solução viável para o correspondente dual do PL. Então

$$\sum_{j=1}^{n} c_j x_j \leq \sum_{i=1}^{m} b_i y_i.$$

- O valor da solução do PL dual de minimização é sempre maior ou igual a do PL primal de maximização para quaisquer soluções viáveis.

Dualidade

Corolário

Seja x uma solução viável de um PL **primal** *na forma padrão (A, b, c) e seja y uma solução viável para o correspondente programa linear* **dual** *tal que*

$$\sum_{j=1}^{n} c_j x_j = \sum_{i=1}^{m} b_i y_i.$$

Então x e y são soluções ótimas para os respectivos PLs.

Dualidade

- Iremos mostrar agora que quando o Simplex para de fazer pivoteamentos temos uma solução ótima para o PL.
- Veremos que a partir do último PL relaxado há como obter uma solução para o PL primal e para o dual.
- Tais soluções são viáveis e possuem os mesmos valores.

Dualidade

Suponha por exemplo o PL visto anteriormente.

$$
\begin{array}{llllll}
\text{Max} & 3x_1 & +x_2 & +2x_3 & & \\
 & x_1 & +x_2 & +3x_3 & \leq & 30 \\
 & 2x_1 & +2x_2 & +5x_3 & \leq & 24 \\
 & 4x_1 & +x_2 & +2x_3 & \leq & 36 \\
 & x_1, & x_2, & x_3, & \geq & 0
\end{array}
$$

Dualidade

Na forma relaxada temos:

$$\begin{array}{rlllll}
z = & 0 & +3x_1 & +x_2 & +2x_3 & \\
x_4 = & 30 & -x_1 & -x_2 & -3x_3 & \\
x_5 = & 24 & -2x_1 & -2x_2 & -5x_3 & \\
x_6 = & 36 & -4x_1 & -x_2 & -2x_3 & \\
 & x_1, x_2, & x_3, x_4, & x_5, x_6 & \geq & 0
\end{array}$$

Dualidade

Após todos pivoteamentos obtemos:

$$\begin{array}{rllll}
z = & 28 & -\frac{x_3}{6} & -\frac{x_5}{6} & -\frac{2x_6}{3} \\
x_4 = & 18 & -\frac{x_3}{2} & +\frac{x_5}{2} & \\
x_2 = & 4 & -\frac{8x_3}{3} & -\frac{2x_5}{3} & +\frac{x_6}{3} \\
x_1 = & 8 & +\frac{x_3}{6} & +\frac{x_5}{6} & -\frac{x_6}{3}
\end{array}$$

- A solução para o PL primal é $\bar{x} = (8, 4, 0)$ com valor 28, $B = \{1, 2, 4\}$ e $N = \{3, 5, 6\}$.

Dualidade

Um PL relaxado tem a forma genérica:

$$\begin{array}{lcll} z & = & v' + \sum_{j \in N} c'_j x_j & \\ x_i & = & b'_i - \sum_{j \in N} a'_{ij} x_j & \text{para cada } i \in B \end{array}$$

Podemos definir uma solução para o dual da seguinte forma:

$$\bar{y}_i = \begin{cases} -c'_{n+i} & \text{se } (n+i) \in N \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases}$$

Dualidade

Dado o primal

$$\begin{array}{llllll} z = & 28 & -\frac{x_3}{6} & -\frac{x_5}{6} & -\frac{2x_6}{3} \\ x_4 = & 18 & -\frac{x_3}{2} & +\frac{x_5}{2} & \\ x_2 = & 4 & -\frac{8x_3}{3} & -\frac{2x_5}{3} & +\frac{x_6}{3} \\ x_1 = & 8 & +\frac{x_3}{6} & +\frac{x_5}{6} & -\frac{x_6}{3} \end{array}$$

- Dado que $N = \{3, 5, 6\}$ temos que a solução para o PL dual é $(\bar{y}_1, \bar{y}_2, \bar{y}_3) = (0, -c'_5, -c'_6) = (0, 1/6, 2/3)$.

Dualidade

A solução para o PL primal é $\bar{x} = (8, 4, 0)$ com valor 28, $B = \{1, 2, 4\}$ e $N = \{3, 5, 6\}$.

$$\begin{array}{lllllll}
\text{Max} & 3x_1 & +x_2 & +2x_3 & & \\
& x_1 & +x_2 & +3x_3 & \leq & 30 \\
& 2x_1 & +2x_2 & +5x_3 & \leq & 24 \\
& 4x_1 & +x_2 & +2x_3 & \leq & 36 \\
& x_1, & x_2, & x_3, & \geq & 0
\end{array}$$

A solução para o PL dual é $(\bar{y_1}, \bar{y_2}, \bar{y_3}) = (0, -c'_5, -c'_6) = (0, 1/6, 2/3)$.

$$\begin{array}{lllllll}
\text{Min} & 30y_1 & +24y_2 & +36y_3 & & \\
& y_1 & +2y_2 & +4y_3 & \geq & 3 \\
& y_1 & +2y_2 & +y_3 & \geq & 1 \\
& 3y_1 & +5y_2 & +2y_3 & \geq & 2 \\
& y_1, & y_2, & y_3, & \geq & 0
\end{array}$$

Dualidade

$$\bar{y_i} = \begin{cases} -c_{n+i} & \text{se } (n+i) \in N \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases} \tag{1}$$

Teorema (Teorema Forte da Dualidade)

Suponha que o Simplex devolve $\bar{x} = (\bar{x_1}, \ldots, \bar{x_n})$ viável para um PL primal. Suponha o último PL relaxado, com N e B índices denotando variáveis não-básicas e básicas, c' os coeficientes deste último PL relaxado e seja $\bar{y} = (\bar{y_1}, \ldots, \bar{y_m})$ como definido pela equação 1. Então $\bar{x}$ e $\bar{y}$ são soluções ótimas para o PL primal e dual respectivamente.