Introdução à Programação Linear

Cid C. de Souza

Universidade Estadual de Campinas
Instituto de Computação

1^{o} semestre de 2012

Revisado por Zanoni Dias

Problemas de Otimização

- Variáveis: $x_1, x_2, \ldots, x_n$
- Função objetivo: $z = \min c(x_1, x_2, \ldots, x_n)$
- Restrições:

$$
\begin{aligned}
g_1(x_1, x_2, \ldots, x_n) &= b_1 \\
g_2(x_1, x_2, \ldots, x_n) &= b_2 \\
\ldots &= \ldots \\
g_m(x_1, x_2, \ldots, x_n) &= b_m \\
x \in X &\subseteq \mathbb{R}^n
\end{aligned}
$$

Exemplo 1:

José Velho está se preparando para se aposentar. Para garantir uma aposentadoria tranqüila, ele resolve aplicar suas economias em fundos de longo e médio prazos. As informações sobre os seis fundos de aplicação que ele achou mais atraentes no mercado estão tabeladas abaixo:

Fundo	Rendimento Anual	Período de Maturação	Classificação no Mercado
1	8.65%	11 anos	Excelente
2	9.50%	10 anos	Bom
3	10.00%	6 anos	Aceitável
4	8.75%	10 anos	Excelente
5	9.25%	7 anos	Bom
6	9.00%	13 anos	Muito bom

Exemplo 1: (cont.)

José dispõe de R$ 750.000,00 em economias. Para dar maior segurança ao investimento, José consultou um analista financeiro que lhe fez as seguintes recomendações:

- (i) não investir mais de 25% do dinheiro em um único fundo;
- (ii) pelo menos metade do dinheiro deveria ser investido em fundos de longo prazo, i.e., com mais de 10 anos de maturação;
- (iii) no máximo 35% do investimento deveria ser aplicado nos fundos com classificação inferior a "Muito bom".

Como José Velho deve aplicar o seu dinheiro de modo a maximizar o seu lucro anual?

Exemplo 1: formulação

- Variáveis: $x_i \doteq$ total investido no fundo i
- Função objetivo:
  $\max z = .0865x_1 + .095x_2 + .1x_3 + .0875x_4 + .0925x_5 + .09x_6$
- Restrição (i): $x_i \leq 187.500, \ \ i = 1, \ldots, 6$
- Restrição (ii): $x_1 + x_2 + x_4 + x_6 \geq 375.000$
- Restrição (iii): $x_2 + x_3 + x_5 \leq 262.500$
- Total investido: $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 = 750.000$
- Não negatividade: $x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6 \geq 0$

Exemplo 2:

A CPFL tem um plano de instalar uma usina termoelétrica em Paulínea. A maior dificuldade da empresa está em atender às exigências impostas pelas leis de proteção ambiental. Uma delas refere-se aos poluentes emitidos na atmosfera. O carvão necessário para aquecer as caldeiras deverá ser fornecido por três minas. As propriedades dos diferentes tipos de carvão produzidos em cada uma das minas estão indicadas na tabela abaixo. Os valores mostrados são relativos à queima de uma tonelada de carvão.

Mina	Enxofre (em ppm)	Poeira de Carvão (em Kg)	Vapor produzido (em Kg)
1–Morro Velho	1100	1.7	24000
2–Monjolo	3500	3.2	36000
3–Jabuticaba	1300	2.4	28000

Exemplo 2: (cont)

Os 3 tipos de carvão podem ser misturados e combinados em qualquer proporção. As emissões de poluentes e de vapor de uma mistura qualquer são proporcionais aos valores indicados na tabela. As exigências ambientais requerem que:

- (i) para cada tonelada de carvão queimada a quantidade de enxofre não deve ser superior a 2.500 `ppm`.
- (ii) para cada tonelada de carvão queimada a quantidade de poeira de carvão não deve ser superior a 2.8 `kg`

Os engenheiros querem determinar qual é a quantidade máxima de vapor (energia) que é possível gerar com a queima de uma tonelada de carvão.

Exemplo 2: formulação

- Variáveis:

  $x_1 \doteq$ proporção de carvão da mina Morro Velho
  $x_2 \doteq$ proporção de carvão da mina Monjolo
  $x_3 \doteq$ proporção de carvão da mina Jabuticaba
- Função objetivo: $\max z = 24000x_1 + 36000x_2 + 28000x_3$
- Restrição (i): (produção de enxofre)

  $1100x_1 + 3500x_2 + 1300x_3 \leq 2500$
- Restrição (ii): (emissão de poeira)

