UNICAMP
Universidade Estadual de Campinas
Instituto de Computação

RECOLORAÇÃO CONVEXA DE GRAFOS

Exame de Qualificação de Mestrado

26 de Abril de 2018

Ana Paula dos Santos Dantas
Orientador: Prof. Dr. Zanoni Dias
Coorientador: Prof. Dr. Cid Carvalho de Souza

Instituto de Computação - IC
Unicamp

ROTEIRO

INTRODUÇÃO

INTRODUÇÃO

Árvores filogenéticas

- → Binárias;
- → Características comuns entre organismos;
- → Versão simples:
    - ◇ uma característica e um estado.

Exemplos

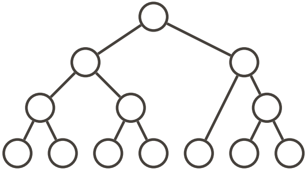

Figura 1: Árvore filogenética.

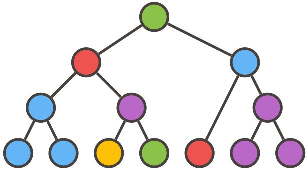

Figura 2: Coloração em árvore filogenética.

INTRODUÇÃO

Coloração

- → Total $C : V \to \mathcal{C}$;
- → Parcial $C : V \to \mathcal{C} \cup \{\emptyset\}$.

Exemplos

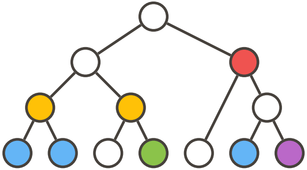

Figura 3: Coloração parcial.

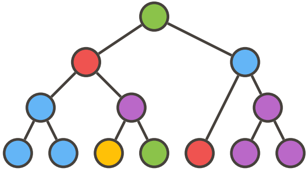

Figura 4: Coloração Total.

INTRODUÇÃO

Convexidade

- → Toda classe de cor induz um subgrafo conexo;
- → Não ocorreu convergência ou reversão;
- → Erros na construção da árvore ou na classificação;
- → Distância de Recoloração;
- → Característica de uma coloração parcial (boa) ou total.

Exemplos

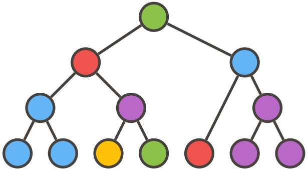

Figura 5: Coloração não convexa.

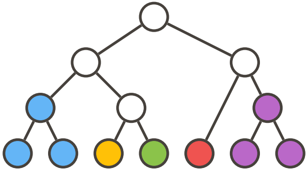

Figura 6: Coloração boa.

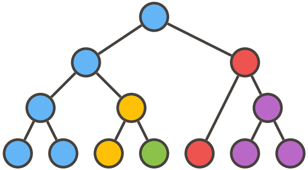

Figura 7: Coloração convexa total.

RECOLORAÇÃO CONVEXA

CAMINHOS

Recoloração Convexa de Caminhos (Convex Path Recoloring - CPR)

Entrada: $(P,\ \mathcal{C},\ C,\ w)$
Objetivo: minimizar o custo de recoloração
Saída: coloração boa (C^*)

- $\rightarrow$ NP-difícil [1];
- $\rightarrow$ 2-aproximação de Moran e Snir [2];
- $\rightarrow$ Modelo Programação Linear Inteira (PLI) de Lima e Wakabayashi [3];
- $\rightarrow$ Até dois vértices por cor:
  - $\diamond$ Conhecido como 2-CPR;
  - $\diamond$ $5/4$-aproximação [4].

CAMINHOS

Exemplo de instância:

Figura 8: Coloração não-convexa.

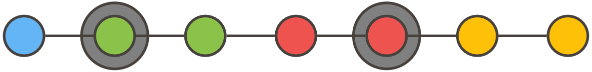

Figura 9: Coloração convexa.

