PL e o Simplex

Eduardo C. Xavier

Instituto de Computação/Unicamp

15 de março de 2012

Revisado por Zanoni Dias

Programação Linear

Relembrando:

- Seja $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ um conjunto de variáveis reais.
- Seja $c = (c_1, c_2, \ldots, c_n)$ um vetor de números constantes.
- Uma função objetivo linear deve ter a forma $c \cdot x = \sum_{i=1}^{n} c_i x_i$.
- Podemos maximizar ou minimizar a função objetivo satisfazendo um conjunto de restrições lineares.

Programação Linear

Relembrando:

- Sejam $a_1, a_2, \ldots, a_m$ vetores de números constantes e de tamanho n.
- Sejam $b_1, b_2, \ldots, b_m$ números constantes.
- As restrições de um PL tem a forma:

$$
\begin{aligned}
a_1 \cdot x &\leq b_1 \\
a_2 \cdot x &\leq b_2 \\
\ldots &\ldots \\
\ldots &\ldots \\
a_m \cdot x &\leq b_m
\end{aligned}
$$

Programação Linear

Podemos ter $\leq$ ou $\geq$ ou $=$:

$$
\begin{aligned}
a_1 \cdot x &= b_1 \\
a_2 \cdot x &\leq b_2 \\
\ldots &= \\
\ldots &= \\
a_m \cdot x &\geq b_m
\end{aligned}
$$

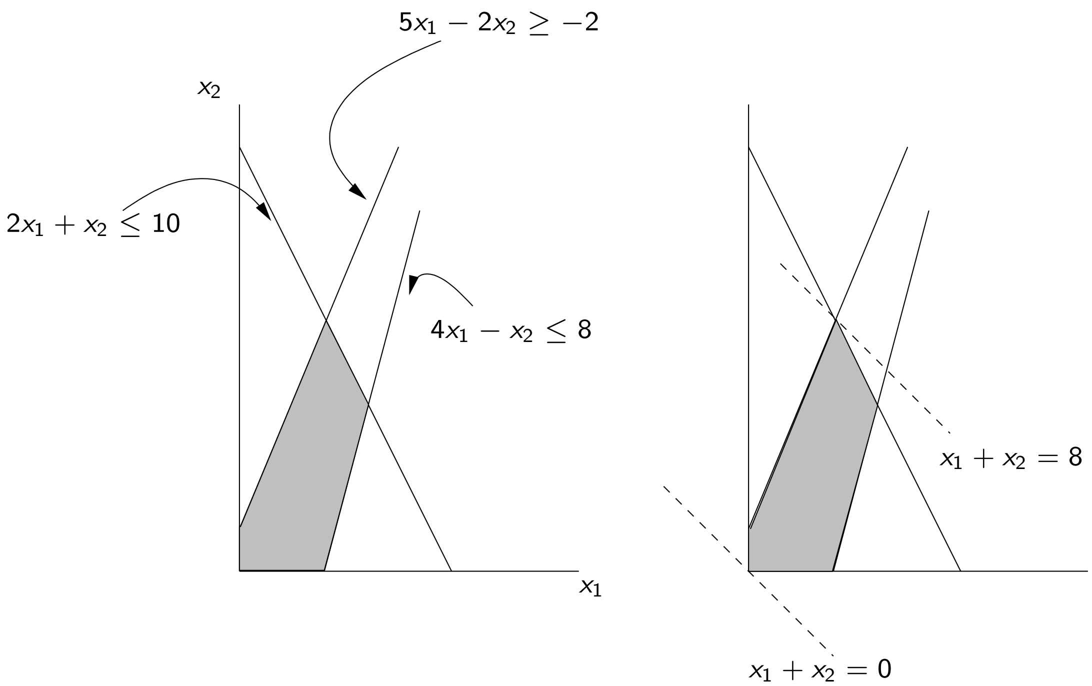
- Também é comum impor restrições de sinal sobre as variáveis: $x_i \geq 0$.
- Um programa linear consiste então em maximizar ou minimizar uma função objetivo satisfazendo o conjunto de restrições lineares.

