Algoritmos e Programação de Computadores

Instituto de Computação

UNICAMP

Primeiro Semestre de 2013

Roteiro

Recursão

Recursão

- Desejamos criar um algoritmo para resolver um determinado problema.
- Usando o método de recursão/indução, a solução de um problema pode ser expressa da seguinte forma:
  - Primeiramente, definimos a solução para casos base.
  - Em seguida, definimos como resolver o problema para um caso geral, utilizando-se de soluções para instâncias menores do problema.

Indução

- *Indução:* Técnica de demonstração matemática em que algum parâmetro da proposição a ser demonstrada envolve números naturais.
- Seja T uma proposição que desejamos provar como verdadeira para todos valores naturais n.
- Ao invés de provar diretamente que T é válido para todos os valores de n, basta provar as duas condições 1 e 3 a seguir:

1. *Caso Base:* Provar que T é válido para $n = 1$.
2. *Hipótese de Indução:* Assumimos que T é válido para $n - 1$.
3. *Passo de Indução:* Sabendo-se que T é válido para $n - 1$, devemos provar que T é válido para n.

Indução

- Por que a indução funciona? Por que as duas condições são suficientes?
  - Mostramos que T é valido para um caso simples como $n = 1$.
  - Com o passo da indução, mostramos que T é válido para $n = 2$.
  - Como T é válido para $n = 2$, pelo passo de indução, T também é válido para $n = 3$, e assim por diante.

Exemplo

Teorema

A soma $S(n)$ dos primeiros n números naturais é $S(n) = n(n+1)/2$

Prova.
Base: Para $n = 1$, temos que $S(1) = n(n+1)/2 = 1(1+1)/2 = 1$.
Hipótese de Indução: Vamos assumir que a fórmula é válida para $n-1$, ou seja, $S(n-1) = (n-1)n/2$.
Passo: Devemos mostrar que é válido para n. Por definição, $S(n) = S(n-1) + n$. Por hipótese $S(n-1) = (n-1)n/2$, logo:

$$\begin{aligned} S(n) &= S(n-1) + n \\ &= (n-1)n/2 + n \\ &= (n^2 - n)/2 + n \\ &= (n^2 + n)/2 \\ &= n(n+1)/2 \end{aligned}$$

□

Recursão

- Definições recursivas de funções operam como o *princípio matemático da indução* visto anteriormente, ou seja, a solução é inicialmente definida para os casos base e estendida para o caso geral.

Fatorial

Problema: Calcular o fatorial de um número ($N!$).
Qual é o caso base?

- $0! = 1$

Qual é o passo indutivo?

- Temos que expressar a solução para $N \geq 1$, supondo que já sabemos a solução para algum caso mais simples.
- $N! = N(N-1)!$.

Este caso é trivial pois a própria definição do fatorial é recursiva.

Fatorial

Portanto, a solução do problema pode ser expressa da seguinte forma:

- Se $N = 0$ então $0! = 1$.
- Se $N \geq 1$ então $N! = N(N-1)!$.

Note como aplicamos o princípio da indução:

- Sabemos a solução para um caso base: $N = 0$.
- Definimos a solução do problema geral $N!$ em termos do mesmo problema, mas para um caso mais simples.

Fatorial em C

```
long fatorial(long N) {
    long X, Y;

    if (N == 0) /* caso base */
      return 1;
    else {
      X = N - 1;
      Y = fatorial(X);
      return N * Y;
    }
}
```

Fatorial

- Para solucionar o problema, faz-se uma chamada para a própria função, por isso, esta função é chamada *recursiva*.
- Recursividade geralmente permite uma descrição mais clara e concisa dos algoritmos, especialmente quando o problema é recursivo por natureza.

O que ocorre na memória

- Devemos entender como é feito o controle sobre as variáveis locais em chamadas recursivas.
- A memória de um sistema computacional é dividida em três partes:
  - *Espaço Estático*: Contém as variáveis globais e código do programa.
  - *Heap:* Para alocação dinâmica de memória.
  - *Pilha:* Para execução de funções.

