MC102 – Algoritmos e Programação de Computadores

Instituto de Computação

UNICAMP

Primeiro Semestre de 2013

Roteiro

Ordenação

- Conforme já estudado anteriormente, o problema de ordenação pode ser resumido como:

> Dada uma coleção de elementos, com uma relação de ordem entre si, gerar uma saída com os elementos ordenados.

- Nos nossos exemplos, usaremos um vetor de inteiros como a coleção de elementos.
  - É claro que quaisquer inteiros possuem uma relação de ordem entre si.
- Apesar de usarmos inteiros, os algoritmos servem para ordenar qualquer coleção de elementos que possam ser comparados.
- Ambos os algoritmos recursivos de ordenação que veremos usam o paradigma de Divisão e Conquista.

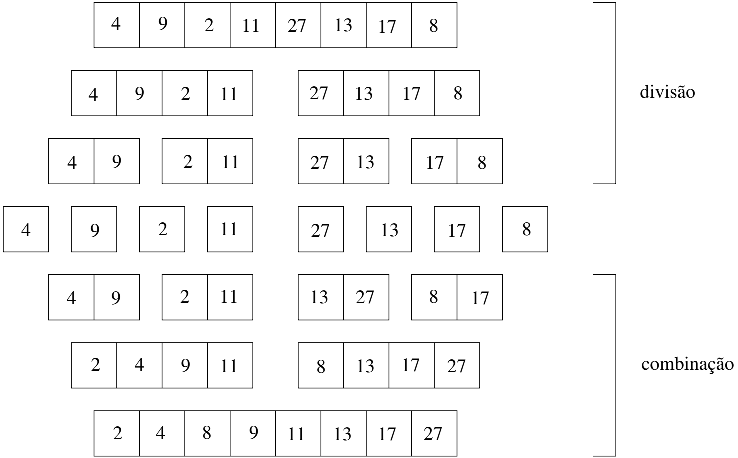
Divisão e Conquista

- Esta técnica consiste em dividir um problema maior recursivamente em problemas menores até que ele possa ser resolvido diretamente.
- A solução do problema inicial é dada através da combinação dos resultados de todos os problemas menores computados.
- A técnica soluciona o problema através de três fases:
  - Divisão: o problema maior é dividido em problemas menores.
  - Conquista: cada problema menor é resolvido recursivamente.
  - Combinação: os resultados dos problemas menores são combinados, usando o `merge`, para se obter a solução do problema maior.

Merge Sort

- O Merge Sort foi proposto por John von Neumann em 1945.
- O algoritmo Merge Sort é baseado em uma operação de intercalação (`merge`) que une dois vetores ordenados para gerar um terceiro vetor também ordenado.
- O algoritmo pode ser construído a partir dos seguintes passos:
  - Divisão: o vetor é dividido em dois subvetores de tamanhos aproximadamente iguais.
  - Conquista: cada subvetor é ordenado recursivamente.
  - Combinação: os dois subvetores ordenados são intercalados para se obter o vetor final ordenado.

Merge Sort


4 9 2 11 27 13 17 8
4 9 2 11 | 27 13 17 8
4 9 | 2 11 | 27 13 | 17 8
4 | 9 | 2 | 11 | 27 | 13 | 17 | 8
4 9 | 2 11 | 13 27 | 8 17
2 4 9 11 | 8 13 17 27
2 4 8 9 11 13 17 27
divisão
combinação

Merge Sort

```
#include<stdio.h>
#define MAX 100

void merge(int v[], int aux[], int inicio1, int inicio2, int fim2) {
  int i = inicio1, j = inicio2, fim1 = inicio2 - 1, k = 0;

  /* enquanto existir elementos nas duas partes...*/
  while ((i <= fim1) && (j <= fim2))
    /* ... verifica qual dos dois elementos iniciais eh o menor */
    if (v[i] < v[j])
      aux[k++] = v[i++]; /* ou copia o elemento inicial da primeira parte */
    else
      aux[k++] = v[j++]; /* ou copia o elemento inicial da segunda parte  */

  while(i <= fim1)     /* se ainda existir elementos na primeira parte ...   */
    aux[k++] = v[i++]; /* ... copia os elementos restantes no vetor auxiliar */

  while(j <= fim2)     /* se ainda existir elementos na segunda parte ...    */
    aux[k++] = v[j++]; /* ... copia os elementos restantes no vetor auxiliar */

  for(i = 0; i < k; i++)     /* copia os elementos do vetor auxiliar ... */
    v[i + inicio1] = aux[i]; /* ... de volta para o vetor original       */
}
```

