# Elementos de Matemática Discreta para Computação

Anamaria Gomide

∧

Jorge Stolfi

Versão Preliminar de 1 de julho de 2014

© 2011

# Sumário

**Prefácio** **11**
Agradecimentos . . . . . 14

**1 Introdução à lógica matemática** **15**
1.1 Como ter certeza? . . . . . 15
1.2 A invenção da lógica . . . . . 15
1.3 Euclides e demonstrações geométricas . . . . . 15
1.4 Álgebra . . . . . 17
1.5 As linguagens da lógica matemática . . . . . 17

**2 Teoria dos Conjuntos** **19**
2.1 Especificando conjuntos . . . . . 20
2.1.1 Definições circulares e contraditórias . . . . . 20
2.2 Igualdade de conjuntos . . . . . 21
2.3 Conjunto vazio . . . . . 21
2.4 Relação de inclusão . . . . . 21
2.5 Cardinalidade . . . . . 21
2.6 Operações com conjuntos . . . . . 22
2.6.1 União e interseção . . . . . 22
2.6.2 Diferença, universo, e complemento . . . . . 22
2.6.3 Diferença simétrica . . . . . 22
2.6.4 Diagrama de Venn . . . . . 23
2.6.5 Propriedades das operações com conjuntos . . . . . 23
2.7 Conjuntos de conjuntos . . . . . 25
2.8 Conjunto potência . . . . . 25
2.9 Partição . . . . . 25
2.10 Produto cartesiano . . . . . 26
2.10.1 Produto cartesiano de dois conjuntos . . . . . 26
2.10.2 Produto cartesiano de vários conjuntos . . . . . 26
2.11 Exercícios . . . . . 27

**3 Lógica matemática** **29**
3.1 Lógica proposicional . . . . . 29
3.1.1 Proposições e valores lógicos . . . . . 29
3.1.2 Conectivos lógicos e proposições compostas . . . . . 30

3.1.3 Notação para cálculo proposicional . . . 31
3.1.4 Operador de conjunção . . . 31
3.1.5 Operador de disjunção . . . 32
3.1.6 Operador de negação . . . 32
3.1.7 Operador de implicação . . . 33
3.1.8 Operador de equivalência . . . 34
3.1.9 Operador de disjunção exclusiva . . . 35
3.1.10 Precedência dos operadores lógicos . . . 35
3.2 Afirmações auto-referentes . . . 37
3.3 Manipulação lógica de proposições . . . 38
3.3.1 Tautologias e contradições . . . 38
3.3.2 Equivalência lógica . . . 39
3.3.3 Equivalências lógicas importantes . . . 40
3.3.4 Implicação lógica . . . 43
3.3.5 Equivalência em contexto específico . . . 44
3.4 Síntese de proposições . . . 45
3.4.1 Formas normais disjuntivas e conjuntivas . . . 45
3.4.2 Sistemas completos de operadores . . . 46
3.5 Dualidade lógica . . . 46
3.6 Lógica de Predicados . . . 47
3.6.1 Quantificação universal . . . 48
3.6.2 Quantificação existencial . . . 48
3.6.3 Quantificador de existência e unicidade . . . 49
3.6.4 Quantificação sobre o conjunto vazio . . . 50
3.6.5 Cálculo de predicados . . . 50
3.6.6 Negação de quantificadores . . . 50
3.6.7 Distributividade de quantificadores . . . 51
3.6.8 Traduzindo linguagem natural para proposições quantificadas . . . 51
3.6.9 Mudança de domínio . . . 53
3.6.10 Quantificadores múltiplos . . . 54
3.6.11 Escopo de um quantificador . . . 56
3.6.12 Omissão do domínio . . . 56

**4 Métodos de Demonstração 59**
4.1 Introdução . . . 59
4.1.1 Definições . . . 60
4.1.2 Conjecturas . . . 61
4.1.3 Métodos de demonstração . . . 61
4.2 Demonstração de implicações . . . 62
4.2.1 Método direto . . . 62
4.2.2 Método da contrapositiva . . . 63
4.2.3 Método de redução ao absurdo . . . 64
4.2.4 Implicação com tese conjuntiva . . . 65
4.2.5 Implicação com hipótese disjuntiva . . . 65
4.3 Demonstrações de afirmações “se e somente se” . . . 67