Programação Linear

Considere como exemplo o seguinte PL:

$$
\begin{array}{lllll}
\text{Max} & x_1 & + & x_2 & \\
\text{Restrito a:} & & & & \\
 & 4x_1 & - & x_2 & \leq 8 \\
 & 2x_1 & + & x_2 & \leq 10 \\
 & 5x_1 & - & 2x_2 & \geq -2 \\
 & x_1 & , & x_2 & \geq 0
\end{array}
$$

Programação Linear

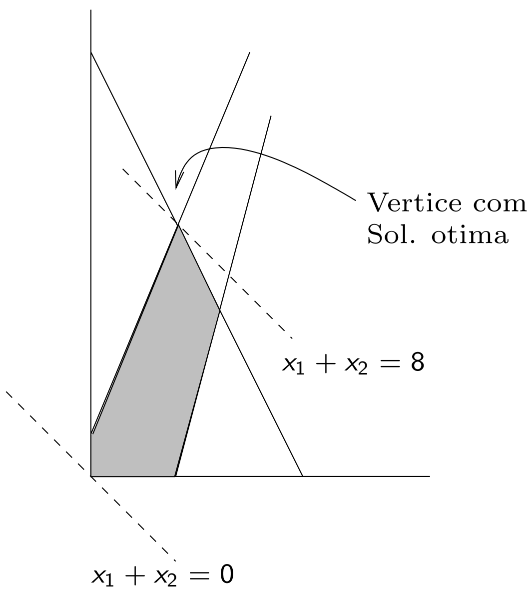


Programação Linear

- Qualquer solução que satisfaça as restrições é chamado **solução viável**.
- O conjunto de restrições definem uma região convexa chamada **região viável** (RV).
- Podemos por exemplo testar cada ponto da região viável e tomar aquele que maximize a **função objetivo**.
- Podemos resolver graficamente em 2D tentando achar o ponto em RV pertencente a reta $x_1 + x_2 = z$ perpendicular ao gradiente $< 1, 1 >$.

Programação Linear

- Note que ao tentarmos encontrar o maior valor de z tal que $x_1 + x_2 = z$ pertence a RV necessariamente chegaremos a borda de RV.
- Ou encontraremos a solução ótima em um vértice ou em um segmento de reta.



Programação Linear

- Consideramos PL em dimensões maiores do que 2.
- Neste caso a resolução gráfica não é tão simples.
- Mas podemos usar a mesma intuição:
  - Em 3D por exemplo as restrições correspondem a planos.
  - A interseção destes planos formará a região viável.
  - Podemos mover o plano da função objetivo na direção do gradiente até o limite da RV e encontrarmos a solução ótima em um vértice.
- Podemos considerar o espaço n-dimensional...

Programação Linear

- Veremos como funciona um algoritmo muito utilizado na prática para resolver tais sistemas.
- O algoritmo é conhecido como Simplex e apesar de ser muito rápido na prática, no pior caso (com instâncias bem específicas) é exponencial.
- Por muito tempo ficou em aberto a questão da existência de algoritmos polinomiais para PL.
  - O Simplex foi inventado em 1947 por Dantzig.
  - Em 1979 Khachian propôs o primeiro algoritmo polinomial, o Ellipsoid, que na prática é lento.
  - Em 1984 Karmarkar propôs um algoritmo polinomial que chega a ser competitivo com o Simplex (Algoritmo de Pontos Interiores).

Programação Linear

Forma Padrão de um PL:

- Um PL na forma padrão tem a seguinte forma:

$$
\begin{array}{lllll}
\text{Max} & \sum_{j=1}^{n} c_j x_j & & \\
\text{Restrito a:} & & & \\
& \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j & \leq & b_i \text{ para } i = 1, \dots, m \\
& x_j & \geq & 0 \text{ para } j = 1, \dots, n
\end{array}
$$

  onde c_j, a_{ij} e b_i são constantes.

- O PL possui n variáveis x_j, e $m + n$ restrições.
- As últimas n restrições são chamadas de **restrições de não negatividade**.

Programação Linear

É comum representar o PL anterior de forma sucinta:

$$
\begin{array}{llll}
\text{Max} & c^T x & & \\
\text{Restrito a:} & & & \\
& Ax & \leq & b \\
& x & \geq & 0
\end{array}
$$

onde c é um vetor de dimensão n com os valores c_j, A é uma matriz $m \times n$ com os coeficientes a_{ij} e b é um vetor de dimensão m com os valores b_i.

- Um PL pode ser **viável** com solução **limitada** ou **ilimitada**.
- Um PL pode ainda ser **inviável**, quando a interseção imposta pelas restrições é vazia.