Merge Sort

```
void mergesort(int v[], int aux[], int inicio, int fim) {
  int meio = (inicio + fim) / 2;

  /* se existirem pelo menos dois elementos para serem ordenados... */
  if (inicio < fim) {
    mergesort(v, aux, inicio, meio);         /* ordena a primeira parte  */
    mergesort(v, aux, meio + 1, fim);        /* ordena a segunda parte   */
    merge(v, aux, inicio, meio + 1, fim);    /* intercala as duas partes */
  }
}
```

Merge Sort

```
int main() {
  int v[MAX], aux[MAX], n, i;

  printf("Entre com o tamanho do vetor: ");
  scanf("%d", &n);

  if (n > MAX)
    n = MAX;

  printf("Entre com os %d valores inteiros:\n", n);
  for (i = 0; i < n; i++)
    scanf("%d", &v[i]);

  mergesort(v, aux, 0, n - 1);

  /* imprime o vetor ordenado */
  for(i = 0; i < n; i++)
    printf("%d ", v[i]);
  printf("\n");

  return 0;
}
```

Merge Sort - Análise de complexidade

- Seja $T(n)$ o custo de ordenar um vetor de n elementos usando o Merge Sort.
- Para $n > 1$, temos que o algoritmo executa:
  - A ordenação recursiva dos $\lceil n/2 \rceil$ primeiros elementos do vetor.
  - A ordenação recursiva dos $\lfloor n/2 \rfloor$ últimos elementos do vetor.
  - Intercala os dois subvetores previamente ordenados.
- A seguinte recorrência define o tempo de execução do Merge Sort:

$$T(1) = c_1$$
$$T(n) = T(\lceil n/2 \rceil) + T(\lfloor n/2 \rfloor) + M(n) + c_2$$

- É fácil ver que $M(n)$, o tempo de execução da função `merge`, é proporcional a função $f(n) = n$.

Merge Sort - Análise de complexidade

- É possível mostrar que $T(n)$, o tempo de execução do Merge Sort, é proporcional a função $f(n) = n \log n$, tanto no melhor quanto no pior caso.
- Da forma como a função `merge` foi implementada (recebendo um ponteiro para um vetor auxiliar), o Merge Sort necessita de espaço linear de memória adicional.

Merge Sort - Exercício

Exercício

Escreva uma versão recursiva da função `merge`*. Sua função deve receber ponteiros para três vetores de inteiros A, B e C, tal que A e B são vetores ordenados de tamanhos n e m, respectivamente. Sua função deve copiar em C os elementos dos vetores A e B, de forma a gerar um vetor ordenado de tamanho $n+m$. Sua função não deve usar um vetor auxiliar, nem qualquer tipo de repetição (for, while, etc).*

Protótipo:

```
void merge(int *A, int *B, int *C, int n, int m);
```

Quicksort

- O algoritmo Quicksort é baseado em uma operação de particionamento (`partition`) que, com base num elemento pivô, divide o vetor em duas partições: valores menores que o pivô são colocados antes do pivô no vetor, enquanto valores maiores são colocados depois.
- O algoritmo pode ser construído a partir dos seguintes passos:
  - Divisão: o vetor é dividido em duas partições, usando o `partition`.
  - Conquista: cada partição é ordenado recursivamente.
  - Combinação: nada precisa ser feito, já que os números menores que o pivô estão antes do pivô (e ordenados), enquanto os maiores estão depois do pivô (e também ordenados).

Quicksort

```
#include<stdio.h>
#define MAX 100

void troca(int* a, int* b) {
  int tmp = *a;
  *a = *b;
  *b = tmp;
}

int partition(int v[], int inicio, int fim) {
  int i, j = inicio;
  /* j indica a posicao onde estao os elementos menores ou iguais ao pivo */

  for (i = inicio + 1; i <= fim; i++)
    /* se o elemento atual for menor ou igual que o pivo... */
    if (v[i] <= v[inicio])
      /* ... posiciona o elemento atual na primeira particao */
      troca(&v[++j], &v[i]);

  troca(&v[inicio], &v[j]); /* posiciona o pivo entre as duas particoes */

  return j; /* retorna a posicao do pivo */
}
```

Quicksort

```
void quicksort(int v[], int inicio, int fim) {
  int pivo;

  /* se existirem pelo menos dois elementos para serem ordenados... */
  if (inicio < fim) {
    pivo = partition(v, inicio, fim);    /* particiona o vetor          */
    quicksort(v, inicio, pivo - 1);      /* ordena a primeira particao */
    quicksort(v, pivo + 1, fim);         /* ordena a segunda particao  */
  }
}
```

