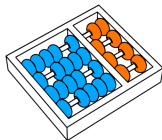


Partição de Grafos Eulerianos em Circuitos

Pedro Olímpio N. de O. Pinheiro



Orientador: Prof. Dr. Cid C. de Souza

Coorientador: Prof. Dr. Zanoni Dias

Sumário

- 1 Introdução
- 2 Partição em Circuitos
- 3 Objetivos
- 4 Metodologia
- 5 Resultados Preliminares
- 6 Plano de Trabalho

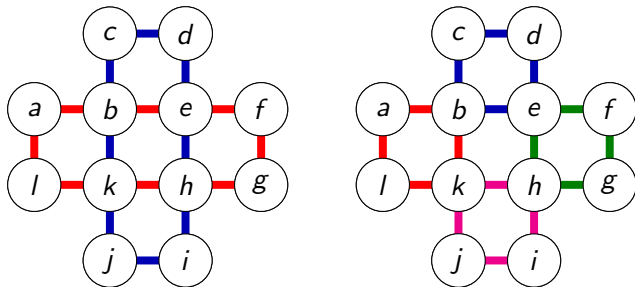
Introdução

- Problemas de partições em grafos
 - Arestas
 - 2p-cycle decompositions of some regular graphs and digraphs [2]
 - Triangle decompositions of planar graphs [6]
 - Graph decompositions [7]
 - Vértices
 - A note on the rainbow cycle cover problem [5]
- Partição em circuitos
- Partição em circuitos alternados
- Ordenação por reversão
 - Sorting permutations by reversals and eularian cycle decompositions [1]

Partição em Circuitos

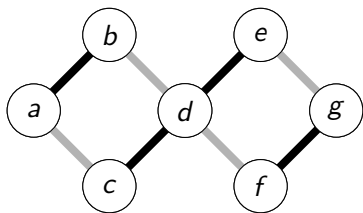
Partição em Circuitos

- Máxima Partição em Circuitos (MAX-ECD)
- Máxima Partição em Circuitos Alternados (MAX-ACD)
- Ordenação por Reversão (MIN-SBR)
- Todos são NP-difícil [1]



Exemplos de partições de grafos em circuitos

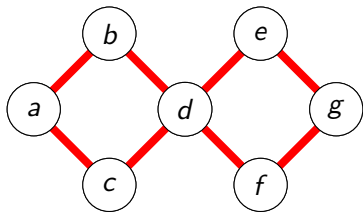
- $G = (V, P \cup C)$



Exemplo de grafo bicolorido

Partição em Circuitos

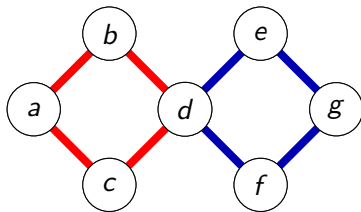
- No MAX-ECD sempre podemos trocar um circuito que utiliza o mesmo vértice mais de uma vez por múltiplos circuitos



Exemplo de partição de um grafo em circuitos

Partição em Circuitos

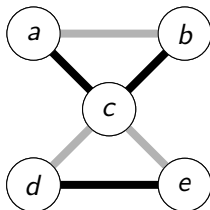
- No MAX-ECD sempre podemos trocar um circuito que utiliza o mesmo vértice mais de uma vez por múltiplos circuitos



Exemplo de partição de um grafo em circuitos

Partição em Circuitos

- Nem sempre verdade no MAX-ACD
- Porém, cada vértice é usado no máximo duas vezes em uma solução ótima



Exemplo de um grafo bicolorido com um circuito alternado que utiliza o vértice *c* duas vezes

Ordenação por Reversão

- Dado $\pi = (\pi_1, \pi_2, \dots, \pi_n)$.
- Operação de reversão ρ .

$$\pi = (1, 3, \underline{6}, 2, 4, 5)$$

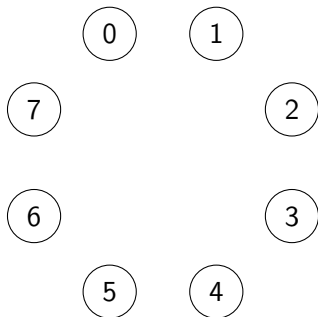
$$\pi\rho_1 = (1, 3, \underline{5}, 4, 2, 6)$$

$$\pi\rho_1\rho_2 = (1, \underline{3}, 2, 4, 5, 6)$$

$$\pi\rho_1\rho_2\rho_3 = (1, 2, 3, 4, 5, 6)$$

Grafo de *breakpoint*

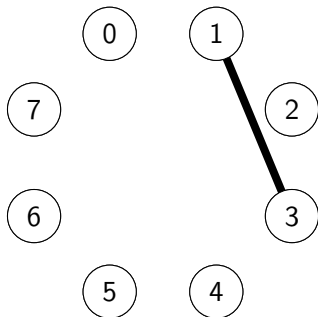
- O grafo de *breakpoint* associado a uma permutação está relacionado com o MIN-SBR [1]
- $\pi = (1, 3, 6, 2, 4, 5)$
- $\pi' = (0, 1, 3, 6, 2, 4, 5, 7)$



