PL e o Simplex

Eduardo C. Xavier

Instituto de Computação/Unicamp

15 de março de 2012

Revisado por Zanoni Dias

Initialize-Simplex

- Vimos que **se** Initialize-Simplex retorna um PL relaxado com uma solução **inicial básica viável** então Simplex termina corretamente:
  - Simplex identifica se o PL é **ilimitado**.
  - Caso contrário Simplex devolve **solução ótima** em até $\binom{n+m}{m}$ iterações.
- Veremos como **Initialize-Simplex** detecta se o PL é viável e como retorna um primeiro PL relaxado válido para Simplex.

Initialize-Simplex

Considere o PL:

$$\begin{array}{lllllll} \text{Max} & 3x_1 & +x_2 & +2x_3 & & \\ & x_1 & +x_2 & +3x_3 & \leq & 30 \\ & 2x_1 & +2x_2 & +5x_3 & \leq & 24 \\ & 4x_1 & +x_2 & +2x_3 & \leq & 36 \\ & x_1, & x_2, & x_3, & \geq & 0 \end{array}$$

Solução básica do PL relaxado já é válida:

$$\begin{array}{llllll} z = & 0 & +3x_1 & +x_2 & +2x_3 & \\ x_4 = & 30 & -x_1 & -x_2 & -3x_3 & \\ x_5 = & 24 & -2x_1 & -2x_2 & -5x_3 & \\ x_6 = & 36 & -4x_1 & -x_2 & -2x_3 & \\ & x_1, x_2, & x_3, x_4, & x_5, x_6 & \geq & 0 \end{array}$$

Initialize-Simplex

Mas nem sempre é o caso:

$$\begin{array}{lllll} \text{Max} & 2x_1 & -x_2 & & \\ & 2x_1 & -x_2 & \leq & 2 \\ & x_1 & -5x_2 & \leq & -4 \\ & x_1, & x_2 & \geq & 0 \end{array}$$

A solução básica do PL relaxado inicial não é viável.

$$\begin{array}{llllll} z = & 0 & +2x_1 & -x_2 & & \\ x_3 = & 2 & -2x_1 & +x_2 & & \\ x_4 = & -4 & -x_1 & +5x_2 & & \\ x_1, & x_2, & x_3, & x_4 & \geq & 0 \end{array}$$

Initialize-Simplex

- Vamos construir um **PL auxiliar** para o PL original tal que:
  - O PL auxiliar sempre é viável.
  - A solução ótima do PL auxiliar determina se o PL original é viável.

Initialize-Simplex

PL na forma padrão:

$$\begin{array}{llll} \text{Max} \sum_{i=1}^{n} c_j x_j & & & \\ \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j & \leq & b_i & \text{para } i = 1, \ldots, m \\ x_j & \geq & 0 & \text{para } j = 1, \ldots, n \end{array}$$

PL auxiliar:

$$\begin{array}{llll} \text{Max} & -x_0 & & \\ \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j - x_0 & \leq & b_i & \text{para } i = 1, \ldots, m \\ x_j & \geq & 0 & \text{para } j = 0, \ldots, n \end{array}$$

Initialize-Simplex

$$\begin{array}{llllll} \text{Max} & 2x_1 & -x_2 & & & \\ & 2x_1 & -x_2 & & \leq & 2 \\ & x_1 & -5x_2 & & \leq & -4 \\ & x_1, & x_2 & & \geq & 0 \end{array}$$

PL auxiliar:

$$\begin{array}{llllll} \text{Max} & & & -x_0 & & \\ & 2x_1 & -x_2 & -x_0 & \leq & 2 \\ & x_1 & -5x_2 & -x_0 & \leq & -4 \\ & x_1, & x_2 & , x_0 & \geq & 0 \end{array}$$

Solução viável: $x_0 = |min_i(b_i)| = 4$, $x_1 = x_2 = 0$.

