

5ª Lista de Exercícios
MC448/438 — Análise de Algoritmos
Fábio Pakk Selmi-Dei
2º Semestre de 2003

Exercícios

1. Prove que, para qualquer número natural $n \geq 2$, temos:

$$\frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \dots + \frac{1}{n^2} < 1$$

Dica: Antes, prove por indução que:

$$\frac{1}{1.2} + \frac{1}{2.3} + \dots + \frac{1}{(n-1)n} = \frac{n-1}{n}$$

2. Prove por indução que para qualquer número natural $n \geq 0$, temos:

$$2(\sqrt{n+1} - 1) < 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n}} < 2\sqrt{n}$$

3. Prove por indução que, se $\sin x \neq 0$ e $n \geq 0$ é um número natural, então temos:

$$\cos x \cdot \cos 2x \dots \cos 2^{n-1}x = \frac{\sin 2^n x}{2^n \sin x}$$

Dica: Use: $\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha$

4. Prove por indução que $7^{2n} - 48n - 1$ é divisível por 2304 para todo número natural $n \geq 0$.
5. Prove por indução que para todo número natural $n \geq 0$, o valor:

$$u_n = \frac{(1 + \sqrt{5})^n - (1 - \sqrt{5})^n}{2^n \sqrt{5}}$$

é um número natural.

Dica: Observe que: $a^{n+1} - b^{n+1} = (a+b)(a^n - b^n) - ab(a^{n-1} - b^{n-1})$