Exemplo de grafo de *breakpoint*

Grafo de *breakpoint*

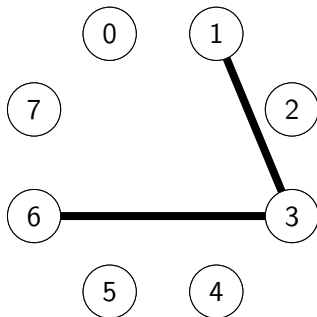
- O grafo de *breakpoint* associado a uma permutação está relacionado com o MIN-SBR [1]
- $\pi = (1, 3, 6, 2, 4, 5)$
- $\pi' = (0, 1, 3, 6, 2, 4, 5, 7)$



Exemplo de grafo de *breakpoint*

Grafo de *breakpoint*

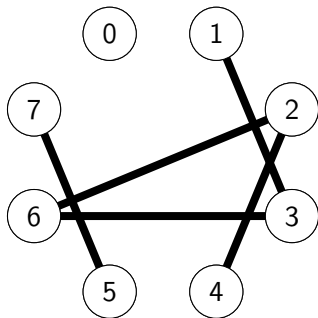
- O grafo de *breakpoint* associado a uma permutação está relacionado com o MIN-SBR [1]
- $\pi = (1, 3, 6, 2, 4, 5)$
- $\pi' = (0, 1, 3, 6, 2, 4, 5, 7)$



Exemplo de grafo de *breakpoint*

Grafo de *breakpoint*

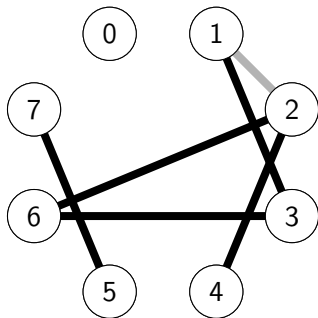
- O grafo de *breakpoint* associado a uma permutação está relacionado com o MIN-SBR [1]
- $\pi = (1, 3, 6, 2, 4, 5)$
- $\pi' = (0, 1, 3, 6, 2, 4, 5, 7)$



Exemplo de grafo de *breakpoint*

Grafo de *breakpoint*

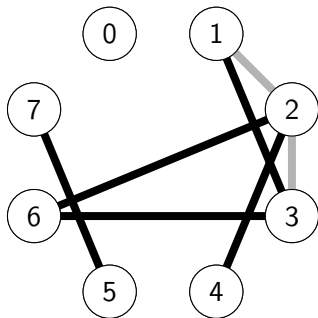
- O grafo de *breakpoint* associado a uma permutação está relacionado com o MIN-SBR [1]
- $\pi = (1, 3, 6, 2, 4, 5)$
- $\pi' = (0, 1, 3, 6, 2, 4, 5, 7)$



Exemplo de grafo de *breakpoint*

Grafo de *breakpoint*

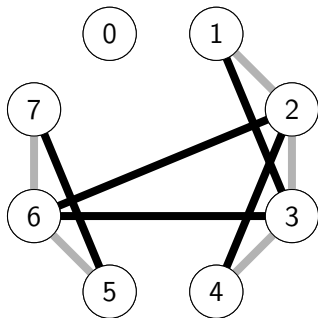
- O grafo de *breakpoint* associado a uma permutação está relacionado com o MIN-SBR [1]
- $\pi = (1, 3, 6, 2, 4, 5)$
- $\pi' = (0, 1, 3, 6, 2, 4, 5, 7)$



Exemplo de grafo de *breakpoint*

Grafo de *breakpoint*

- O grafo de *breakpoint* associado a uma permutação está relacionado com o MIN-SBR [1]
- $\pi = (1, 3, 6, 2, 4, 5)$
- $\pi' = (0, 1, 3, 6, 2, 4, 5, 7)$