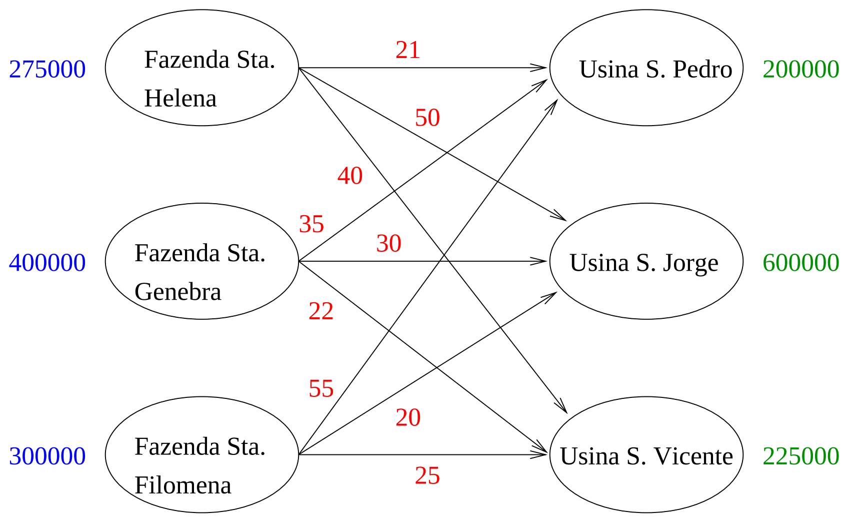
  $1.7x_1 + 3.2x_2 + 2.4x_3 \leq 2.8$
- Proporção da mistura: $x_1 + x_2 + x_3 = 1.0$
- Não negatividade: $x_1, x_2, x_3 \geq 0$

Exemplo 3:

O Grupo CanaBraba possui três fazendas com canaviais e três usinas de produção de alcool. Os administradores da empresa estão organizando a logística da colheita da cana para a safra deste ano.

O transporte da cana das fazendas para as usinas é terceirizado. O custo do quilômetro rodado por tonelada de cana transportada que é cobrado pela transportadora é fixo independente do trajeto realizado. A produção das fazendas e a capacidade de processamento das usinas, ambas dadas em toneladas, assim como as distâncias em quilômetros entre as fazendas e as usinas são esquematizadas a seguir.

Exemplo 3: (cont)



Qual deve ser a quantidade de cana transportada de cada fazenda para cada usina de modo a minimizar o custo total do transporte?

C. de Souza Introdução à PL

Exemplo 3: formulação

- Variáveis:

$$x_{ij} \doteq \begin{cases} \text{quantidade de cana transportada} \\ \text{da fazenda } i \text{ para a usina } j \end{cases}$$

- Função objetivo: $\min z = \sum_{i=1}^{3} \sum_{j=1}^{3} d_{ij} x_{ij}$
- Restrições de capacidades das usinas:

$$\begin{array}{ll} x_{11} + x_{21} + x_{31} \leq 200000 & \text{(Usina São Pedro)} \\ x_{12} + x_{22} + x_{32} \leq 600000 & \text{(Usina São Jorge)} \\ x_{13} + x_{23} + x_{33} \leq 225000 & \text{(Usina São Vicente)} \end{array}$$

Exemplo 3: formulação (cont)

- Escoamento da produção das fazendas:

$$\begin{array}{ll} x_{11} + x_{12} + x_{13} = 275000 & \text{(Fazenda Santa Helena)} \\ x_{21} + x_{22} + x_{23} = 400000 & \text{(Fazenda Santa Genebra)} \\ x_{31} + x_{32} + x_{33} = 300000 & \text{(Fazenda Santa Filomena)} \end{array}$$

- Não negatividade:

$$x_{ij} \geq 0 \text{ para todo } (i,j) \in \{1,2,3\} \times \{1,2,3\}$$

C. de Souza Introdução à PL

Programação Linear (PL)

Forma Padrão:

$$
\begin{aligned}
\max \quad & c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n \\
S.a. \quad & a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n \leq b_1 \\
& a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n \leq b_2 \\
& \ldots \\
& a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n \leq b_m \\
& x \in \mathbb{R}^n, x \geq 0
\end{aligned}
$$

Programação Linear (PL)

Forma Relaxada:

$$
\begin{aligned}
\max \quad & c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n \\
S.a. \quad & a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\
& a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\
& \ldots \\
& a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m \\
& x \in \mathbb{R}^n, x \geq 0
\end{aligned}
$$

Programação Linear (PL)

Forma Relaxada:

$$\begin{aligned}
\max \quad & c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n \\
S.a. \quad & a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\
& a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\
& \ldots \\
& a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m \\
& x \in \mathbb{R}^n, x \geq 0
\end{aligned}$$

Forma Matricial:

$\min\{cx : Ax = b, x \in \mathbb{R}^n_+\}$

$A : m \times n$, $c : 1 \times n$, $b : m \times 1$ e $x : n \times 1$.