ÁRVORES

Recoloração Convexa de Árvores (Convex Tree Recoloring - CTR)

Entrada: $(T, \mathcal{C}, \ C, \ w)$
Objetivo: minimizar o custo de recoloração
Saída: coloração boa (C^*)

- $\rightarrow$ NP-difícil [1];
- $\rightarrow$ $(2 + \epsilon)$-aproximação de Bar-Yehuda, Feldman e Rawitz [5];
- $\rightarrow$ Modelo PLI de Campêlo *et al.* [6];
- $\rightarrow$ Modelo PLI de Chopra *et al.* [7];
- $\rightarrow$ Até dois vértices por cor:
  - $\diamond$ Conhecido como 2-CTR;
  - $\diamond$ NP-difícil [1].

ÁRVORES

Exemplo de instância:

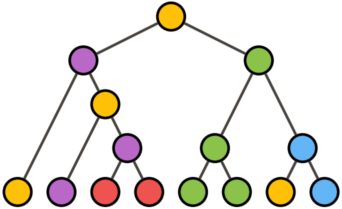

Figura 10: Coloração não convexa.

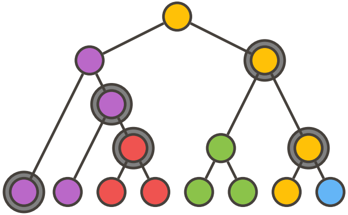

Figura 11: Recoloração convexa.

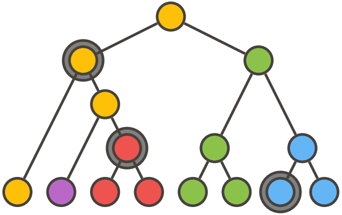

Figura 12: Recoloração convexa mínima.

APENAS FOLHAS COLORIDAS

Recoloração Convexa de Árvores com Apenas Folhas Coloridas (Convex Leaf Colored Trees Recoloring - CLR)

Entrada: $(T,\ \mathcal{C},\ C,\ w)$, tal que $C(v) \in \mathcal{C}$ se v é um vértice folha e
$C(v) = \emptyset$, caso contrário
Objetivo: minimizar o custo de recoloração
Saída: coloração boa (C^*)

$\rightarrow$ NP-difícil [1];
$\rightarrow$ Algoritmo linear para decidir se precisa recolorir de Bachoore e Bodlaender [8];
$\rightarrow$ Estratégia de *branching* de Bachoore e Bodlaender [8];
$\rightarrow$ Até três vértices por cor:
- $\diamond$ Conhecido como 3-CLR;
- $\diamond$ Polinomial, provado por Kanj e Kratsch [9];
- $\diamond$ Redução ao problema de conjuntos independentes em grafos cordais.

APENAS FOLHAS COLORIDAS

Exemplo de instância:

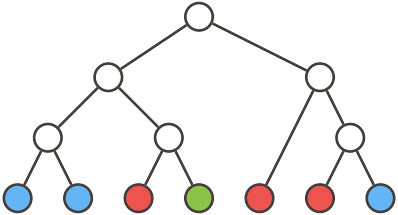

Figura 13: Coloração parcial não convexa.

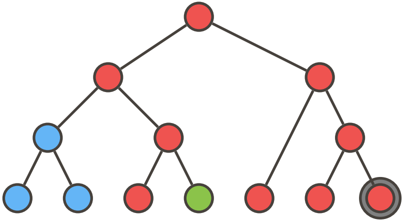

Figura 14: Coloração total convexa.

GRAFOS GERAIS

Recoloração Convexa (Convex Recoloring - CR)

Entrada: $(G, \mathcal{C}, C, w)$
Objetivo: minimizar o custo de recoloração
Saída: coloração boa (C^*)

$\rightarrow$ NP-difícil[10];
$\rightarrow$ Não pode ser aproximado com um fator logarítmico [6];
$\rightarrow$ Modelo PLI de Campêlo *et al.* [6];
$\rightarrow$ Modelo PLI com geração de colunas de Moura [11].