Programação Linear

Qualquer PL pode ser colocado na forma padrão:

- Deixar a função objetivo como maximização:
  - Se for de minimização basta multiplicar por -1.
- Deixar todas as variáveis com restrições de não negatividade:
  - Trocar uma variável sem restrição de sinal por duas não negativas.
- Se houver restrições do tipo maior ou igual:
  - Multiplicar a restrição por -1.
- Se houver restrições com igualdade.
  - Trocar por duas restrições do tipo menor ou igual.
- Notem que tais modificações deixam o PL na forma padrão e é equivalente ao PL original.

Programação Linear

Qualquer PL pode ser colocado na forma padrão:

$$
\begin{array}{llcll}
\text{Min} & -2x_1 & + & 3x_2 & \\
\text{Restrito a:} & & & & \\
& x_1 & + & x_2 & = 7 \\
& x_1 & - & 2x_2 & \leq 4 \\
& 5x_1 & - & 2x_2 & \geq -2 \\
& x_1 & & & \geq 0
\end{array}
$$

Programação Linear

Multiplicar função objetivo por -1:

$$
\begin{array}{llcll}
\text{Max} & 2x_1 & - & 3x_2 & \\
\text{Restrito a:} & & & & \\
& x_1 & + & x_2 & = 7 \\
& x_1 & - & 2x_2 & \leq 4 \\
& 5x_1 & - & 2x_2 & \geq -2 \\
& x_1 & & & \geq 0
\end{array}
$$

Programação Linear

- Quando uma variável x_j não possui restrição de não negatividade:
  - Criamos duas novas variáveis x_j' e x_j''.
  - Trocamos todas as ocorrências de x_j por $(x_j' - x_j'')$.
  - Adicionamos restrições de não negatividade $x_j' \geq 0$ e $x_j'' \geq 0$.
- Notem que qualquer solução para o PL modificado corresponde a uma solução para o PL original fazendo $x_j = x_j' - x_j''$.

Programação Linear

$$\begin{array}{llllll}
\text{Max} & 2x_1 & - & 3x_2 & & \\
\text{Restrito a:} & & & & & \\
& x_1 & + & x_2 & = 7 & \\
& x_1 & - & 2x_2 & \leq 4 & \\
& 5x_1 & - & 2x_2 & \geq -2 & \\
& x_1 & & & \geq 0 &
\end{array}$$

x_2 não tem restrição de não-negatividade ($x_2 = (x_2' - x_2'')$):

$$\begin{array}{llllll}
\text{Max} & 2x_1 & - & 3x_2' & + & 3x_2'' \\
\text{Restrito a:} & & & & & \\
& x_1 & + & x_2' & - & x_2'' & = 7 \\
& x_1 & - & 2x_2' & + & 2x_2'' & \leq 4 \\
& 5x_1 & - & 2x_2' & + & 2x_2'' & \geq -2 \\
& x_1 & , & x_2' & , & x_2'' & \geq 0
\end{array}$$

Programação Linear

- Quando uma restrição é de igualdade:
  - Uma restrição $f(x) = b$ vale se e somente se $f(x) \geq b$ e $f(x) \leq b$ valem.
  - Portanto basta trocar uma restrição $f(x_1, \ldots, x_n) = b$ por duas:

$$f(x_1, \ldots, x_n) \geq b$$

$$f(x_1, \ldots, x_n) \leq b$$

Programação Linear

$$
\begin{array}{lccccccl}
\text{Max} & 2x_1 & - & 3x_2' & + & 3x_2'' & & \\
\text{Restrito a:} & & & & & & & \\
 & x_1 & + & x_2' & - & x_2'' & = 7 \\
 & x_1 & - & 2x_2' & + & 2x_2'' & \leq 4 \\
 & 5x_1 & - & 2x_2' & + & 2x_2'' & \geq -2 \\
 & x_1 & , & x_2' & , & x_2'' & \geq 0
\end{array}
$$

Tirando a igualdade da primeira restrição:

$$
\begin{array}{lccccccl}
\text{Max} & 2x_1 & - & 3x_2' & + & 3x_2'' & & \\
\text{Restrito a:} & & & & & & & \\
 & x_1 & + & x_2' & - & x_2'' & \geq 7 \\
 & x_1 & + & x_2' & - & x_2'' & \leq 7 \\
 & x_1 & - & 2x_2' & + & 2x_2'' & \leq 4 \\
 & 5x_1 & - & 2x_2' & + & 2x_2'' & \geq -2 \\
 & x_1 & , & x_2' & , & x_2'' & \geq 0
\end{array}
$$

Programação Linear

- Quando uma restrição é maior ou igual:
  - Uma restrição
    $$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \geq b_i$$
    é o mesmo que
    $$\sum_{j=1}^{n} -a_{ij}x_j \leq -b_i$$
  - Portanto basta multiplicar a restrição do tipo maior ou igual por -1.