Truques algébricos

1. $\min z \iff \max(-z)$
2. $ax \leq b \iff ax + s = b, s \geq 0$
3. $ax \geq b \iff ax - s = b, s \geq 0$
4. $ax = b \iff \begin{cases} ax \leq b, \\ ax \geq b. \end{cases}$
5. $x \in \mathbb{R} \iff \begin{cases} x = x' - x'', \\ x' \geq 0, \\ x'' \geq 0. \end{cases}$

- As variáveis $\underline{s}$ dos itens 2 e 3 acima são chamadas de *variáveis de folga*.
- Esses truques algébricos mostram que podemos transformar qualquer PL na forma padrão num PL na forma relaxada.

Hipóteses da PL

- Proporcionalidade: a contribuição de uma variável na função objetivo e numa restrição dobra se o valor da variável dobrar.
- Aditividade: as contribuições individuais das variáveis se somam na função objetivo e nas restrições e são independentes.
- Determinismo dos coeficientes: todos coeficientes dos vetores c e b assim como os elementos da matriz A são dados por constantes conhecidas.
- Divisibilidade: as variáveis podem ser divididas em qualquer fração. **(Não se verifica no caso de PL Inteira)**

PL Inteira: exemplo

Em uma plataforma marítima de petróleo, a inspeção das válvulas deve ser realizada 24 horas por dia. A inspeção é feita por equipes divididas em turnos de trabalho. Um período de trabalho é composto de 4 horas e um turno é composto de dois períodos de trabalho separados por um descanso também de 4 horas. Terminado o seu turno, a equipe descansa por 12 horas seguidas. No total, são seis turnos de trabalho cujos horários de trabalho ao longo do dia são mostrados na tabela a seguir.

Nem todas as válvulas da plataforma precisam ser inspecionadas em todos os períodos. Contudo, num período qualquer, deve haver um funcionário para cada válvula a ser inspecionada. O número de válvulas a inspecionar em cada período também é dado na tabela.

PL Inteira: exemplo (cont)

Turno	Período					
	24–04	04–08	08–12	12–16	16–20	20–24
1	$\surd$		$\surd$			
2		$\surd$		$\surd$		
3			$\surd$		$\surd$	
4				$\surd$		$\surd$
5	$\surd$				$\surd$	
6		$\surd$				$\surd$
Válvulas a inspecionar	6	7	15	9	13	10

Qual o número de mínimo funcionários necessário para montar as equipes de inspeção das válvulas?

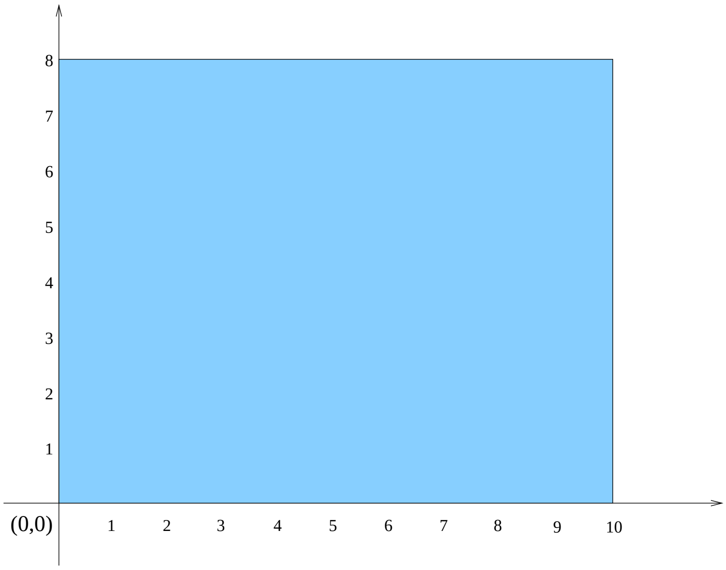
PLI: exemplo (formulação)

- Variáveis:
  $x_i \doteq$ número de funcionários no turno i
- Função objetivo: $\min z = x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6$
- Restrições de número de funcionários por turno:

$$
\begin{array}{llll}
x_1 + x_3 \geq 15 & \text{(período 08–12)} & x_2 + x_4 \geq 9 & \text{(período 12–16)} \\
x_3 + x_5 \geq 13 & \text{(período 16–20)} & x_4 + x_6 \geq 10 & \text{(período 20–24)} \\
x_1 + x_5 \geq 6 & \text{(período 24–04)} & x_2 + x_6 \geq 7 & \text{(período 04–08)}
\end{array}
$$

