MC538/MC438: Análise de Algoritmos II

Turmas A/B – Profs. Cid C. de Souza e Zanoni Dias

Lista 2

31 de março de 2005

1. Considere o seguinte algoritmo para determinar se um grafo $G = (V, E)$, com $|V = n$ e $|E| = m$, tem uma clique de tamanho k. Primeiro são gerados todos os subconjuntos contendo exatamente k vértices. Existem $O(n^k)$ subconjuntos deste tipo. Em seguida, verifica-se se algum dos *grafos induzidos* por estes subconjuntos é completo, retornando `SIM` em caso afirmativo e `NÃO` caso contrário. Supondo que o grafo de entrada é dado pela sua lista de adjacências, determine a complexidade deste algoritmo. Por quê ele não é uma prova de que $\mathcal{P}$=$\mathcal{NP}$.

2. Escreva a instância de entrada do problema `3SAT` obtida através da redução do problema `SAT` vista em aula quando a instância de entrada deste último problema é dada por:

$$F = (x + y + \overline{z} + w + u + \overline{z}) \cdot (\overline{x} + \overline{y} + z + \overline{w} + u + v) \cdot (x + \overline{y} + \overline{z} + w + u + \overline{v}) \cdot (x + \overline{y}).$$

3. Desenhe o grafo obtido da redução vista em aula do problema `SAT` para o problema `CLIQUE` quando a instância de entrada de `SAT` é dada por:

$$F = (x + \overline{y} + z) \cdot (\overline{x} + y + \overline{z}) \cdot (\overline{x} + y + z) \cdot (x + \overline{y} + \overline{z}).$$

4. Desenhe o grafo obtido da redução vista em aula do problema `3SAT` para o problema `3COLOR` quando a instância de entrada de `3SAT` é dada por:

$$F = (x + \overline{y} + z) \cdot (\overline{x} + y + \overline{z}) \cdot (\overline{x} + y + z).$$

5. Usando um dos problemas vistos em aula, prove que o problema a seguir é $\mathcal{NP}$-completo: dado um grafo $G = (V, E)$ e um inteiro k, determine se G contém uma árvore geradora T tal que todo vértice em T tenha grau $\leq k$.

6. Mostre que o problema de cobertura de vértices (`CV`) visto em aula permanece $\mathcal{NP}$-completo mesmo se <u>todos</u> os vértices do grafo tiverem grau **par**. *Sugestão*: use o problema `CV` original para fazer esta prova.

   Nota: prove que o número de vértices de grau ímpar em um grafo qualquer é sempre par. Use este fato na sua demonstração de que o problema acima é $\mathcal{NP}$-completo.

7. Considere o seguinte problema: dado um grafo não direcionado $G = (V, E)$ e dois parâmetros d e k inteiros não-negativos, determine se G contém um subgrafo *induzido* H com pelo menos k vértices tal que o grau de cada vértice em H seja $\leq d$.

   Prove que este problema é $\mathcal{NP}$-completo.

8. Seja F_{11} uma fórmula booleana na *forma normal conjuntiva* onde cada variável aparece exatamente uma vez como x e exatamente uma vez como $\overline{x}$. Encontre um algoritmo polinomial que determine se F_{11} pode se tornar verdadeira para alguma atribuição dos valores das variáveis <u>**ou**</u> mostre que este problema é $\mathcal{NP}$-completo.

9. Prove que a seguinte variação do problema `3SAT` chamada de `1-em-3SAT` é um problema $\mathcal{NP}$-completo. A entrada é a mesma do problema `3SAT` usual. O problema é determinar se existe ou não uma atribuição aos valores das variáveis que torne a fórmula verdadeira **mas** de modo que em cada cláusula haja **exatamente** uma única variável verdadeira.

10. Assuma que o problema do caminho hamiltoniano (`CaH`) para grafos não-direcionados é $\mathcal{NP}$-completo. Prove que o problema do ciclo hamiltoniano (`CiH`) para grafos não-direcionados é $\mathcal{NP}$-completo.

11. Considere o seguinte problema: dado um grafo não-direcionado G e dois vértices especiais s e t em G, determine se G contém um caminho hamiltoniano que comece em u e termine em v. Prove que não existe algoritmo determinístico polinomial para este problema, a menos que $\mathcal{P}$=$\mathcal{NP}$.

12. Mostre que o problema da mochila é $\mathcal{NP}$-completo.

13. Mostre que o seguinte problema é $\mathcal{NP}$-difícil. Dado uma coleção de conjuntos $C = \{S_1, \ldots, S_k\}$ onde cada elemento $e \in S_i$, $0 \leq i \leq k$, possui tamanho $t(e)$ e valor $v(e)$. O problema consiste em escolher EXATAMENTE um elemento e de cada conjunto S_i, $0 \leq i \leq k$ tal que a soma dos tamanhos destes elementos seja no máximo K e a soma dos valores dos elementos seja maximizada.

14. Mostre que o problema a seguir é $\mathcal{NP}$-completo: Dado um grafo não direcionado G e um inteiro k determinar se G possui uma clique de tamanho k e um conjunto independente de tamanho k.