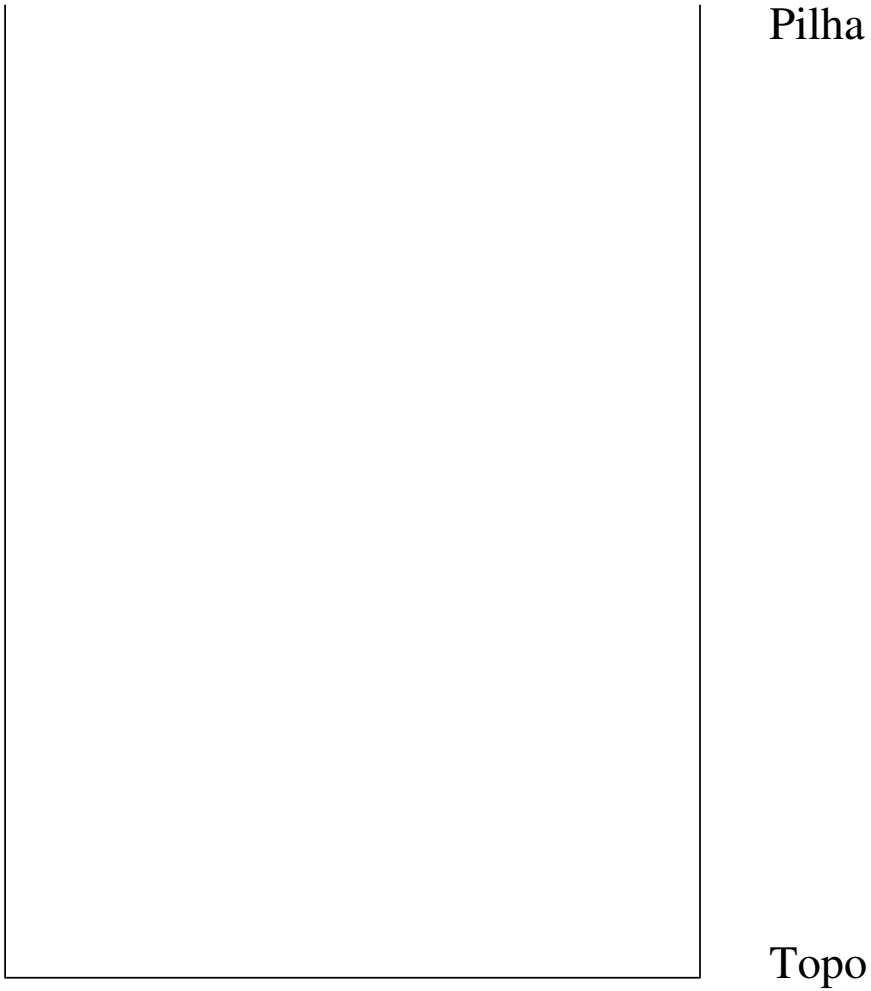
O que acontece na pilha

- Toda vez que uma função é invocada, suas variáveis locais são armazenadas no topo da pilha.
- Quando uma função termina a sua execução, suas variáveis locais são removidas da pilha.

```
int f1(int a, int b) {
   int c = 5;
   return (c + a + b);
}

int f2(int a, int b) {
   int c;
   c = f1(b, a);
   return c;
}

int main() {
  f2(2, 3);

  return 0;
}
```