Initialize-Simplex

PL na forma padrão:

$$\begin{array}{llll} \text{Max} \sum_{i=1}^{n} c_j x_j & & & \\ \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j & \leq & b_i & \text{para } i = 1, \ldots, m \\ x_j & \geq & 0 & \text{para } j = 1, \ldots, n \end{array}$$

Lema (29.11)

Seja L um PL na forma padrão e seja L_{aux} o seguinte PL com $n+1$ variáveis utilizando os coeficientes de L:

$$\begin{array}{lllll} Max & -x_0 & & & \\ & \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j - x_0 & \leq & b_i & para\ i = 1, \ldots, m \\ & x_j & \geq & 0 & para\ j = 0, \ldots, n \end{array}$$

Então L é viável se e somente se o valor ótimo de L_{aux} é 0.

Initialize-Simplex

- O algoritmo InitializeSimplex cria o PL auxiliar para um PL padrão.
- O algoritmo então monta um PL relaxado para o PL auxiliar.
- Um pivoteamento entre x_0 e a variável de folga associada com a linha de menor b_i é então realizado.
- A partir de então temos um PL relaxado com solução viável para o PL auxiliar.
- Procede-se com a execução de Simplex até obtermos o ótimo do PL auxiliar.
  - Se $z = 0$ então o PL original é válido, e é fácil obter um PL relaxado com solução básica viável para este.
  - Se $z \neq 0$ então o PL original é inviável.

Initialize-Simplex

O PL abaixo, quando relaxado, não tem solução básica viável pois possui um b_i negativo.

$$
\begin{array}{lllll}
\text{Max} & 2x_1 & -x_2 & & \\
& 2x_1 & -x_2 & \leq & 2 \\
& x_1 & -5x_2 & \leq & -4 \\
& x_1, & x_2 & \geq & 0
\end{array}
$$

Criamos o PL auxiliar:

$$
\begin{array}{llllll}
\text{Max} & & & -x_0 & & \\
& 2x_1 & -x_2 & -x_0 & \leq & 2 \\
& x_1 & -5x_2 & -x_0 & \leq & -4 \\
& x_1, & x_2, & x_0 & \geq & 0
\end{array}
$$

Initialize-Simplex

Na forma relaxada temos:

$$
\begin{array}{rrrrr}
z = & & & & -x_0 \\
x_3 = & 2 & -2x_1 & +x_2 & +x_0 \\
x_4 = & -4 & -x_1 & +5x_2 & +x_0
\end{array}
$$

Fazemos então o pivoteamento inicial de x_0 com a variável básica associada à linha mais negativa:

$$
\begin{array}{rrrrr}
z = & -4 & -x_1 & +5x_2 & -x_4 \\
x_3 = & 6 & -x_1 & -4x_2 & +x_4 \\
x_0 = & 4 & +x_1 & -5x_2 & +x_4
\end{array}
$$

Initialize-Simplex

Agora temos uma solução básica viável e prosseguimos com a execução do algoritmo Simplex.

$$
\begin{array}{rrrrr}
z = & -4 & -x_1 & +5x_2 & -x_4 \\
x_3 = & 6 & -x_1 & -4x_2 & +x_4 \\
x_0 = & 4 & +x_1 & -5x_2 & +x_4
\end{array}
$$

Pivoteando x_2 com x_0 pois $\Delta_{\min} = \Delta_0 = \frac{4}{5}$:

$$
\begin{array}{rrrrr}
z = & & -x_0 & & \\
x_3 = & \frac{14}{5} & +\frac{4x_0}{5} & -\frac{9x_1}{5} & +\frac{x_4}{5} \\
x_2 = & \frac{4}{5} & -\frac{x_0}{5} & +\frac{x_1}{5} & +\frac{x_4}{5}
\end{array}
$$

Initialize-Simplex

Temos uma solução ótima com valor 0. Logo o PL original é viável.

$$
\begin{array}{rlllll}
z = & & -x_0 & & \\
x_3 = & \frac{14}{5} & +\frac{4x_0}{5} & -\frac{9x_1}{5} & +\frac{x_4}{5} \\
x_2 = & \frac{4}{5} & -\frac{x_0}{5} & +\frac{x_1}{5} & +\frac{x_4}{5}
\end{array}
$$

- Reestabelecemos a função objetivo original: $z = 2x_1 - x_2 = 2x_1 - (\frac{4}{5} - \frac{x_0}{5} + \frac{x_1}{5} + \frac{x_4}{5})$.
- Como $x_0 = 0$ temos $z = -\frac{4}{5} + \frac{9x_1}{5} - \frac{x_4}{5}$ e eliminamos x_0 das restrições.