4.4 Regras para quantificadores universais . . . 69
4.4.1 Instanciação universal . . . 69
4.4.2 Generalização universal . . . 69
4.4.3 Demonstração por vacuidade . . . 69
4.5 Regras para quantificadores existenciais . . . 70
4.5.1 Instanciação existencial . . . 70
4.5.2 Demonstrações construtivas . . . 70
4.5.3 Demonstrações não construtivas . . . 72
4.5.4 Demonstração de existência e unicidade . . . 72
4.5.5 Demonstração de falsidade por contra-exemplo . . . 73

**5 Indução Matemática 75**
5.1 Introdução . . . 75
5.2 Princípio de Indução Matemática . . . 76
5.2.1 Formulação do PIM usando conjuntos . . . 78
5.3 Generalizações da Indução Matemática . . . 78
5.3.1 Base genérica . . . 79
5.3.2 Passo genérico constante . . . 80
5.3.3 Troca de variável na hipótese . . . 80
5.3.4 Exercícios . . . 80
5.4 Usos indevidos da indução matemática . . . 81
5.5 Mais exemplos de indução matemática . . . 83
5.6 Princípio da Indução Completa . . . 85
5.6.1 Indução completa com base genérica . . . 86
5.6.2 Indução completa com vários casos na base . . . 86
5.6.3 Formulação do PIC usando conjuntos . . . 87
5.7 Exercícios . . . 88
5.8 Princípio da Boa Ordenação . . . 89
5.9 Formas equivalentes do princípio da indução . . . 89
5.9.1 PIM implica PBO . . . 90
5.9.2 PBO implica PIC . . . 90
5.9.3 PIC implica PIM . . . 91
5.10 Exercícios adicionais . . . 91

**6 Relações 93**
6.1 Conceitos básicos . . . 93
6.1.1 Domínio e imagem . . . 94
6.1.2 Restrição de relações . . . 95
6.1.3 Relações de identidade . . . 95
6.1.4 Relação inversa . . . 95
6.1.5 Imagem e imagem inversa de conjuntos sob uma relação . . . 96
6.2 Composição de relações . . . 96
6.2.1 Notação alternativa . . . 98
6.2.2 Composição com identidade . . . 98
6.2.3 Composição com a relação inversa . . . 98

6.2.4 Inversa da composição . . . 99
6.2.5 Composição e inclusão . . . 99
6.2.6 Potências de uma relação . . . 99
6.2.7 Potências negativas de uma relação . . . 100
6.3 Tipos de relações . . . 100
6.3.1 Composição e transitividade . . . 102
6.4 Representação de relações usando matrizes . . . 103
6.4.1 Matriz booleana de uma relação . . . 103
6.4.2 Operações com relações usando matrizes . . . 104
6.4.3 Propriedades de relações usando matrizes . . . 105
6.5 Fechos de uma relação . . . 105
6.5.1 Fecho reflexivo . . . 105
6.5.2 Fecho simétrico . . . 106
6.5.3 Fecho transitivo . . . 106
6.5.4 Fecho em geral . . . 108
6.6 Relações *n*-árias . . . 110
6.6.1 Definição . . . 110
6.6.2 Projeção . . . 110
6.6.3 Permutação de componentes . . . 111
6.6.4 Restrição . . . 111
6.6.5 Junção . . . 111

**7 Relações de ordem e equivalência 115**
7.1 Relações de ordem . . . 115
7.1.1 Relações de ordem estrita . . . 116
7.1.2 Ordem total . . . 117
7.1.3 Ordem lexicográfica . . . 117
7.1.4 Ordens “parciais” . . . 118
7.1.5 Diagrama de Hasse . . . 119
7.1.6 Elementos mínimos e máximos . . . 120
7.1.7 Elementos minimais e maximais . . . 122
7.2 Relações de equivalência . . . 124
7.2.1 Classes de equivalência . . . 124
7.2.2 Relações de equivalência e partições . . . 125