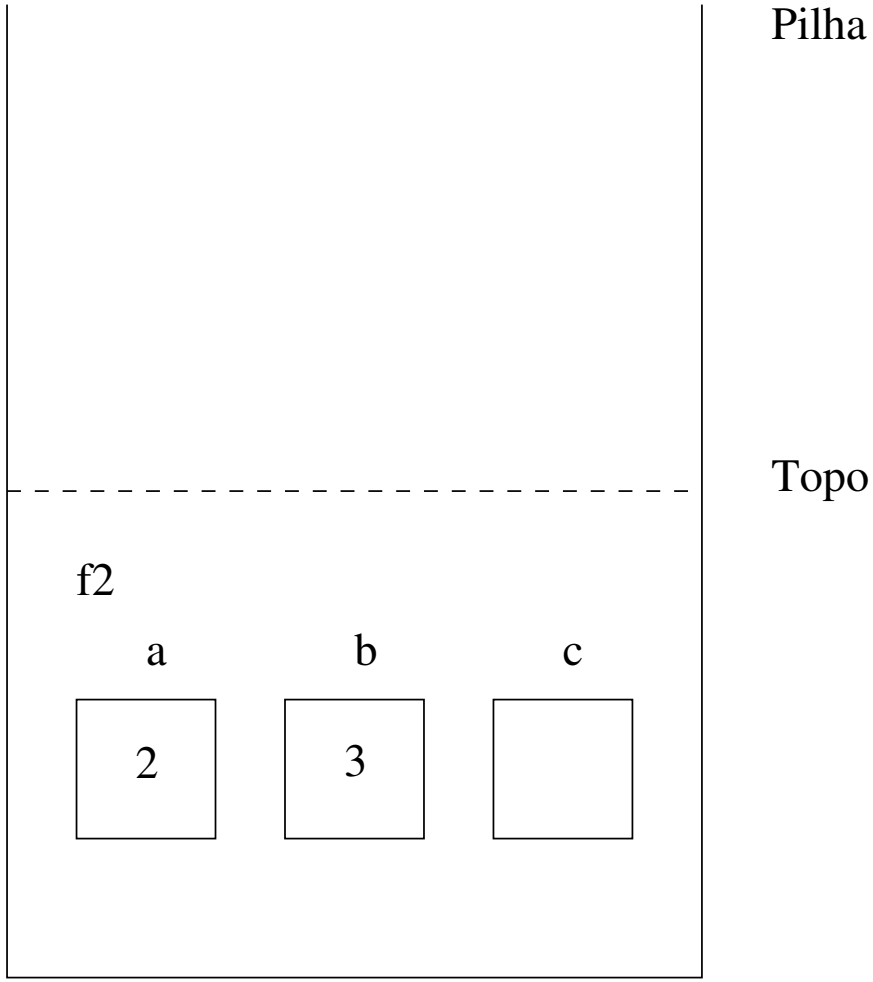
O que ocorre na memória

Inicialmente, a pilha está vazia.