RECOLORAÇÃO CONVEXA RESTRITA

Caso específico da Recoloração Convexa em grafos gerais aplicado a redes de computadores:

→ Um grafo modela a topologia da rede;

→ Vértices representam roteadores ou clientes;

→ As características são serviços:

  ◇ um cliente usa um serviço;
  ◇ um roteador provê um serviço;

→ Um vértice cliente não pode ser recolorido, apenas descolorido.

RECOLORAÇÃO CONVEXA RESTRITA

Recoloração Convexa Restrita (Minimum Restricted Convex Recoloring Problem - MRRP)

Entrada: $(G = (V_r \cup V_c, E),\ \mathcal{C},\ C,\ w)$
Objetivo: minimizar o custo de recoloração
Saída: coloração boa (C^*), tal que para todo vértice cliente $v \in V_c$,

$C^*(v) = C(v)$ ou $C^*(v) = \emptyset$;

- $\rightarrow$ NP-difícil[12];
- $\rightarrow$ $(2 + \epsilon)$-aproximação para grafos com *treewidth* limitado de Kammer e Tholey [12];
- $\rightarrow$ Casos polinomiais em grafos com *treewidth* limitado:
  - ◇ Até três vértices por cor [12];
  - ◇ Número de cores da ordem de $\log(n)$ [12].

RECOLORAÇÃO CONVEXA RESTRITA

Exemplo de instância:

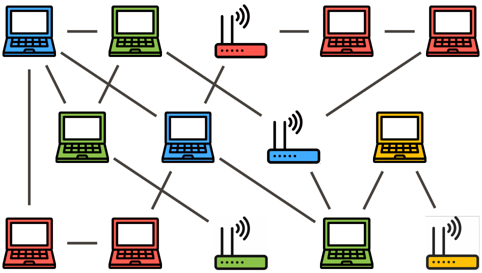

Figura 15: Coloração total não convexa.

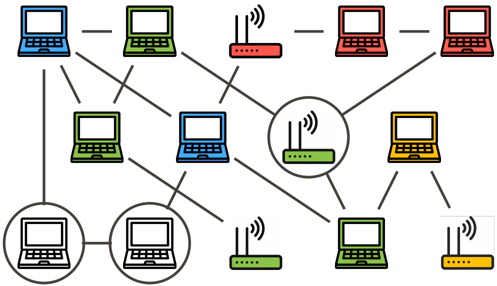

Figura 16: Coloração convexa.

RECOLORAÇÃO CONVEXA EM BLOCOS

Recoloração Convexa em Blocos

Entrada: $(G, \mathcal{C}, C)$

Objetivo: minimizar o número de classes de cores que perdem um vértice

Saída: coloração boa (C^*)

$\rightarrow$ Polinomial em grafos com *treewidth* limitado [12];

$\rightarrow$ Algoritmo exato de Kammer e Tholey [12].

RECOLORAÇÃO CONVEXA EM BLOCOS

Exemplo de instância:

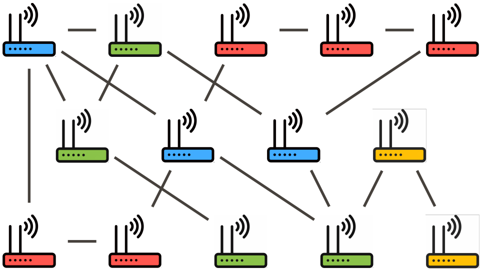

Figura 17: Coloração total não convexa.

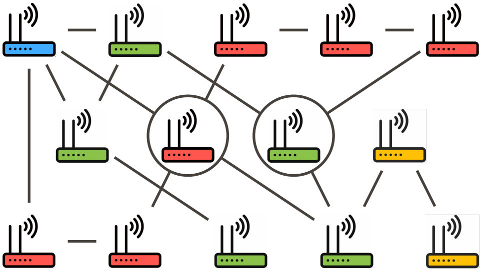

Figura 18: Coloração total convexa.