Exemplo de grafo de *breakpoint*

Partição em Circuitos

- Redução do MAX-ACD para o MAX-ECD não mantém aproximações
- Redução do MAX-ECD para o MAX-ACD mantém aproximações
- $d(\pi) \geq b(\pi) - c(\pi)$ [1]
 - $d(\pi)$ = número mínimo de reversões para ordenar π
 - $b(\pi)$ = número de arestas pretas no grafo de *breakpoint* de π
 - $c(\pi)$ = tamanho da maior partição em circuitos alternados do grafos de *breakpoint* de π
- $d(\pi) > b(\pi) - c(\pi)$ com probabilidade $\Theta(1/n^5)$

Objetivos

Objetivos

- Propor algoritmos heurísticos e exatos para o MAX-ECD;
- Propor algoritmos heurísticos e exatos para o MAX-ACD;
- Criar instâncias para MAX-ECD e MAX-ACD para formar um *benchmark* de domínio público;
- Construir algoritmos para o MIN-SBR usando os algoritmos propostos para o MAX-ECD e MAX-ACD.

Metodologia

Modelo de Programação Linear Inteira para o MAX-ECD

$$\max \sum_{c \in I_C} x_c \quad (1)$$

s.a.:

$$\sum_{(u,v) \in E} (y_{cuv} + y_{cvu}) \geq x_c \quad \forall c \in I_C \quad (2)$$

$$y_{cuv} + y_{cvu} \leq x_c \quad \forall c \in I_C, \forall (u,v) \in E \quad (3)$$

$$\sum_{c \in I_C} (y_{cuv} + y_{cvu}) = 1 \quad \forall (u,v) \in E \quad (4)$$

$$\sum_{(u,v) \in E} y_{cuv} = \sum_{(v,u) \in E} y_{cvu} \quad \forall u \in V, \forall c \in I_C \quad (5)$$

Modelo de Programação Linear Inteira para o MAX-ECD

$$\sum_{(u,v) \in E} y_{cuv} \leq x_c \quad \forall u \in V, \forall c \in I_C \quad (6)$$

$$x_{c+1} \leq x_c \quad \forall c \in I_C \setminus \{ \lfloor |E|/3 \rfloor \} \quad (7)$$

$$x_c \in \{0, 1\} \quad \forall c \in I_C \quad (8)$$

$$y_{cuv} \in \{0, 1\} \quad \forall (u, v) \in E, \forall c \in I_C \quad (9)$$

Modelo de Programação Linear Inteira para o MAX-ACD

$$\sum_{(u,v) \in E} y_{cuv} = \sum_{(v,u) \in E} y_{cvu} \quad \forall u \in V, \forall c \in I_C \quad (5)$$

trocamos por

$$\sum_{(u,v) \in P} y_{cuv} = \sum_{(v,u) \in C} y_{cvu} \quad \forall u \in V, \forall c \in I_C \quad (10)$$

$$\sum_{(u,v) \in C} y_{cuv} = \sum_{(v,u) \in P} y_{cvu} \quad \forall u \in V, \forall c \in I_C \quad (11)$$

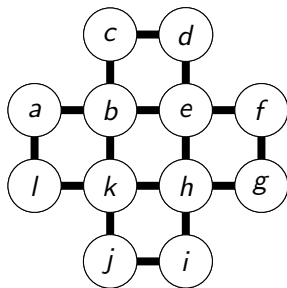
Modelo de Programação Linear Inteira para o MAX-ACD

$$\sum_{(u,v) \in E} y_{cuv} \leq x_c \quad \forall u \in V, \forall c \in I_C \quad (6)$$

trocamos por

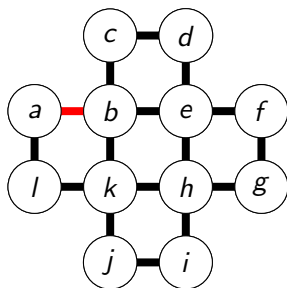
$$\sum_{(u,v) \in E} y_{cuv} \leq 2x_c \quad \forall u \in V, \forall c \in I_C \quad (12)$$

Heurística Construtiva para o MAX-ECD



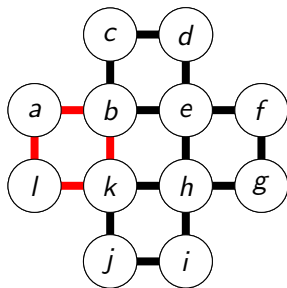
Exemplo de uma partição de um grafo em circuitos encontrada pelo algoritmo guloso

Heurística Construtiva para o MAX-ECD



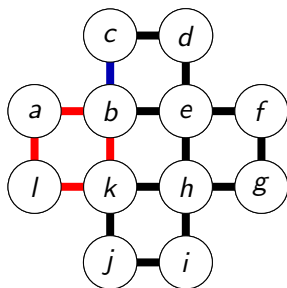
Exemplo de uma partição de um grafo em circuitos encontrada pelo algoritmo guloso