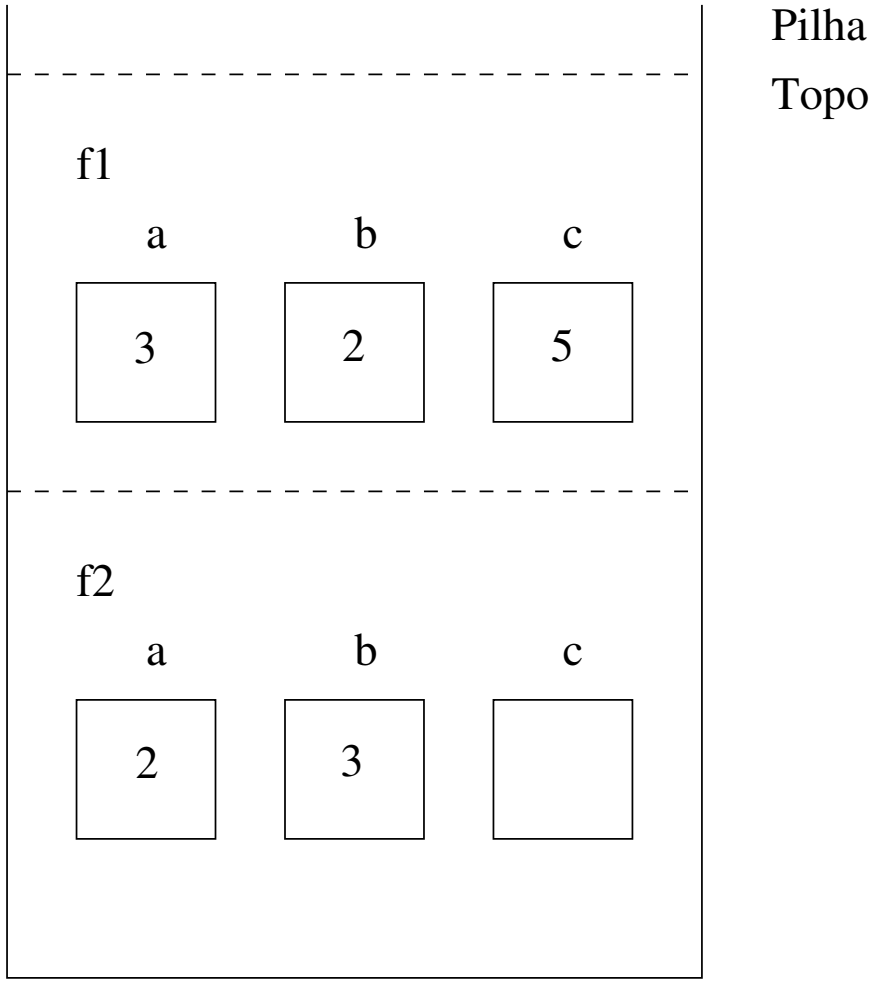
O que ocorre na memória

Quando `f2(2,3)` é invocada, suas variáveis locais são alocadas no topo da pilha.



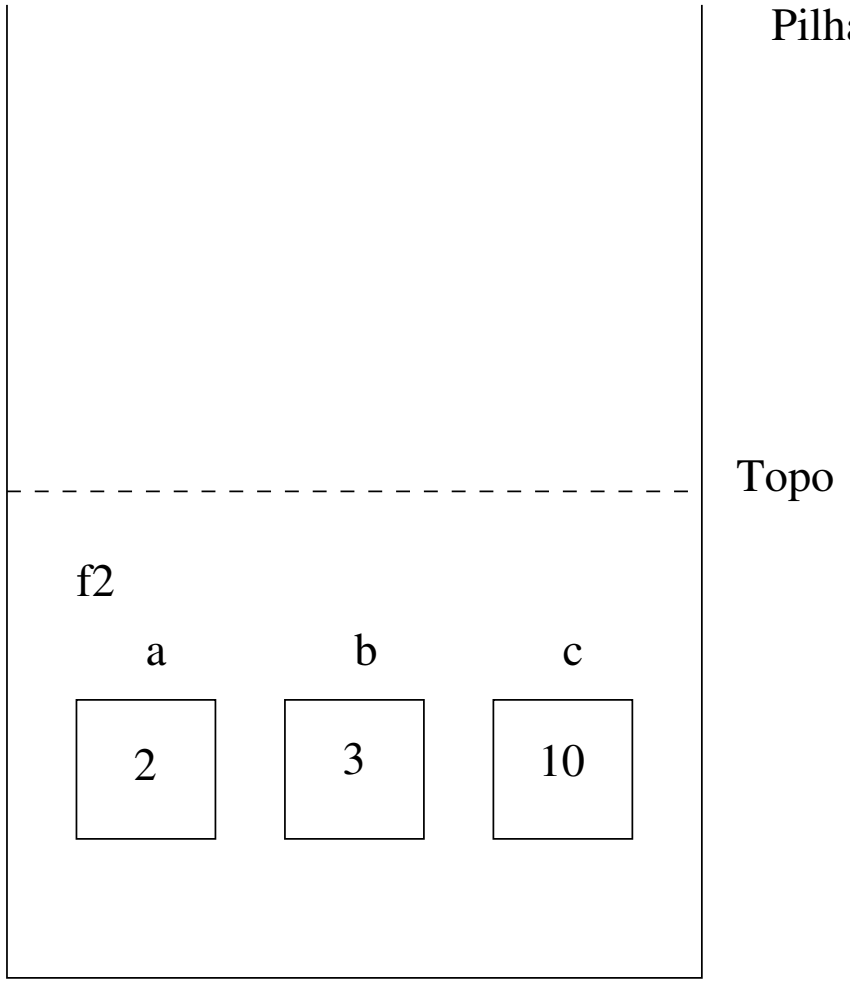
O que ocorre na memória

A função `f2` invoca a função `f1(b,a)` e as variáveis locais desta são alocadas no topo da pilha sobre as de `f2`.



