PL e o Simplex

Eduardo C. Xavier

Instituto de Computação/Unicamp

25 de março de 2012

Revisado por Zanoni Dias

Simplex

- Quando temos o PL na forma relaxada é fácil ver que temos uma solução (não necessariamente viável):
  - As variáveis não-básicas (lado direito) são iguais a zero.
  - Cada variável básica x_i tem o correspondente valor b_i.
- Estas são chamadas **soluções básicas** e correspondem a um vértice do *simplex* (poliedro descrito pelas restrições).

Simplex

Dado PL na forma padrão:

$$
\begin{array}{llcccccl}
\text{Max} & 2x_1 & - & 3x_2 & + & 3x_3 & & \\
\text{Restrito a:} & & & & & & & \\
& x_1 & + & x_2 & - & x_3 & \leq 7 \\
& -x_1 & - & x_2 & + & x_3 & \leq -7 \\
& x_1 & - & 2x_2 & + & 2x_3 & \leq 4 \\
& x_1 & , & x_2 & , & x_3 & \geq 0
\end{array}
$$

Simplex opera sobre a forma relaxada:

$$
\begin{array}{llllllllll}
\text{Max} & 2x_1 & - & 3x_2 & + & 3x_3 & & & & \\
\text{Restrito a:} & & & & & & & & & \\
& x_4 & = & 7 & - & x_1 & - & x_2 & + & x_3 \\
& x_5 & = & -7 & + & x_1 & + & x_2 & - & x_3 \\
& x_6 & = & 4 & - & x_1 & + & 2x_2 & - & 2x_3 \\
& x_1, & x_2, & x_3, & x_4, & x_5, & x_6 & & & \geq 0
\end{array}
$$

Simplex

No geral, o PL na forma relaxada consiste em:

$$
\begin{array}{lllll}
z & = & v & + & \sum_{j \in N} c_j x_j \\
x_i & = & b_i & - & \sum_{j \in N} a_{ij} x_j \quad \text{para cada } i \in B
\end{array}
$$

- O **conjunto** N é o conjunto de índices das **variáveis não básicas** ($|N| = n$).
- O **conjunto** B é o conjunto de índices das **variáveis básicas** ($|B| = m$).
- Temos os coeficientes b_i, c_j e a_{ij} como antes e v é uma constante que indica o valor do PL para um dado B.
- O PL com variáveis de folga é definido pela tupla (N, B, A, b, c, v).

Programação Linear

$$\begin{array}{rclllll}
z & = & 28 & -\frac{x_3}{6} & -\frac{x_5}{6} & +\frac{2x_6}{3} \\
x_1 & = & 8 & +\frac{x_3}{6} & +\frac{x_5}{6} & -\frac{x_6}{3} \\
x_2 & = & 4 & -\frac{8x_3}{3} & -\frac{2x_5}{3} & +\frac{x_6}{3} \\
x_4 & = & 18 & -\frac{x_3}{2} & +\frac{x_5}{2} &
\end{array}$$

- $B = \{1, 2, 4\}$ e $N = \{3, 5, 6\}$.
- $c = (c_3\ c_4\ c_6) = (-1/6,\ -1/6,\ +2/3)$, $v = 28$.

$$A = \begin{pmatrix} a_{13} & a_{15} & a_{16} \\ a_{23} & a_{25} & a_{26} \\ a_{43} & a_{45} & a_{46} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1/6 & -1/6 & 1/3 \\ 8/3 & 2/5 & -1/3 \\ 1/2 & -1/2 & 0 \end{pmatrix}$$

$$b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ 4 \\ 18 \end{pmatrix}$$

Simplex

Idéia do Algoritmo:

- Transformar um PL na **forma relaxada** em outro PL equivalente na forma relaxada.
- A cada transformação o valor de z não pode diminuir.
- A transformação é feita aumentando-se o valor de uma variável não-básica.
- O valor de tal variável é aumentado até que alguma variável básica atinja o valor 0.