**8 Funções 129**
8.1 Conceito . . . 129
8.1.1 Domínio e imagem de uma função . . . 130
8.2 Inversa de função . . . 131
8.3 Imagem e imagem inversa de um conjunto . . . 131
8.4 Restrição . . . 131
8.5 Composição de funções . . . 132
8.5.1 Função idempotente . . . 133
8.6 Tipos de funções . . . 133
8.6.1 Função injetora . . . 133

8.6.2 Função sobrejetora . . . 134
8.6.3 Função bijetora . . . 134
8.7 Função permutação . . . 135
8.8 Funções piso e teto . . . 137
8.9 Fatorial e função gama . . . 138
8.10 Função característica . . . 139
8.11 Multiconjunto . . . 139
8.12 Sequências finitas . . . 140
8.12.1 Notação para sequências finitas . . . 140
8.12.2 Índice inicial padrão . . . 141
8.12.3 Comprimento . . . 141
8.12.4 Concatenação . . . 141
8.12.5 Subsequências e subcadeias . . . 142

**9 Somatórias e produtórias 143**
9.1 Introdução . . . 143
9.2 Somatórias básicas . . . 145
9.3 Manipulação de somatórias . . . 145
9.4 Somatórias múltiplas . . . 149
9.4.1 Mudança de ordem de somatórias . . . 149
9.4.2 Distributividade generalizada . . . 150
9.5 Majoração de somatórias . . . 151
9.5.1 Majoração dos termos . . . 151
9.5.2 Majoração por indução matemática . . . 151
9.5.3 Majoração por integrais . . . 153
9.5.4 Minoração por integrais . . . 155
9.6 Somas infinitas . . . 156
9.7 Produtórias . . . 157
9.8 Iteração de outras operações . . . 158

**10 Sequências infinitas e recorrências 159**
10.1 Sequências infinitas . . . 159
10.2 Especificando sequências infinitas . . . 159
10.3 Recorrência . . . 160
10.4 Resolução de recorrências . . . 161
10.4.1 Recorrência aditiva simples . . . 161
10.4.2 Recorrência multiplicativa simples . . . 162
10.4.3 Recorrências lineares homogêneas . . . 163
10.5 Recorrências lineares não homogêneas . . . 165
10.6 Majoração e minoração de recorrências . . . 166

**11 Contagem 169**
11.1 Contagem de relações . . . 170
11.2 Contagem de funções . . . 171
11.3 Princípio multiplicativo da contagem . . . 171

11.4 Permutações . . . 172
11.4.1 Fórmula de Stirling . . . 174
11.5 Arranjos . . . 174
11.6 Combinações . . . 175
11.6.1 Casos especiais . . . 176
11.6.2 Propriedades . . . 176
11.6.3 Fórmula do Binômio de Newton . . . 177
11.6.4 Fórmula recursiva . . . 178
11.6.5 Partições rotuladas e combinações com repetições . . . 179
11.7 Permutações e arranjos circulares . . . 180
11.8 Contagem por divisão . . . 181
11.9 Permutações e arranjos com elementos indistinguíveis . . . 181
11.10 Combinações múltiplas . . . 182
11.11 Princípio aditivo da contagem . . . 183
11.12 Princípio subtrativo da contagem . . . 184
11.13 Princípio da inclusão e exclusão . . . 185

**12 Probabilidade** **187**
12.1 Definição . . . 188
12.1.1 Distribuição uniforme . . . 188
12.1.2 Princípio da exclusão mútua . . . 189
12.1.3 Princípio da exaustão . . . 189
12.1.4 Princípio da complementaridade . . . 189
12.1.5 Princípio da exclusão e inclusão . . . 190
12.1.6 Princípio da independência . . . 190
12.1.7 Relação com a lógica clássica . . . 192
12.2 Variável aleatória . . . 192
12.2.1 Variáveis aleatórias independentes . . . 193
12.3 Valor esperado . . . 193
12.3.1 Propriedades do valor esperado . . . 195
12.4 Mediana . . . 196
12.5 Moda . . . 197
12.6 Variância e desvio padrão . . . 197
12.6.1 Propriedades da variância . . . 198
12.6.2 Desvio padrão . . . 198
12.6.3 Covariância . . . 199
12.6.4 Coeficiente de correlação . . . 200
12.7 Probabilidade condicional . . . 200
12.8 Inferência bayesiana . . . 201
12.9 Teoria da informação . . . 203
12.9.1 Capacidade de informação . . . 203
12.9.2 Quantidade de informação . . . 205
12.9.3 Quantidade esperada de informação . . . 205