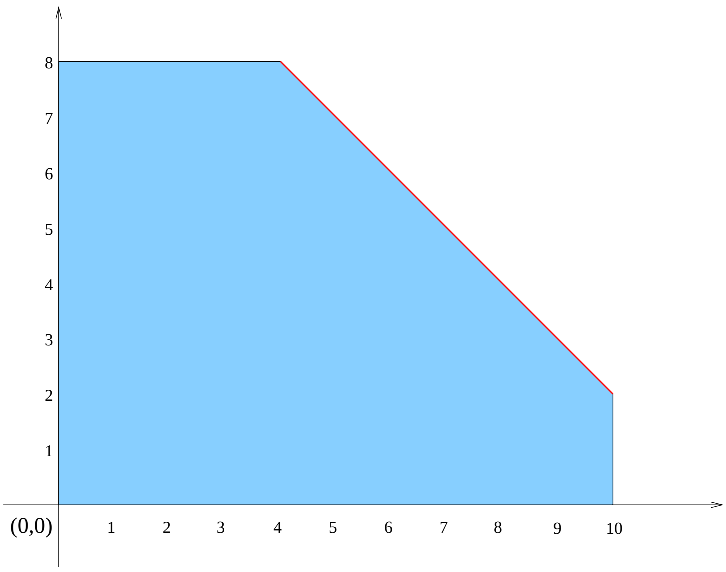
- Não negatividade: $x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6 \geq 0$
- Integralidade: $x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6 \in \mathbb{Z}$