Programação Linear

$$
\begin{array}{llllllll}
\text{Max} & 2x_1 & - & 3x_2' & + & 3x_2'' & \\
\text{Restrito a:} & & & & & & \\
 & x_1 & + & x_2' & - & x_2'' & \geq 7 \\
 & x_1 & + & x_2' & - & x_2'' & \leq 7 \\
 & x_1 & - & 2x_2' & + & 2x_2'' & \leq 4 \\
 & 5x_1 & - & 2x_2' & + & 2x_2'' & \geq -2 \\
 & x_1 & , & x_2' & , & x_2'' & \geq 0
\end{array}
$$

Aplicando na primeira e quarta restrições temos:

$$
\begin{array}{llllllll}
\text{Max} & 2x_1 & - & 3x_2' & + & 3x_2'' & \\
\text{Restrito a:} & & & & & & \\
 & -x_1 & - & x_2' & + & x_2'' & \leq -7 \\
 & x_1 & + & x_2' & - & x_2'' & \leq 7 \\
 & x_1 & - & 2x_2' & + & 2x_2'' & \leq 4 \\
 & -5x_1 & + & 2x_2' & - & 2x_2'' & \leq 2 \\
 & x_1 & , & x_2' & , & x_2'' & \geq 0
\end{array}
$$

Programação Linear

PL na forma com variáveis de folga (Forma Relaxada):

- Na resolução com o Simplex, um PL na forma padrão é transformado em um outro PL equivalente.
- Em tal PL todas as restrições menor ou igual são transformadas em restrições de igualdade.
- As restrições de não negatividade das variáveis continuam as mesmas.
- Dado uma restrição $\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \leq b_i$ criamos uma **variável de folga** $x_{n+i} \geq 0$ e trocamos a restrição para

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j + x_{n+i} = b_i$$

Programação Linear

PL na forma com variáveis de folga (Forma Relaxada):

- Como associamos uma variável de folga com cada restrição, é comum dar o nome de x_{n+i} para a variável de folga da i-ésima restrição.
- A variável x_{n+i} nos indica a folga existente entre o lado esquerdo da desigualdade e o lado direito.

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j + x_{n+i} = b_i$$

ou equivalentemente

$$x_{n+i} = b_i - \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j$$

Programação Linear

$$\begin{array}{llllllll}
\text{Max} & 2x_1 & - & 3x_2 & + & 3x_3 & \\
\text{Restrito a:} & & & & & & \\
& x_1 & + & x_2 & - & x_3 & \leq 7 \\
& -x_1 & - & x_2 & + & x_3 & \leq -7 \\
& x_1 & - & 2x_2 & + & 2x_3 & \leq 4 \\
& x_1 & , & x_2 & , & x_3 & \geq 0
\end{array}$$

Inserindo variáveis de folga x_4, x_5 e x_6:

$$\begin{array}{llllllllll}
\text{Max} & 2x_1 & - & 3x_2 & + & 3x_3 & & & & \\
\text{Restrito a:} & & & & & & & & & \\
& x_4 & = & 7 & - & x_1 & - & x_2 & + & x_3 \\
& x_5 & = & -7 & + & x_1 & + & x_2 & - & x_3 \\
& x_6 & = & 4 & - & x_1 & + & 2x_2 & - & 2x_3 \\
& x_1, & x_2, & x_3, & x_4, & x_5, & x_6 & & & \geq 0
\end{array}$$

Programação Linear

- No PL na forma relaxada, as variáveis do lado esquerdo da igualdade são chamadas de **variáveis básicas**.
- As variáveis do lado direito são chamadas **não básicas**.
- Nesta forma, em geral omite-se o termo maximização e denota-se a função objetivo por um valor z:

$$
\begin{array}{lllllll}
z & = & & 2x_1 & -3x_2 & +3x_3 \\
x_4 & = & 7 & -x_1 & -x_2 & +x_3 \\
x_5 & = & -7 & +x_1 & +x_2 & -x_3 \\
x_6 & = & 4 & -x_1 & +2x_2 & -2x_3 \\
 & & x_1, x_2, & x_3, x_4, & x_5, x_6 & \geq 0
\end{array}
$$