$$
\begin{array}{rlll}
z = & -\frac{4}{5} & +\frac{9x_1}{5} & -\frac{x_4}{5} \\
x_3 = & \frac{14}{5} & -\frac{9x_1}{5} & +\frac{x_4}{5} \\
x_2 = & \frac{4}{5} & +\frac{x_1}{5} & +\frac{x_4}{5}
\end{array}
$$

Initialize-Simplex

```
Initialize-Simplex(A, b, c)
    Seja k o índice do menor b_i
    if b_k ≥ 0 then
        return ({1, 2, ..., n}, {n + 1, ..., n + m}, A, b, c, 0)
    else
        Monte L_aux adicionando −x_0 do lado esquerdo de cada
                restrição, e função objetivo z = −x_0
        Seja (N, B, A, b, c, v) a forma relaxada de L_aux
        l ← n + k
        (N, B, A, b, c, v) ← Pivot(N, B, A, b, c, v, l, 0)
        Execute Simplex até encontrar solução ótima
        if z = −x_0 = 0 then
            return último PL relaxado após remover x_0
        else
            return "inviável"
```

Initialize-Simplex

Lema

Se L é um PL inviável então Initialize-Simplex retorna "inviável". Se L é viável então Initialize-Simplex retorna um PL relaxado com solução básica viável.

A Se todos b_i's são ≥ 0 então o PL é viável e Initialize-Simplex retorna um PL relaxado com solução básica viável.

B Caso exista $b_j < 0$, L_{aux} é viável pois basta atribuir para x_0 o módulo do menor valor de b_i.

$$
\begin{array}{llll}
\text{Max} & -x_0 & & \\
& \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j - x_0 & \leq & b_i & \text{para } i = 1, \ldots, m \\
& x_j & \geq & 0 & \text{para } j = 0, \ldots, n
\end{array}
$$

B.1 Pelo Lema 29.11 se no final $z < 0$ então o PL original é inviável.

B.2 Caso $z = 0$ (o PL original é viável).

- O primeiro passo é fazer um pivoteamento de x_0 com x_k onde b_k é mínimo (mais negativo).
- O valor de x_0 após pivoteamento será

$$x_0 \leftarrow b_k / a_{k0} > 0$$

pois $b_k < 0$ e $a_{k0} = -1$.

- As demais básicas terão valor

$$x_i \leftarrow b_i - a_{i0}\frac{b_k}{a_{k0}} \geq 0$$

$$x_i \leftarrow b_i - b_k \geq 0$$

pois $a_{k0} = a_{i0} = -1$ e b_k é a mais negativa ($b_i \geq b_k$)

- Como todos os demais pivoteamentos sempre deixam o PL viável, ao fim da execução, quando $z = 0$, teremos um PL relaxado com solução básica inicial viável e $x_0 = 0 = z$.

Initialize-Simplex

Teorema (Teorema Fundamental da Programação Linear)

Qualquer programa linear L na forma padrão satisfaz uma das alternativas:

1. *Possui solução ótima com valor finito.*
2. *É ilimitado.*
3. *É inviável.*

Se L é inviável então Simplex devolve "inviável". Se L é viável e ilimitado então Simplex devolve "ilimitado"e caso L seja viável e limitado então Simplex devolve uma solução ótima com valor finito.

Complexidade

- Simplex (Dantzig, 1947):
  - Pivot: $O(nm)$
  - Simplex (usando a Regra de Bland, 1977): $O(\binom{n+m}{m} nm)$.
  - Pior caso: $\Omega(2^n nm)$ (Klee & Minty, 1972)
- Ellipsoid (Khachian, 1979): $O(n^6 LM)$.
- Algoritmo de Pontos Interiores (Karmarkar, 1984): $O(n^{3.5} LM)$.
- Onde:
  - L é o número de bits necessários para representar a entrada do programa linear.
  - M é o custo das operações aritméticas básicas (soma, subtração, multiplicação e divisão) em números de L bits. Usando Transformada Rápida de Fourier (FFT) temos que: $O(L \log L \log \log L)$.