PL: solução gráfica



- $x_1, x_2 \geq 0$

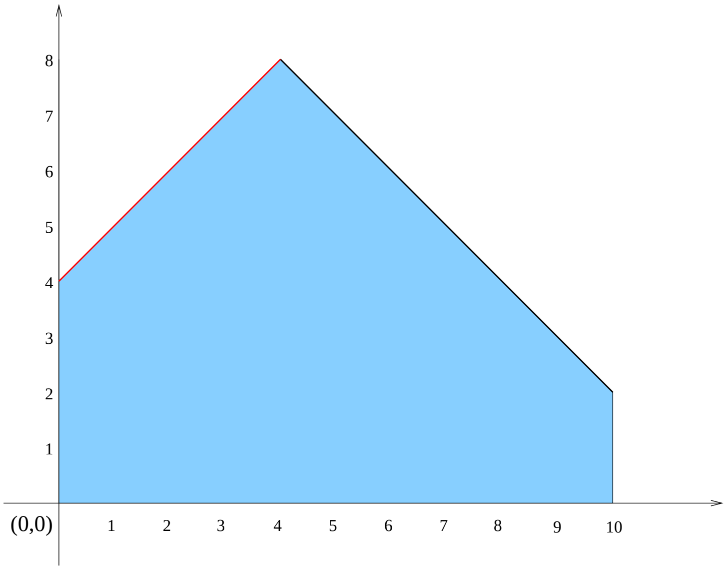
PL: solução gráfica



- $x_1, x_2 \geq 0$
- $x_1 + x_2 \leq 12$

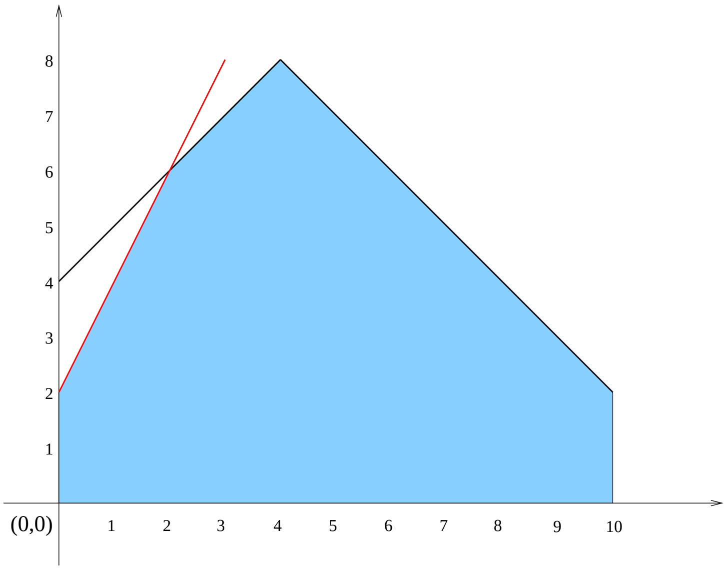
C. de Souza Introdução à PL

PL: solução gráfica



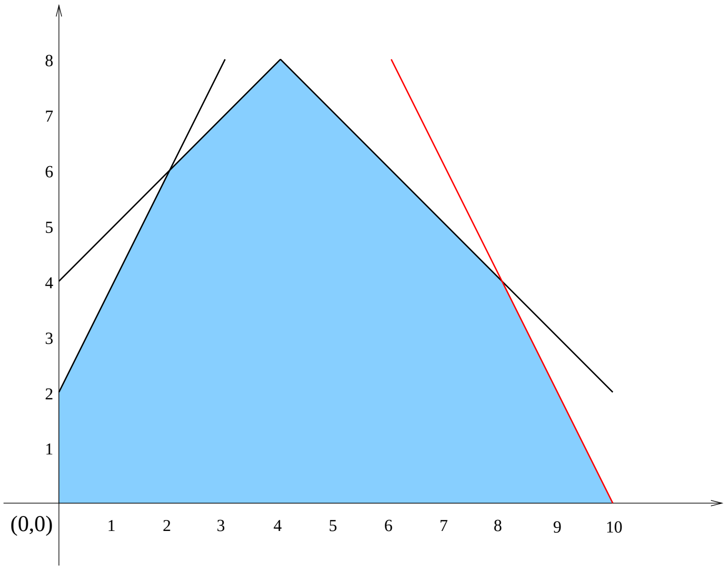
- $x_1, x_2 \geq 0$
- $x_1 + x_2 \leq 12$
- $-x_1 + x_2 \leq 4$

PL: solução gráfica



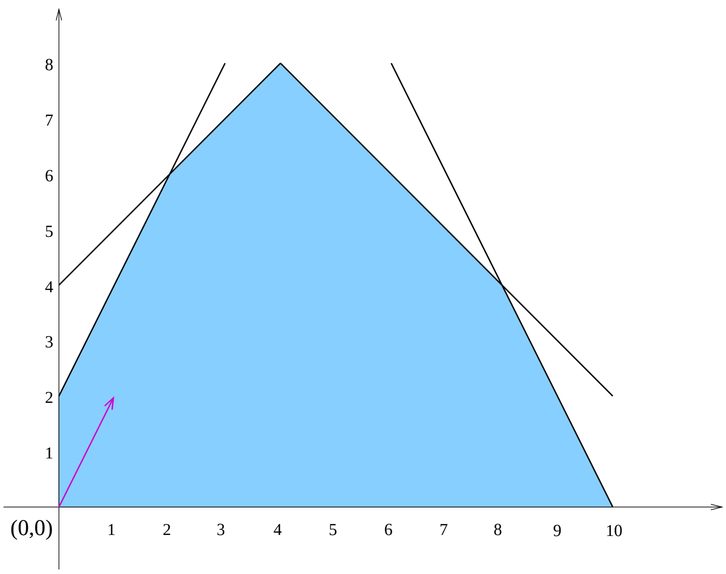
- $x_1, x_2 \geq 0$
- $x_1 + x_2 \leq 12$
- $-x_1 + x_2 \leq 4$
- $-2x_1 + x_2 \leq 2$

PL: solução gráfica



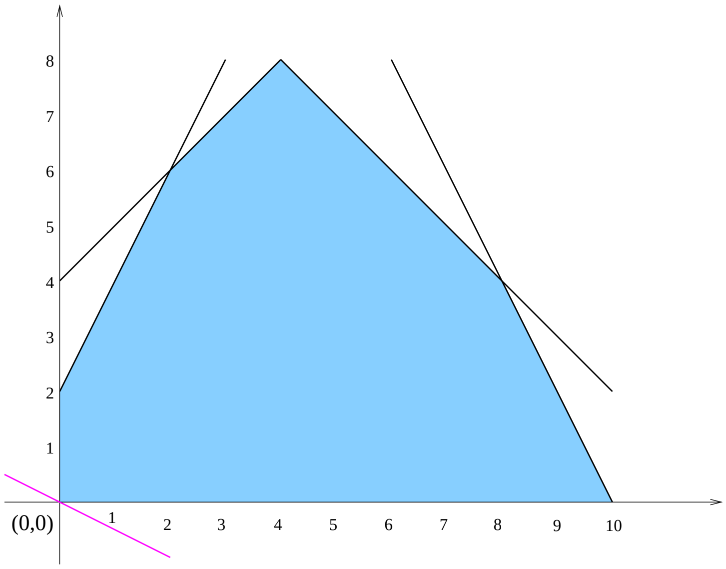
- $x_1, x_2 \geq 0$
- $x_1 + x_2 \leq 12$
- $-x_1 + x_2 \leq 4$
- $-2x_1 + x_2 \leq 2$
- $2x_1 + x_2 \leq 20$