Quicksort

```
int main() {
  int v[MAX], aux[MAX], n, i;

  printf("Entre com o valor de n: ");
  scanf("%d", &n);

  if (n > MAX)
    n = MAX;

  printf("Entre com os %d valores inteiros:\n", n);
  for (i = 0; i < n; i++)
    scanf("%d", &v[i]);

  quicksort(v, 0, n - 1);

  for(i = 0; i < n; i++)
    printf("%d ", v[i]);
  printf("\n");

  return 0;
}
```

Quicksort - Partition

```
[45] [23]  13   25   89   75   46   32   20   11
 j    i
```

Quicksort - Partition

```
[45]  23  [13]  25  89  75  46  32  20  11
      j    i
```

Quicksort - Partition

```
[45]  23   13  [25]  89   75   46   32   20   11
           j    i
```

Quicksort - Partition

```
[45]  23   13   25  [89]  75   46   32   20   11
                j     i
```

Quicksort - Partition

```
[45]  23   13   25   89  [75]  46   32   20   11
                j          i
```

Quicksort - Partition

```
[45]  23   13   25   89   75  [46]  32   20   11
                 j                i
```

Quicksort - Partition

```
[45]  23   13   25   89   75   46  [32]  20   11
                 j                   i
```

Quicksort - Partition

```
[45]  23   13   25   32   75   46   89  [20]  11
                      j                    i
```

Quicksort - Partition

```
[45]  23   13   25   32   20   46   89   75  [11]
                          j                   i
```

Quicksort - Partition

```
[45]  23  13  25  32  20  11  89  75  46
                          j
```

Quicksort - Partition

```
11    23    13    25    32    20   [45]   89    75    46
                                   pivô
```

Quicksort

```
[11   23   13   25   32   20]  45  [89   75   46]
         quicksort                   quicksort
```

Quicksort - Análise de Complexidade

- Melhor caso: ocorre quando o `partition` sempre divide o vetor em duas partições de tamanhos aproximadamente iguais.
- A seguinte recorrência define o tempo de execução do Quicksort no melhor caso:

$$
\begin{aligned}
T(1) &= c_1 \\
T(n) &= T(\lceil n/2 \rceil - 1) + T(\lfloor n/2 \rfloor) + P(n) + c_2
\end{aligned}
$$

- É fácil ver que $P(n)$, o tempo de execução da função `partition`, é proporcional à função $f(n) = n$.
- É possível mostrar que $T(n)$, o tempo de execução do Quicksort no melhor caso, é proporcional à função $f(n) = n \log n$.

Quicksort - Análise de Complexidade

- Pior caso: ocorre quando o `partition` sempre divide o vetor em duas partições de tamanhos muito diferentes.
- A seguinte recorrência define o tempo de execução do Quicksort no pior caso:

$$
\begin{aligned}
T(1) &= c_1 \\
T(n) &= T(n-1) + P(n) + c_2
\end{aligned}
$$

- Como sabemos, $P(n)$, o tempo de execução da função `partition`, é proporcional à função $f(n) = n$.
- É possível mostrar que $T(n)$, o tempo de execução do Quicksort no pior caso, é proporcional à função $f(n) = n^2$.

Quicksort - Análise de Complexidade

- Caso médio: a probabilidade de uma partição de um tamanho qualquer ocorrer é igual a $1/n$.
- A seguinte recorrência define o tempo de execução do Quicksort no caso médio:

$$T(1) = c_1$$

$$T(n) = \frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1}[T(k) + T(n-1-i)] + P(n) + c_2$$

- Como sabemos, $P(n)$, o tempo de execução da função `partition`, é proporcional à função $f(n) = n$.
- É possível mostrar que $T(n)$, o tempo de execução do Quicksort no caso médio, é proporcional à função $f(n) = n\log n$.

Quicksort

- Dado um vetor aleatório qualquer, é extremamente raro o Quicksort se comportar como no seu pior caso.
- No entanto, o Quicksort, devido à escolha do primeiro elemento do vetor como pivô, apresenta seu pior comportamento quando recebe como entrada um dos casos mais simples possíveis para qualquer algoritmo de ordenação: um vetor já ordenado.
- Uma forma de contornar este caso e evitar partições de tamanho zero é utilizar como pivô a mediana de três elementos do vetor: o primeiro, o do meio e o último.
- Uma outra alternativa bastante utilizada é definir o pivô como um elemento do vetor escolhido de forma aleatória.
- Uma vantagem do Quicksort em relação ao Merge Sort é em relação ao uso de memória auxiliar: o Quicksort não usa um vetor auxiliar, consumindo apenas o espaço para armazenar as variáveis locais na pilha de recursão.

Quicksort - Exercícios

Exercício

Implemente uma função de partição que use o método da mediana de três elementos do vetor para definir o pivô.

Exercício

Implemente uma função de partição que use um elemento do vetor escolhido aleatoriamente como pivô.