Heurística Construtiva para o MAX-ECD



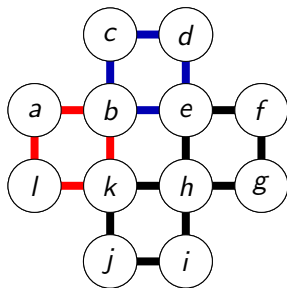
Exemplo de uma partição de um grafo em circuitos encontrada pelo algoritmo guloso

Heurística Construtiva para o MAX-ECD



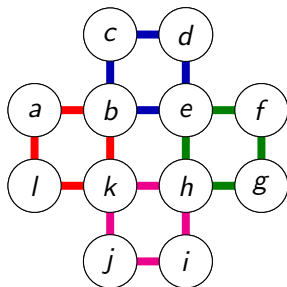
Exemplo de uma partição de um grafo em circuitos encontrada pelo algoritmo guloso

Heurística Construtiva para o MAX-ECD



Exemplo de uma partição de um grafo em circuitos encontrada pelo algoritmo guloso

Heurística Construtiva para o MAX-ECD



Exemplo de uma partição de um grafo em circuitos encontrada pelo algoritmo guloso

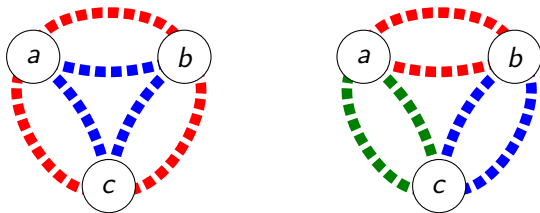
Busca Tabu

- Busca Tabu foi proposta por Glover [3, 4]

Algoritmo 1 Heurística Busca Tabu

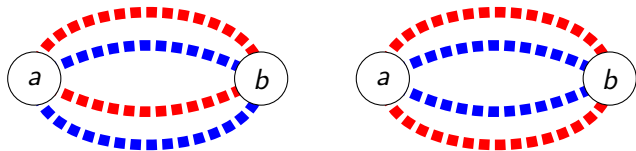
- 1: Escolha $x \in X$
- 2: $x^* \leftarrow x$
- 3: $T \leftarrow \emptyset$
- 4: **enquanto** $S(x) \setminus T \neq \emptyset$ e condição de parada não satisfeita **faça**
- 5: Escolha s_k de forma que
$$s_k(x) = \arg \max_{s \in S(x) \setminus T} \{c(s(x))\} \quad (13)$$
- 6: $x \leftarrow s_k(x)$
- 7: Atualize T
- 8: **se** $c(x) > c(x^*)$ **então**
- 9: $x^* \leftarrow x$
- 10: **fim se**
- 11: **fim enquanto**
- 12: **devolve** x^*

Busca Tabu para MAX-ECD



Primeiro movimento da Busca Tabu

Busca Tabu para MAX-ECD



Segundo movimento da Busca Tabu

Resultados Preliminares

Resultados Preliminares

- Resolvedor Gurobi Optimization
- Linguagem de programação C++11
- Intel®Core™i7-8700T CPU com 12 núcleos de 2.40 GHz
- Memória RAM de 8 GB
- Sistema operacional Ubuntu 18.04.3
- Tempo limite de 10 minutos

Resultados Preliminares

- $n \in \{10, 20, 40, 80, 160\}$
- Distribuições de probabilidade:

Distribuição	Grau			
	2	4	6	8
1	0.50	0.50	-	-
2	0.25	0.50	0.25	-
3	0.25	0.25	0.25	0.25

Distribuições de probabilidade

- Para cada par (tamanho, distribuição) geramos 10 instâncias

Resultados Preliminares

Quantidade de Vértices	Distribuição de Probabilidade	Heurística Construtiva	Busca Tabu	PLI
10	1	3,2	3,3	3,3
	2	5,1	5,5	5,5
	3	7,1	7,2	7,4
20	1	5,5	5,8	5,9
	2	8,1	9,4	9,8
	3	12,1	13,3	13,2
40	1	7,9	9,7	8,9
	2	14,2	16,9	15,2
	3	19,9	22,6	12,0
80	1	13,7	16,4	3,6
	2	23,5	28,0	3,4
	3	34,9	40,6	3,6
160	1	22,1	26,8	1,4
	2	39,6	47,0	1,0
	3	59,7	70,8	1,0

Média dos resultados por algoritmo.