PL: solução gráfica



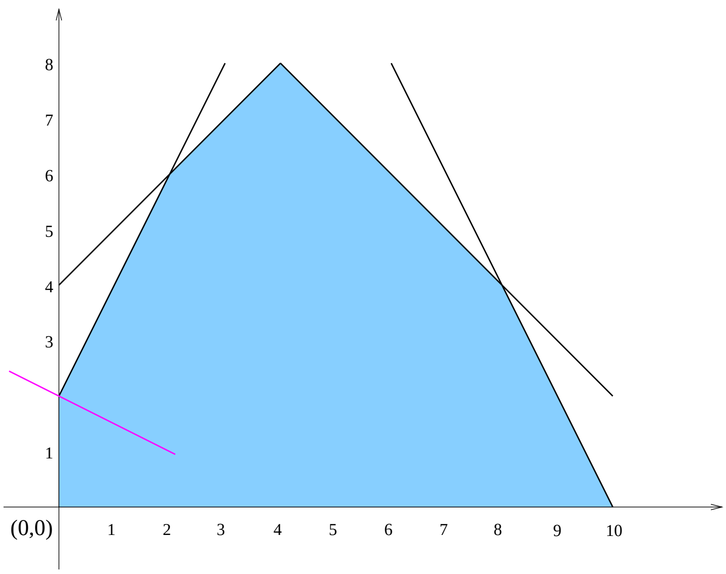
- $x_1, x_2 \geq 0$
- $x_1 + x_2 \leq 12$
- $-x_1 + x_2 \leq 4$
- $-2x_1 + x_2 \leq 2$
- $2x_1 + x_2 \leq 20$
- $\max z = x_1 + 2x_2$

PL: solução gráfica



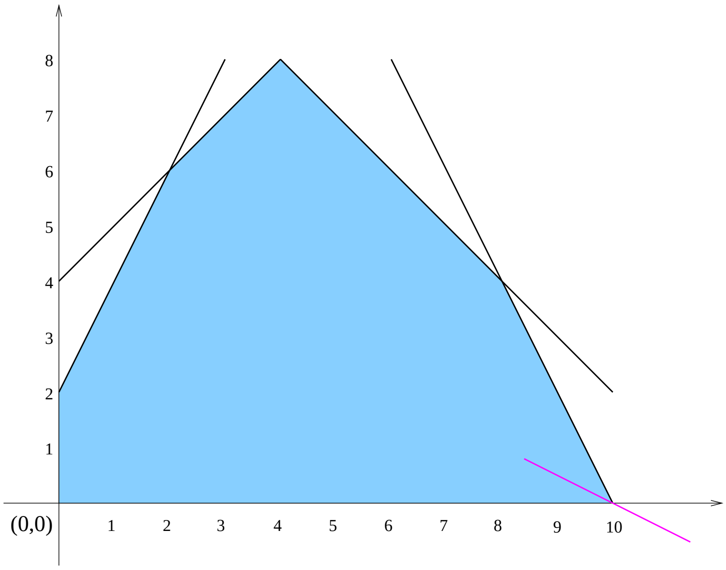
- $x_1, x_2 \geq 0$
- $x_1 + x_2 \leq 12$
- $-x_1 + x_2 \leq 4$
- $-2x_1 + x_2 \leq 2$
- $2x_1 + x_2 \leq 20$
- $z = x_1 + 2x_2 = 0$

PL: solução gráfica



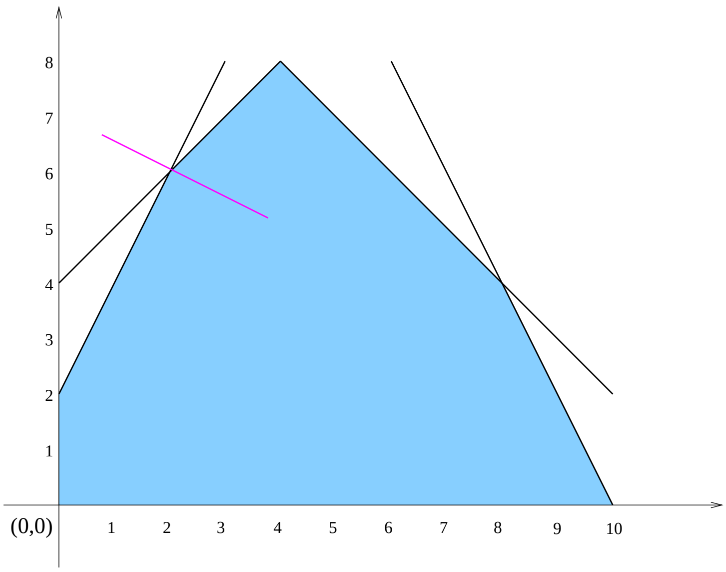
- $x_1, x_2 \geq 0$
- $x_1 + x_2 \leq 12$
- $-x_1 + x_2 \leq 4$
- $-2x_1 + x_2 \leq 2$
- $2x_1 + x_2 \leq 20$
- $z = x_1 + 2x_2 = 4$