Simplex

Considere o PL na forma Padrão:

$$\begin{array}{lllll}
\text{Max} & 3x_1 & +x_2 & +2x_3 & & \\
& x_1 & +x_2 & +3x_3 & \leq & 30 \\
& 2x_1 & +2x_2 & +5x_3 & \leq & 24 \\
& 4x_1 & +x_2 & +2x_3 & \leq & 36 \\
& x_1, & x_2, & x_3, & \geq & 0
\end{array}$$

Simplex

Na forma relaxada temos:

$$\begin{array}{llllll}
z = & 0 & +3x_1 & +x_2 & +2x_3 & \\
x_4 = & 30 & -x_1 & -x_2 & -3x_3 & \\
x_5 = & 24 & -2x_1 & -2x_2 & -5x_3 & \\
x_6 = & 36 & -4x_1 & -x_2 & -2x_3 & \\
& x_1, x_2, & x_3, x_4, & x_5, x_6 & \geq & 0
\end{array}$$

- A solução básica é $(x_1, \ldots, x_6) = (0, 0, 0, 30, 24, 36)$ com $z = 0$.
- Note que x_1, x_2, x_3 se incrementados aumentam o z.
- Vamos incrementar x_1, mas quanto?
- x_4, x_5 e x_6 não podem ser negativas!

Simplex

$$\begin{array}{rlllll} z = & 0 & +3x_1 & +x_2 & +2x_3 & \\ x_4 = & 30 & -x_1 & -x_2 & -3x_3 & \\ x_5 = & 24 & -2x_1 & -2x_2 & -5x_3 & \\ x_6 = & 36 & -4x_1 & -x_2 & -2x_3 & \\ & x_1, x_2, & x_3, x_4, & x_5, x_6 & \geq & 0 \end{array}$$

- O máximo incremento de x_1 é 9, limitado pela terceira restrição.
- Fazendo x_1 básica e x_6 não básica teremos a restrição:

$$x_1 = 9 - x_2/4 - x_3/2 - x_6/4$$

Simplex

$$\begin{array}{rlllll} z = & 0 & +3x_1 & +x_2 & +2x_3 & \\ x_4 = & 30 & -x_1 & -x_2 & -3x_3 & \\ x_5 = & 24 & -2x_1 & -2x_2 & -5x_3 & \\ x_6 = & 36 & -4x_1 & -x_2 & -2x_3 & \\ & x_1, x_2, & x_3, x_4, & x_5, x_6 & \geq & 0 \end{array}$$

- Após substituir $x_1 = (9 - x_2/4 - x_3/2 - x_6/4)$ nas demais equações teremos um novo PL.
- Isto é conhecido como **pivoteamento:** escolhe-se uma variável não básica para entrar na base no lugar de uma variável básica que sairá da base.

$$\begin{array}{rlllll} z = & 0 & +3(\frac{36}{4} - \frac{x_2}{4} - \frac{2x_3}{4} - \frac{x_6}{4}) & +x_2 & +2x_3 \\ x_4 = & 30 & -(\frac{36}{4} - \frac{x_2}{4} - \frac{2x_3}{4} - \frac{x_6}{4}) & -x_2 & -3x_3 \\ x_5 = & 24 & -2(\frac{36}{4} - \frac{x_2}{4} - \frac{2x_3}{4} - \frac{x_6}{4}) & -2x_2 & -5x_3 \\ x_1 = & \frac{36}{4} & -\frac{x_2}{4} & -\frac{2x_3}{4} & -\frac{x_6}{4} \end{array}$$

Simplex

$$
\begin{array}{lllll}
z = & 0 & +3(\frac{36}{4} - \frac{x_2}{4} - \frac{2x_3}{4} - \frac{x_6}{4}) & +x_2 & +2x_3 \\
x_4 = & 30 & -(\frac{36}{4} - \frac{x_2}{4} - \frac{2x_3}{4} - \frac{x_6}{4}) & -x_2 & -3x_3 \\
x_5 = & 24 & -2(\frac{36}{4} - \frac{x_2}{4} - \frac{2x_3}{4} - \frac{x_6}{4}) & -2x_2 & -5x_3 \\
x_1 = & \frac{36}{4} & -\frac{x_2}{4} & -\frac{2x_3}{4} & -\frac{x_6}{4}
\end{array}
$$