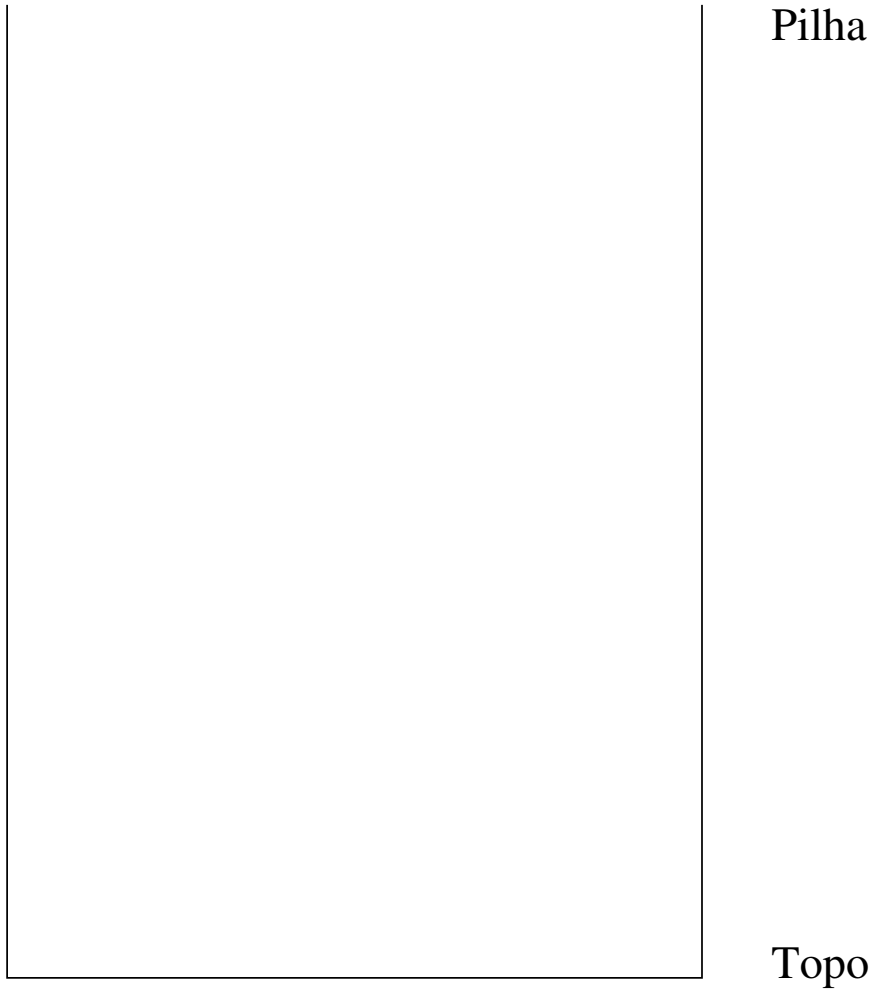
O que ocorre na memória

A função `f1` termina, devolvendo 10. As variáveis locais de `f1` são removidas da pilha.



O que ocorre na memória

Finalmente, `f2` termina a sua execução devolvendo 10. Suas variáveis locais são removidas da pilha.



O que ocorre na memória

No caso de chamadas recursivas para uma mesma função, é como se cada chamada correspondesse a uma função distinta.

- As execuções das chamadas de funções recursivas são feitas na pilha, assim como qualquer função.
- O último conjunto de variáveis alocadas na pilha, que está no topo, corresponde às variáveis da última chamada da função.
- Quando termina a execução de uma chamada da função, as variáveis locais desta são removidas da pilha.

Usando recursão em programação

Considere novamente a solução recursiva para se calcular o fatorial e assuma que seja feito a chamada `fatorial(4)`.