Resultados Preliminares

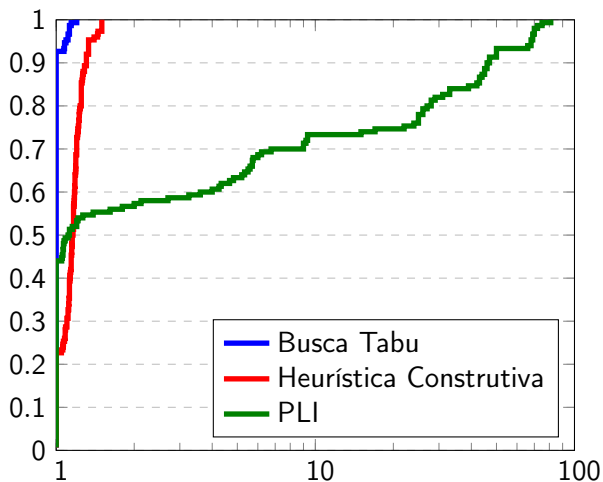


Gráfico de *performance profile*

Resultados Preliminares

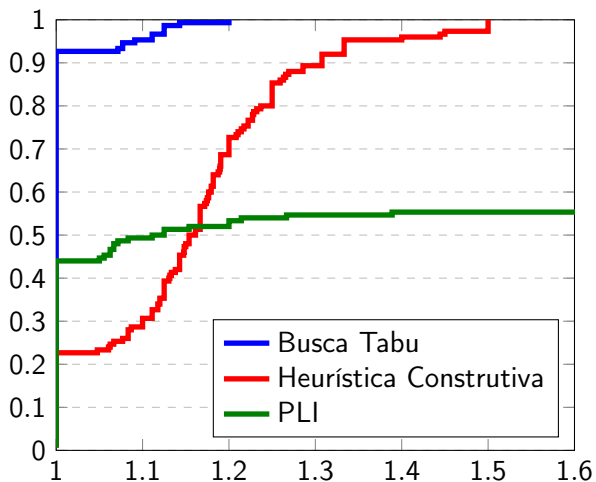


Gráfico de *performance profile*

Plano de Trabalho

Plano de Trabalho

	2019											2020												2021	
	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	1	2	
A	•	•	•	•	•	•	•	•	•																
B		•	•	•	•	•	•	•	•	•															
C						•	•																		
D		•	•	•	•	•																			
E								•																	
F													•	•	•	•									

Cronograma de atividades

- A. Obtenção dos créditos obrigatórios do programa de mestrado
- B. Realização da revisão bibliográfica
- C. Geração de instâncias
- D. Escrita do Exame de Qualificação de Mestrado
- E. Realização do Exame de Qualificação de Mestrado
- F. Participação no Programa de Estágio Docente (PED)

Plano de Trabalho

	2019												2020												2021	
	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	1	2		
G					•	•	•	•	•	•	•	•														
H													•	•	•	•	•	•								
I																		•	•	•	•					
J												•	•					•	•		•	•				
K												•	•					•	•		•	•	•			
L																								•		

Cronograma de atividades

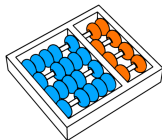
- G. Desenvolvimento de algoritmos para o MAX-ECD
- H. Desenvolvimento de algoritmos para o MAX-ACD
- I. Desenvolvimento de algoritmos para o MIN-SBR
- J. Análise dos resultados
- K. Escrita da dissertação
- L. Defesa da dissertação

Referências

- [1] A. Caprara. Sorting permutations by reversals and Eulerian cycle decompositions. *SIAM Journal on Discrete Mathematics*, 12(1): 91–110, 1999.
- [2] S. Ganesamurthy and P. Paulraja. $2p$ -cycle decompositions of some regular graphs and digraphs. *Discrete Mathematics*, 341(8):2197–2210, 2018.
- [3] F. W. Glover. Tabu Search - Part I. *INFORMS Journal on Computing*, 1(3):190–206, 1989.
- [4] F. W. Glover. Tabu Search - Part II. *INFORMS Journal on Computing*, 2(1):4–32, 1990.
- [5] J. Moreno, S. Martins, and Y. Frota. A note on the rainbow cycle cover problem. *Networks*, 73(1):38–47, 2019.
- [6] C. M. Mynhardt and C. M. van Bommel. Triangle decompositions of planar graphs. *Discussiones Mathematicae Graph Theory*, 36(3): 643–659, 2016.
- [7] C. A. Rodger. Graph decomposition. *Le Matematiche*, 45(1):119–140, 1990.

Partição de Grafos Eulerianos em Circuitos

Pedro Olímpio N. de O. Pinheiro



Orientador: Prof. Dr. Cid C. de Souza

Coorientador: Prof. Dr. Zanoni Dias