- Após substituir $x_1 = (9 - x_2/4 - x_3/2 - x_6/4)$ nas demais equações teremos um novo PL.

$$
\begin{array}{lllll}
z = & 27 & +\frac{x_2}{4} & +\frac{x_3}{2} & -\frac{3x_6}{4} \\
x_4 = & 21 & -\frac{3x_2}{4} & -\frac{5x_3}{2} & -\frac{x_6}{4} \\
x_5 = & 6 & -\frac{3x_2}{2} & -4x_3 & +\frac{x_6}{2} \\
x_1 = & 9 & -\frac{x_2}{4} & -\frac{x_3}{2} & -\frac{x_6}{4}
\end{array}
$$

Simplex

$$
\begin{array}{lllll}
z = & 27 & +\frac{x_2}{4} & +\frac{x_3}{2} & -\frac{3x_6}{4} \\
x_4 = & 21 & -\frac{3x_2}{4} & -\frac{5x_3}{2} & -\frac{x_6}{4} \\
x_5 = & 6 & -\frac{3x_2}{2} & -4x_3 & +\frac{x_6}{2} \\
x_1 = & 9 & -\frac{x_2}{4} & -\frac{x_3}{2} & -\frac{x_6}{4}
\end{array}
$$

- Podemos aumentar o valor de z trazendo para a base x_2 ou x_3.
- Escolhemos x_3 e o máximo incremento é $3/2$, limitado pela segunda restrição.
- Após o pivoteamento teremos:

$$
\begin{array}{lllll}
z = & \frac{111}{4} & +\frac{x_2}{16} & -\frac{x_5}{8} & -\frac{11x_6}{16} \\
x_4 = & \frac{69}{4} & +\frac{3x_2}{16} & +\frac{5x_5}{8} & -\frac{x_6}{16} \\
x_3 = & \frac{3}{2} & -\frac{3x_2}{8} & -\frac{x_5}{4} & +\frac{x_6}{8} \\
x_1 = & \frac{33}{4} & -\frac{x_2}{16} & +\frac{x_5}{8} & -\frac{5x_6}{16}
\end{array}
$$

Simplex

$$\begin{aligned}
z &= \frac{111}{4} + \frac{x_2}{16} - \frac{x_5}{8} - \frac{11x_6}{16} \\
x_4 &= \frac{69}{4} + \frac{3x_2}{16} + \frac{5x_5}{8} - \frac{x_6}{16} \\
x_3 &= \frac{3}{2} - \frac{3x_2}{8} - \frac{x_5}{4} + \frac{x_6}{8} \\
x_1 &= \frac{33}{4} - \frac{x_2}{16} + \frac{x_5}{8} - \frac{5x_6}{16}
\end{aligned}$$

- Agora somente x_2 pode incrementar z.
- Note que a primeira restrição não impõe limite para o incremento de x_2
- A segunda restrição impõe o limite máximo de incremento.

Simplex

- O máximo de incremento para x_2 é 4, fazendo x_3 sair da base.
- Após o pivoteamento teremos:

$$\begin{aligned}
z &= 28 - \frac{x_3}{6} - \frac{x_5}{6} - \frac{2x_6}{3} \\
x_4 &= 18 - \frac{x_3}{2} + \frac{x_5}{2} \\
x_2 &= 4 - \frac{8x_3}{3} - \frac{2x_5}{3} + \frac{x_6}{3} \\
x_1 &= 8 + \frac{x_3}{6} + \frac{x_5}{6} - \frac{x_6}{3}
\end{aligned}$$

- Agora z não pode ser incrementada e o algoritmo para.
- Notem que a variável de folga mostra a folga existente na primeira restrição.