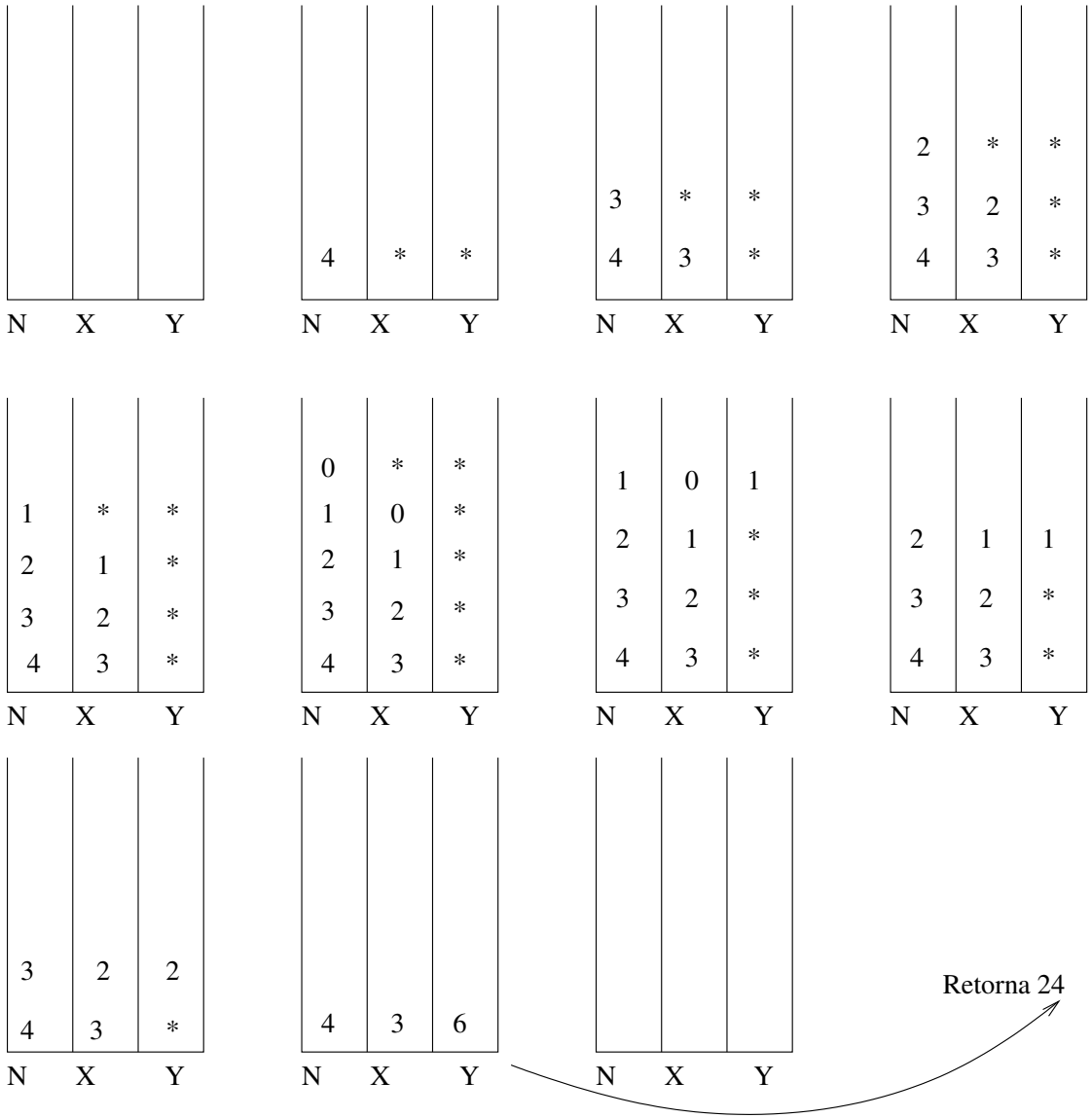
```
long fatorial(long N) {
    long X, Y;

    if (N == 0) /* caso base */
      return 1;
    else {
      X = N - 1;
      Y = fatorial(X);
      return N * Y;
    }
}
```

O que ocorre na memória

- Cada chamada da função *fatorial* cria novas variáveis locais de mesmo nome (N, X e Y) .
- Portanto, múltiplas variáveis (N, X e Y) podem existir em um dado momento.
- Em um dado instante, o nome N (ou X ou Y) refere-se à variável local ao corpo da função que está sendo executada naquele instante.

O que ocorre na memória

Estado da pilha de execução para `fatorial(4)`.