OBJETIVOS

OBJETIVOS

→ Estudo da recoloração convexa em árvores e em grafos gerais:
- ◇ Modelos matemáticos;
- ◇ Meta-Heurísticas baseado em *Greedy Randomized Adaptive Search Procedure* (GRASP);
- ◇ Adaptações para as versões CLR, MRRP e MBRP.

METODOLOGIA

METODOLOGIA

- → Implementação do modelo matemático e criação de uma meta-heurística GRASP para o CTR;
  - ◇ Experimentação com instâncias do CLR.
- → Modelagem matemática e criação de uma meta-heurística GRASP para o CR;
  - ◇ Adaptação do modelo e da meta-heurística para os problemas MRRP e MBRP.
- → Comparação das meta-heurísticas e dos modelos.

PLANO DE TRABALHO

PLANO DE TRABALHO

	2017					2018												2019						
	A	S	O	N	D	J	F	M	A	M	J	J	A	S	O	N	D	J	F	M	A	M	J	J
1	*	*	*	*	*			*	*	*	*	*												
2		*	*	*	*	*	*			*			*			*			*			*		
3						*	*	*																
4									*															
5													*	*	*	*	*							
6							*	*																
7									*	*	*													

Tabela 1: Cronograma de atividades (1/2).

1. Obtenção de créditos obrigatórios em disciplinas do programa de mestrado;
2. Revisão bibliográfica;
3. Escrita da proposta de mestrado;
4. Exame de Qualificação de Mestrado;
5. Participação no Programa de Estágio Docente (PED);
6. Implementação de modelos para CTR;
7. Criação do Algoritmo GRASP para CTR;

PLANO DE TRABALHO

	2017					2018												2019						
	A	S	O	N	D	J	F	M	A	M	J	J	A	S	O	N	D	J	F	M	A	M	J	J
8												*	*	*										
9															*	*	*							
10																		*	*	*				
11											*	*				*	*			*	*			
12												*	*				*	*			*	*	*	
13																							*	
14																								*

Tabela 2: Cronograma de atividades (2/2).

8. Modelagem do problema de CR;
9. Criação do Algoritmo GRASP para o problema de CR em grafos gerais;
10. Adaptação do modelo e do GRASP aos problemas de MRRP e MBRP;
11. Análise dos resultados;
12. Escrita da dissertação;
13. Revisão da dissertação;
14. Defesa da dissertação.

RESULTADOS PRELIMINARES

RESULTADOS PRELIMINARES

- → Implementação do modelo de Chopra *et al.* [7];
- → Instâncias originais cedidas por Chopra *et al.* [7];
  - ◇ Processo de criação desenvolvido por Campêlo *et al.* [13];
  - ◇ p_c é a probabilidade de um vértice não receber a cor do pai;
  - ◇ p_n é a probabilidade de ruído.
- → Instâncias modificadas para o problema CLR;
- → Experimentos executados usando:
  - ◇ CPLEX 12.8;
  - ◇ *Single thread* e sem funções de *pre-solve*;
  - ◇ Máquina com 16GB de memória RAM e sistema operacional ArchLinux.

RESULTADOS PRELIMINARES

$n \setminus p_c$	**0.5**	**5**	**50**	$n \setminus p_c$	**0.5**	**5**	**50**
301	11.59	47.60	-57.73*	**981**	6.42	46.10*	-67.96*
213	-9.82	33.82	-42.49*	**1441**	12.74	42.03	-85.33*
404	-6.46	29.14	-62.40*	**1838**	32.62	47.26*	-73.38*
567	-20.55	12.49	-35.99*	**2025**	24.47	45.60*	-57.06*
636	-6.49	41.65	-73.34*	**2387**	53.00	34.31	-78.30*
710	4.67	27.26	-71.32*	**2409**	28.78	35.49	-72.27*
813	12.86	36.95*	-73.89*	**2632**	48.83	52.29*	-71.81*

Tabela 3: Média da diferença percentual do tempo de execução entre as instâncias para o problema CLR e CTR, para cada instância com p_c fixo e p_n variado.