PL: solução gráfica



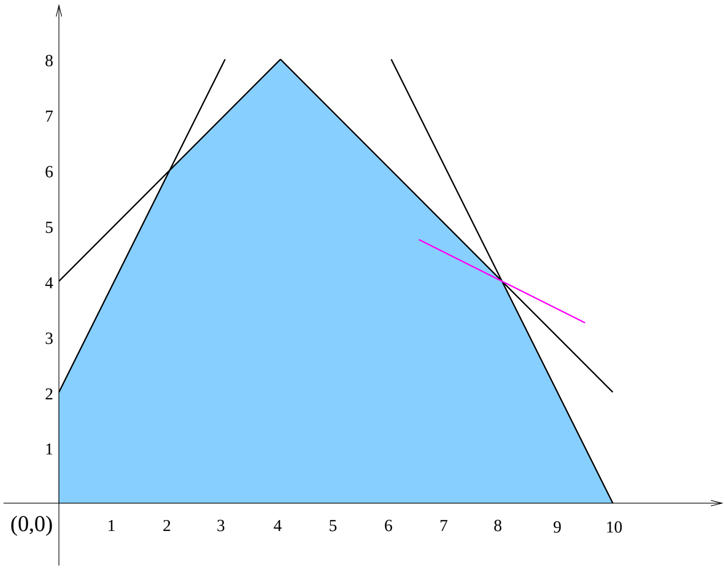
- $x_1, x_2 \geq 0$
- $x_1 + x_2 \leq 12$
- $-x_1 + x_2 \leq 4$
- $-2x_1 + x_2 \leq 2$
- $2x_1 + x_2 \leq 20$
- $z = x_1 + 2x_2 = 10$

PL: solução gráfica



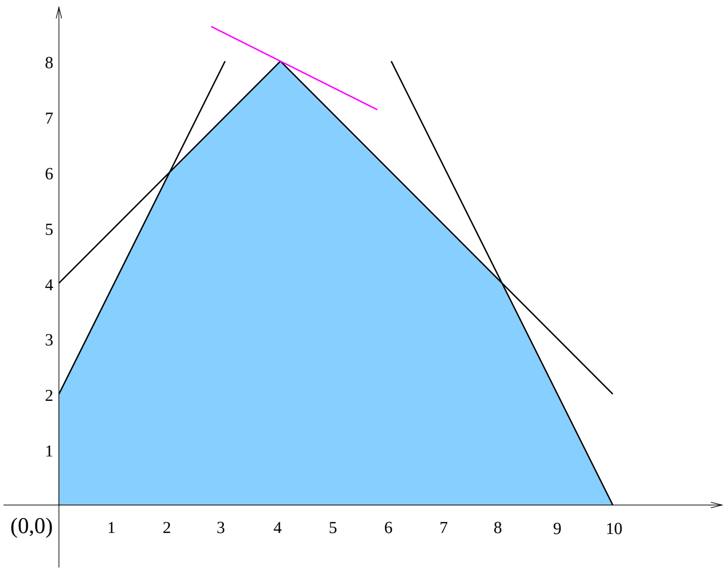
- $x_1, x_2 \geq 0$
- $x_1 + x_2 \leq 12$
- $-x_1 + x_2 \leq 4$
- $-2x_1 + x_2 \leq 2$
- $2x_1 + x_2 \leq 20$
- $z = x_1 + 2x_2 = 14$

PL: solução gráfica



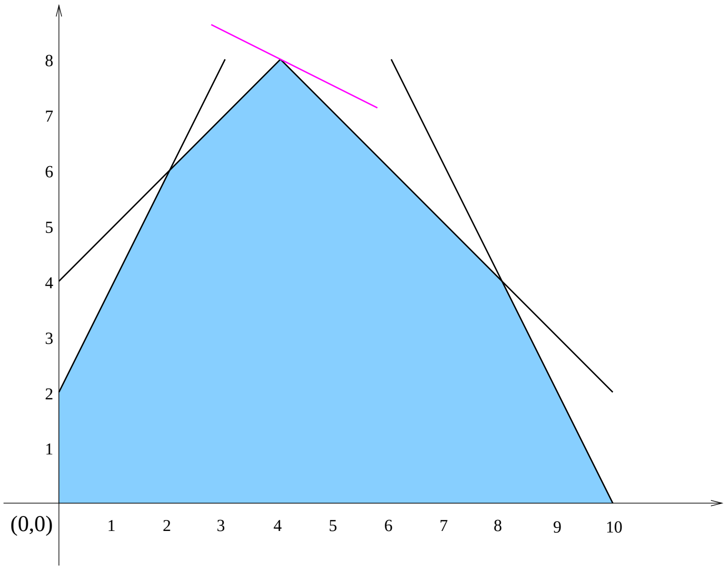
- $x_1, x_2 \geq 0$
- $x_1 + x_2 \leq 12$
- $-x_1 + x_2 \leq 4$
- $-2x_1 + x_2 \leq 2$
- $2x_1 + x_2 \leq 20$
- $z = x_1 + 2x_2 = 16$