Algoritmo Pivoteamento

Abaixo e é o índice da variável que entra na base e l é o índice da que sai.

```
Pivot(N, B, A, b, c, v, l, e)
    b̂_e ← b_l / a_le
    for each j ∈ N − {e} do
        â_ej ← a_lj / a_le
    â_el ← 1 / a_le
    for each i ∈ B − {l} do
        b̂_i ← b_i − a_ie b̂_e
        for each j ∈ N − {e} do
            â_ij ← a_ij − a_ie â_ej
        â_il ← −a_ie â_el
    v̂ ← v + c_e b̂_e
    for each j ∈ N − {e} do
        ĉ_j ← c_j − c_e â_ej
    ĉ_l ← −c_e â_el
    N̂ ← N − {e} ∪ {l}
    B̂ ← B − {l} ∪ {e}
    return (N̂, B̂, Â, b̂, ĉ, v̂)
```


Algoritmo Pivoteamento

```
Pivot(N, B, A, b, c, v, l, e)
    b̂_e ← b_l / a_le
    for each j ∈ N − {e} do
        â_ej ← a_lj / a_le
    â_el ← 1 / a_le
```

$$\begin{array}{rcrrr} z = & 0 & +3x_1 & +x_2 & +2x_3 \\ x_4 = & 30 & -x_1 & -x_2 & -3x_3 \\ x_5 = & 24 & -2x_1 & -2x_2 & -5x_3 \\ x_6 = & 36 & -4x_1 & -x_2 & -2x_3 \end{array}$$

Para $e = 1, l = 6$

$$x_1 = \frac{36 - x_2 - 2x_3 - x_6}{4}$$

Algoritmo Pivoteamento

$$
\begin{array}{l}
\textbf{for each } i \in B - \{l\} \textbf{ do} \\
\quad \hat{b}_i \leftarrow b_i - a_{ie}\hat{b}_e \\
\quad \textbf{for each } j \in N - \{e\} \textbf{ do} \\
\quad\quad \hat{a}_{ij} \leftarrow a_{ij} - a_{ie}\hat{a}_{ej} \\
\quad \hat{a}_{il} \leftarrow -a_{ie}\hat{a}_{el}
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{rlllll}
z = & 0 & +3x_1 & +x_2 & +2x_3 \\
x_4 = & 30 & -x_1 & -x_2 & -3x_3 \\
x_5 = & 24 & -2x_1 & -2x_2 & -5x_3 \\
x_6 = & 36 & -4x_1 & -x_2 & -2x_3
\end{array}
$$

Para $e = 1, l = 6, i = 5$

$$x_5 = 24 - 2x_1 - 2x_2 - 5x_3$$

$$x_5 = 24 - 2(\frac{36 - x_2 - 2x_3 - x_6}{4}) - 2x_2 - 5x_3$$

$$x_5 = 24 - 18 - (2x_2 - 2x_2/4) - (5x_3 - 4x_3/4) + 2x_6/4$$

Algoritmo Pivoteamento

$$
\begin{array}{l}
\hat{v} \leftarrow v + c_e\hat{b}_e \\
\textbf{for each } j \in N - \{e\} \textbf{ do} \\
\quad \hat{c}_j \leftarrow c_j - c_e\hat{a}_{ej} \\
\hat{c}_l \leftarrow -c_e\hat{a}_{el}
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{rlllll}
z = & 0 & +3x_1 & +x_2 & +2x_3 \\
x_4 = & 30 & -x_1 & -x_2 & -3x_3 \\
x_5 = & 24 & -2x_1 & -2x_2 & -5x_3 \\
x_6 = & 36 & -4x_1 & -x_2 & -2x_3
\end{array}
$$