*Número de cores menor no CLR.

REFERÊNCIAS

[1] S. Moran and S. Snir, “Convex Recolorings of Strings and Trees: Definitions, Hardness Results and Algorithms,” *Journal of Computer and System Sciences*, vol. 74, no. 5, pp. 850–869, 2008.

[2] S. Moran and S. Snir, “Efficient Approximation of Convex Recolorings,” *Journal of Computer and System Sciences*, vol. 73, no. 7, pp. 1078–1089, 2007.

[3] K. R. Lima and Y. Wakabayashi, “Convex Recoloring of Paths,” *Discrete Applied Mathematics*, vol. 164, pp. 450–459, 2014.

[4] R. Bar-Yehuda, G. Kutiel, and D. Rawitz, “1.5-Approximation Algorithm for the 2-Convex Recoloring Problem,” in *Proceedings of the 26th International Workshop on Combinatorial Algorithms (IWOCA'2015)*, Theoretical Computer Science and General Issues, (Cham, Switzerland), pp. 299–311, Springer International Publishing, 2015.

[5] R. Bar-Yehuda, I. Feldman, and D. Rawitz, "Improved Approximation Algorithm for Convex Recoloring of Trees," *Theory of Computing Systems*, vol. 43, no. 1, pp. 3–18, 2008.

[6] M. B. Campêlo, K. R. Lima, P. F. S. Moura, and Y. Wakabayashi, "Polyhedral Studies on the Convex Recoloring Problem," *Electronic Notes in Discrete Mathematics*, vol. 44, pp. 233–238, 2013.

[7] S. Chopra, B. Filipecki, K. Lee, M. Ryu, S. Shim, and M. V. Vyve, "An Extended Formulation of the Convex Recoloring Problem on a Tree," *Mathematical Programming*, vol. 165, no. 2, pp. 529–548, 2017.

[8] E. H. Bachoore and H. L. Bodlaender, "Convex Recoloring of Leaf-Colored Trees," Tech. Rep. UU-CS-2006-010, Department of Information and Computing Sciences, Utrecht University, 2006.

[9] I. A. Kanj and D. Kratsch, “Convex Recoloring Revisited: Complexity and Exact Algorithms,” in *Proceedings of the 15th International Computing and Combinatorics Conference (COCOON'2009)*, Lecture Notes in Computer Science, (Berlin, Heidelberg), pp. 388–397, Springer Berlin Heidelberg, 2009.

[10] S. Moran, S. Snir, and W.-K. Sung, “Partial Convex Recolorings of Trees and Galled Networks: Tight Upper and Lower Bounds,” *ACM Transactions on Algorithms*, vol. 7, no. 4, p. 42, 2011.

[11] P. F. S. Moura, *Graph Colorings and Digraph Subdivisions*. PhD thesis, Instituto de Matemática e Estatística, Universidade de São Paulo, 2017.

[12] F. Kammer and T. Tholey, “The Complexity of Minimum Convex Coloring,” *Discrete Applied Mathematics*, vol. 160, no. 6, pp. 810–833, 2012.

[13] M. B. Campêlo, A. S. Freire, K. R. Lima, P. F. S. Moura, and Y. Wakabayashi, "The Convex Recoloring Problem: Polyhedra, Facets and Computational Experiments," *Mathematical Programming*, vol. 156, no. 1-2, pp. 303–330, 2016.

Universidade Estadual de Campinas
Instituto de Computação

RECOLORAÇÃO CONVEXA DE GRAFOS

Exame de Qualificação de Mestrado

26 de Abril de 2018

Ana Paula dos Santos Dantas
Orientador: Prof. Dr. Zanoni Dias
Coorientador: Prof. Dr. Cid Carvalho de Souza

Instituto de Computação - IC
Unicamp