Professores: Cid Carvalho de Souza e Zanoni Dias Primeiro semestre de 2005

MC538 – Projeto e Análise de Algoritmos II

Lista 5

1. Considere o problema da cobertura por conjuntos: Temos um conjunto de elementos S e subconjuntos $S_1, \ldots, S_k$ de S, onde cada subconjunto S_i possui um peso p_i. Deseja-se achar uma coleção $C = \{S_p, \ldots, S_q\}$ dos subconjuntos tal que $S = \cup_{S_i \in C} S_i$ e seja minimizado a soma dos pesos dos conjuntos na coleção C.

   Seja a seguinte heurística para este problema.

   (a) Calcule a razão $p_i/|S_i|$ para todos subconjuntos. Acrescente na solução o conjunto S_i que tenha razão mínima.

   (b) Faça $S \leftarrow S - S_i$. Para cada subconjunto S_j faça $S_j \leftarrow S_j - S_i$. Volte ao passo a se o conjunto $S \neq \emptyset$.

   Mostre que esta heurística pode ser tão ruim quanto se queira.

2. Seja G uma floresta. Encontre um algoritmo linear que acha uma cobertura por vértices mínima em G.

3. No algoritmo 2-aproximado para o TSP-métrico primeiramente achamos uma AGM e em seguida duplicamos as arestas da árvore. Ao invés de duplicar as arestas da árvore, considere um novo algoritmo que acha um emparelhamento perfeito de custo mínimo sobre os vértices de grau ímpar na árvore e adiciona tal emparelhamento na árvore. Com isto teremos um grafo onde todos os vértices possuem grau par. Como neste grafo todos os vértices possuem grau par, podemos achar um circuito euleriano (um circuito euleriano é um circuito que passa por todas as arestas do grafo uma única vez). Visitando os vértices na mesma ordem do circuito euleriano podemos montar um ciclo hamiltoniano com custo menor ou igual ao custo do circuito euleriano. Para tanto basta ligarmos os vértices a medida que seguimos o circuito euleriano. Mostre que o este algoritmo é 3/2-aproximado para o TSP-métrico.

4. Seja G um grafo completo não orientado onde todas as arestas possuem custo 1 ou 2. Apresente um algoritmo 4/3-aproximado para o problema TSP para grafos com estes custos nas arestas.
   Dica: Use um 2-emparelhamento mínimo. Um 2-emparelhamento mínimo de G é um subgrafo gerador de G de custo mínimo onde todos os vértices possuem grau 2. Existem algoritmos polinomiais que acham um 2-emparelhamento mínimo em um grafo.

5. Considere o problema *bin packing* unidimensional. Mostre que não pode existir algoritmo com aproximação menor do que 3/2 para este problema a menos que $P = NP$.
   Dica: Use o problema da partição.