PL: solução gráfica



- $x_1, x_2 \geq 0$
- $x_1 + x_2 \leq 12$
- $-x_1 + x_2 \leq 4$
- $-2x_1 + x_2 \leq 2$
- $2x_1 + x_2 \leq 20$
- $z = x_1 + 2x_2 = 20$

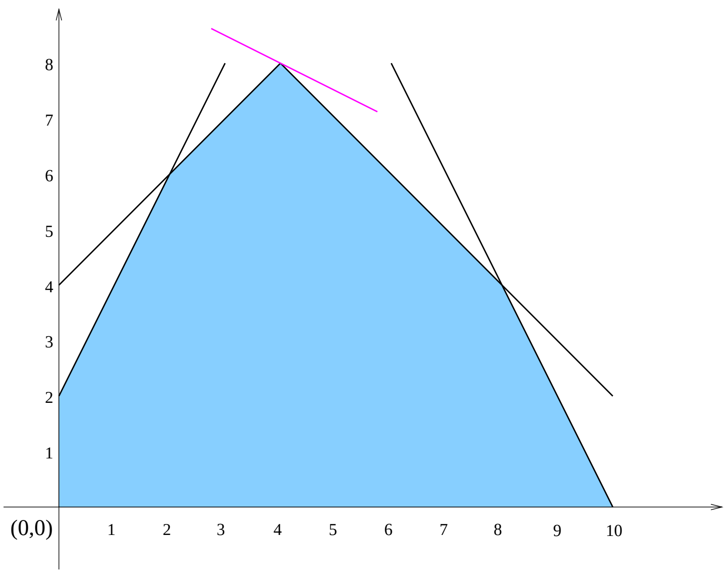
PL: solução gráfica



- $x_1, x_2 \geq 0$
- $x_1 + x_2 \leq 12$
- $-x_1 + x_2 \leq 4$
- $-2x_1 + x_2 \leq 2$
- $2x_1 + x_2 \leq 20$
- $z = x_1 + 2x_2 = 20$

OBSERVAÇÃO: o conjunto de soluções de um sistema de inequações lineares é um *poliedro*.

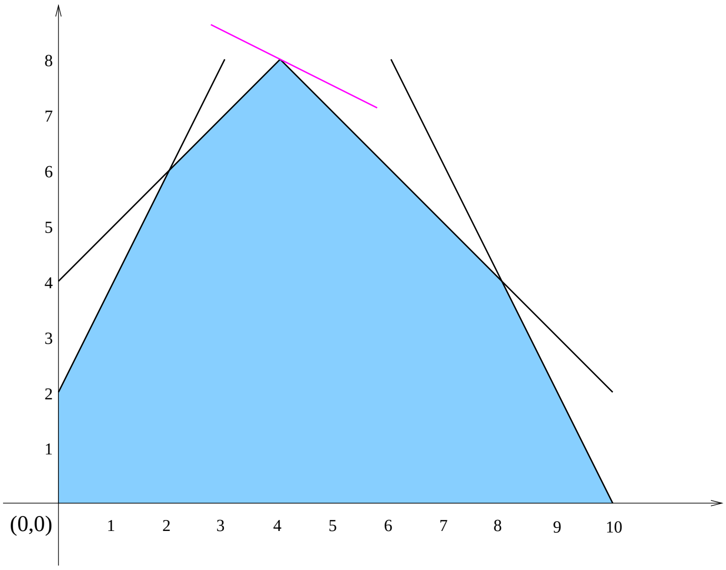
PL: solução gráfica



- $x_1, x_2 \geq 0$
- $x_1 + x_2 \leq 12$
- $-x_1 + x_2 \leq 4$
- $-2x_1 + x_2 \leq 2$
- $2x_1 + x_2 \leq 20$
- $z = x_1 + 2x_2 = 20$

OBSERVAÇÃO: o conjunto de soluções de um sistema de inequações lineares é um *poliedro*.

Esse poliedro é denominado *região viável* e os pontos no seu interior são as *soluções viáveis* do PL.



- $x_1, x_2 \geq 0$
- $x_1 + x_2 \leq 12$
- $-x_1 + x_2 \leq 4$
- $-2x_1 + x_2 \leq 2$
- $2x_1 + x_2 \leq 20$
- $z = x_1 + 2x_2 = 20$

OBSERVAÇÃO: o conjunto de soluções de um sistema de inequações lineares é um *poliedro*.

Esse poliedro é denominado *região viável* e os pontos no seu interior são as *soluções viáveis* do PL.

INTUIÇÃO: existe uma solução ótima do PL que é um ponto extremo (vértice) desse poliedro.