Para $e = 1, l = 6$

$$z = 0 + 3x_1 + x_2 + 2x_3$$

$$z = 0 + 3(\frac{36 - x_2 - 2x_3 - x_6}{4}) + x_2 + 2x_3$$

$$z = 27 + (x_2 - 3x_2/4) + (2x_3 - 6x_3/4) - 3x_6/4$$

Algoritmo Pivoteamento

Teorema

Seja uma chamada para Pivot(N, B, A, b, c, v, l, e) tal que $a_{le} \neq 0$. Seja $(\hat{N}, \hat{B}, \hat{A}, \hat{b}, \hat{c}, \hat{v})$ o retorno da chamada, e x' denota e solução básica após a chamada. Então

1. $x'_j = 0$ *para cada* $j \in \hat{N}$.
2. $x'_e = b_l / a_{le}$.
3. $x'_i = b_i - a_{ie}\hat{b}_e$ *para cada* $i \in \hat{B} - \{e\}$.

Algoritmo Simplex

- Vimos com um exemplo como o algoritmo simplex opera através de pivoteamentos.
- Na descrição do Simplex vamos assumir a existência de uma função:

$$\text{Initialize-Simplex}(A, b, c)$$

  que recebe um PL na forma padrão e
  1. Testa se o PL é viável.
  2. Se for viável retorna o PL na forma relaxada com uma solução básica inicial viável.

Algoritmo Simplex

```
Simplex(A, b, c)
    (N, B, A, b, c, v) ← Initialize-Simplex(A, b, c)
    while some index j ∈ N has c_j > 0 do
        choose index e ∈ N for which c_e > 0
        for each index i ∈ B do
            if a_ie > 0 then
                Δ_i ← b_i / a_ie
            else
                Δ_i ← ∞
        Choose an index l ∈ B that minimizes Δ_i
        if Δ_l = ∞ then
            return ilimitado
        else
            (N, B, A, b, c, v) ← Pivot(N, B, A, b, c, v, l, e)
    for i ← 1 to n do
        if i ∈ B then
            x_i ← b_i
        else
            x_i ← 0
    return (x_1, ..., x_n)
```


Algoritmo Simplex

```
    while some index j ∈ N has c_j > 0 do
        choose index e ∈ N for which c_e > 0
        for each index i ∈ B do
            if a_ie > 0 then
                Δ_i ← b_i / a_ie
            else
                Δ_i ← ∞
        Choose an index l ∈ B that minimizes Δ_i
```

$$\begin{array}{rrrrr} z = & 0 & +3x_1 & +x_2 & +2x_3 \\ x_4 = & 30 & -x_1 & -x_2 & -3x_3 \\ x_5 = & 24 & -2x_1 & -2x_2 & -5x_3 \\ x_6 = & 36 & -4x_1 & -x_2 & -2x_3 \end{array}$$

Para $e = 1$ pois $c_1 > 0$ temos:

$$\Delta_4 = \frac{30}{1} = 30, \Delta_5 = \frac{24}{2} = 12 \text{ e } \Delta_6 = \frac{36}{4} = 9$$

Algoritmo Simplex

```
for each index i ∈ B do
    if a_ie > 0 then
        Δ_i ← b_i / a_ie
    else
        Δ_i ← ∞
Choose an index l ∈ B that minimizes Δ_i
if Δ_l = ∞ then
    return ilimitado
else
    (N, B, A, b, c, v) ← Pivot(N, B, A, b, c, v, l, e)
```

$$
\begin{array}{rllll}
z = & 3x_1 & +x_2 & +2x_3 & \\
x_4 = & 30 & +x_1 & -x_2 & -3x_3 \\
x_5 = & 24 & +2x_1 & -2x_2 & -5x_3 \\
x_6 = & 36 & +4x_1 & -x_2 & -2x_3
\end{array}
$$

Para $e = 1$ temos

$$\Delta_l = \infty \text{ pois } a_{i1} \leq 0 \text{ para todo } i \in B$$

Algoritmo Simplex

Lema

Dado um PL (A, b, c) viável, suponha que a chamada Initialize-Simplex retorna o PL na forma relaxada com uma solução inicial básica viável. Então se Simplex retorna "ilimitado" a solução do PL é ilimitada, e caso contrário Simplex retorna uma solução viável para o PL.