MC438/MC448 - ANÁLISE DE ALGORITMOS

IC – UNICAMP

1º Semestre de 2004

1. Prove, usando indução matemática:
   (a) $\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}$.
   (b) $\sum_{i=1}^{n} i \times 2^{i-1} = (n-1) \times 2^n + 1$.
   (c) $\sum_{i=1}^{n-1} i(i+1) = \frac{n(n+1)(n+2)}{3}$.
   (d) $2^n < n!$, para $n \geq 4$.

2. Determine a soma da série abaixo, e prove-a, usando indução matemática.

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \cdots + \frac{1}{2^n}$$

.

3. Prove que $n^2 - n$ é sempre par, para todo $n \geq 2$.

4. Use indução matemática e prove que um conjunto com $n \geq 2$ elementos tem $n(n-1)/2$ subconjuntos com exatamente dois elementos.

5. Mostre por indução que todo número natural pode ser escrito como uma soma de elementos distintos da seguinte seqüência: 1, 2, 4, 8, 16, 32, 64,...

6. Considere a seqüência de Fibonacci $F_1 = 1,\ F_2 = 1$ *e* $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$, para $n \geq 3$. Faça uma conjetura quanto à soma $\sum_{i=1}^{n} F_i$ e confirme-a usando o princípio da indução matemática.

7. O *k-cubo*, Q_k, é um grafo simples cujos vértices são k-uplas, ordenadas, de 0's e 1's, e tal que dois vértices são adjacentes se e somente se diferem em exatamente uma coordenada.
   (a) Desenhe Q_1, Q_2, Q_3 e Q_4.
   (b) Demonstre que todo k-cubo tem 2^k vertices.
   (c) Descreva uma forma de construir recursivamente um k-cubo, i. é, descreva como construir Q_k a partir de Q_{k-1}
   (d) Demonstre usando indução que todo k-cubo tem $k2^{k-1}$ arestas.

8. Uma *coloração* dos vértices de um grafo simples G é uma atribuição de cores a cada vértice do grafo de forma que a vértices adjacentes sejam atribuídas cores distintas. Uma k-*coloração* é uma coloração dos vértices de G com k cores. O *número cromático* $\chi(G)$ de um grafo G é o menor k para o qual o grafo tem uma k-coloração.
   - Faça alguns exemplos.
   - Prove, usando indução em n (número de vértices do grafo), que se G é um grafo simples com grau máximo $\Delta(G)$, então $\chi(G) \leq \Delta(G) + 1$.

9. Um *passeio* é uma seqüência finita e não vazia $v_0, \alpha_1, v_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n, v_n$, cujos elementos são alternadamente vértices e arestas e tal que para todo i, $1 \leq i \leq 1n$, v_{i-1} e v_i são os extremos de α_i. Um *caminho* é um passeio onde as arestas são duas a duas distintas e os vértices são, também, dois a dois distintos.

Demonstre, usando indução, que se existe um passeio de u a v em G, então existe um caminho de u a v em G.

10. Encontre uma expressão para a soma dos elementos da i-ésima linha do triângulo de Pascal e prove por indução que sua expressão está correta.

    O triângulo de Pascal, veja o exemplo abaixo, é formado com a seguinte regra: a linha i possui $i+1$ elementos e o j-ésimo elemento da linha i é a soma do j-ésimo e do $(j-1)$-ésimo elementos da linha $i-1$, para $2 \leq j \leq i$. Quando j é igual a 1 ou $i+1$ o j-ésimo elemento é igual a 1.

$0^{\underline{a}}$	1					
$1^{\underline{a}}$	1	1				
$2^{\underline{a}}$	1	2	1			
$3^{\underline{a}}$	1	3	3	1		
$4^{\underline{a}}$	1	4	6	4	1	
$5^{\underline{a}}$	1	5	10	10	5	1