O que ocorre na memória

- É claro que as variáveis X e Y são desnecessárias.

```
long fatorial(long N) {

    if (N == 0) /* caso base */
      return 1;
    else
      return N * fatorial(N - 1);
}
```

Recursão × Iteração

- Soluções recursivas são geralmente mais concisas do que as iterativas.
- Soluções iterativas em geral consomem menos memória do que as soluções recursivas.
- Cópia dos parâmetros a cada chamada recursiva é um custo adicional para as soluções recursivas.

Recursão × Iteração

Neste caso, uma solução iterativa é mais eficiente. Por quê?

```
long fatorial(long n) {
   long r = 1;
   int i;

   for (i = 1; i <= n; i++)
     r = r * i;

   return r;
}
```

Exemplo: soma de elementos de um vetor

- Suponha que temos um vetor v de inteiros de tamanho n e queiramos saber a soma de todos os seus elementos.
- Como podemos descrever este problema de forma recursiva?
- Vamos denotar por $S(k)$ a soma k primeiros elementos do vetor. Com isso, temos:
  - Se $n = 0$ então a soma é igual a 0.
  - Se $n > 0$ então a soma é igual a $S(n-1) + v[n-1]$.

Algoritmo em C

```
int soma(int v[], int n) {

  if (n == 0)
    return 0;
  else
    return soma(v, n - 1) + v[n - 1];
}
```

Soma do vetor recursivo

- O método recursivo sempre termina:
  - Existência de um caso base.
  - A cada chamada recursiva do método, temos um valor menor de n.

Algoritmo em C

Neste caso, é claro que a solução iterativa também seria melhor (não há criação de variáveis por causa das chamadas recursivas):

```
int soma(int v[], int n) {
    int soma = 0, i;

    for (i = 0; i < n; i++)
       soma = soma + v[i];

    return soma;
}
```

Fibonacci

- A série de Fibonacci é a seguinte:
  - $1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, \ldots$.
- Queremos determinar qual é o n-ésimo (`Fibonacci(n)`) número da série.
- Como descrever o n-ésimo número de Fibonacci de forma recursiva?

Fibonacci

- No caso base temos:
  - Se $n = 1$ ou $n = 2$ então Fibonacci(n) $= 1$.
- Conhecendo casos anteriores, podemos computar Fibonacci(n) como:
  - Fibonacci(n) $=$ Fibonacci($n - 1$) $+$ Fibonacci($n - 2$).

Algoritmo em C

A definição anterior é traduzida diretamente em um algoritmo em C:

```
long Fibonacci(long n) {

  if (n <= 2)
    return 1;
  else
    return Fibonacci(n - 1) + Fibonacci(n - 2);
}
```

Relembrando

- Recursão é uma técnica para se criar algoritmos em que:
  1. Devemos descrever soluções para casos base.
  2. Assumindo a existência de soluções para casos mais simples, mostramos como obter solução para o caso mais complexo.
- Algoritmos recursivos geralmente são mais claros e concisos.
- Deve-se avaliar a clareza de código $\times$ eficiência do algoritmo.

Exercício

O que será impresso pelo programa abaixo?

```
#include <stdio.h>

void imprime(int v[], int i, int n);

int main() {
  int vet[] = {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10};

  imprime(vet, 0, 10);
  printf("\n");
}

void imprime(int v[], int i, int n) {
  if (i < n) {
    printf("%d ", v[i]);
    imprime(v, i + 1, n);
  }
}
```

Exercício

O que será impresso pelo programa abaixo?

```
#include <stdio.h>

void imprime(int v[], int i, int n);

int main() {
  int vet[] = {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10};

  imprime(vet, 0, 10);
  printf("\n");
}

void imprime(int v[], int i, int n) {
  if (i < n) {
    imprime(v, i + 1, n);
    printf("%d ", v[i]);
  }
}
```

Exercício

- Mostre o estado da pilha de memória durante a execução da função `Fibonacci` com a chamada `Fibonacci(5)`.
- Qual versão é mais eficiente para se calcular o n-ésimo número de Fibonacci? A recursiva ou iterativa?