**13 Introdução à Teoria de Grafos** **207**
13.1 Introdução . . . 207
13.2 Definição formal . . . 209
13.2.1 Grafo nulo e sem arestas . . . 210
13.2.2 Arestas paralelas e laços . . . 210
13.2.3 Grafos finitos e infinitos . . . 210
13.3 Conceitos fundamentais . . . 211
13.3.1 Incidência . . . 211
13.3.2 Adjacência . . . 211
13.3.3 Grau do vértice . . . 211
13.3.4 Grafos regulares . . . 213
13.3.5 Grafos completos . . . 213
13.4 Percursos em grafos . . . 214
13.4.1 Passeios, trilhas e caminhos . . . 214
13.4.2 Inversão e concatenação e de passeios . . . 214
13.4.3 Circuitos e ciclos . . . 215
13.4.4 Passeios orientados . . . 215
13.5 Subgrafos . . . 216
13.5.1 União e intersecção de subgrafos . . . 217
13.5.2 Grafos complementares . . . 218
13.6 Representação matricial de grafos . . . 218
13.6.1 Matriz de adjacência . . . 218
13.6.2 Matriz de incidência . . . 219
13.7 Isomorfismos de grafos . . . 219
13.7.1 Contagem de grafos . . . 222
13.8 Conexidade . . . 222
13.8.1 Conexidade em grafos não orientados . . . 222
13.8.2 Conexidade em grafos orientados . . . 223
13.9 Árvores . . . 224
13.10 Grafos bipartidos . . . 226
13.11 Grafos eulerianos . . . 226
13.12 Grafos hamiltonianos . . . 228
13.13 Grafos planares . . . 231
13.13.1 A fórmula de Euler para grafos planares . . . 232
13.13.2 O teorema de Kuratowski . . . 234
13.13.3 Grafo dual . . . 235
13.14 Coloração de grafos . . . 236
13.14.1 Coloração de mapas . . . 236
13.14.2 Coloração de grafos em geral . . . 237

**14 Cardinalidade de conjuntos** **239**
14.1 Conjuntos finitos . . . 240
14.2 Conjuntos infinitos . . . 240
14.3 Conjuntos enumeráveis e contáveis . . . 242
14.4 Cardinalidade dos números reais . . . 243

14.5 Comparação de cardinalidades . . . . . 244
14.5.1 Teorema de Cantor . . . . . 245
14.5.2 A hipótese do contínuo . . . . . 246
14.6 Cardinalidade e Computabilidade . . . . . 246

# Prefácio

**Objetivos e escopo.** Este livro pretende ser um texto introdutório a algumas áreas da matemática discreta que são de especial importância para cursos de computação, ao nível de graduação e de mestrado.

Excluímos do escopo deste livro os fundamentos da matemática do contínuo — cálculo diferencial e integral, equações diferenciais e integrais, álgebra linear, e geometria analítica — pois acreditamos que um bom currículo, para os cursos de computação, deve cobrir esses assuntos através de várias disciplinas específicas, ainda nos primeiros anos de graduação. Pela mesma razão, excluímos cálculo numérico, e limitamos nossa exposição de probabilidade e estatística aos conceitos fundamentais. Ainda pela mesma razão, evitamos completamente a área de algoritmos, computabilidade e complexidade, bem como assuntos específicos (e quase obrigatórios) de currículos de computação, como programação inteira, autômatos e linguagens formais.

Na verdade, cada um dos capítulos deste livro poderia ser coberto por uma disciplina separada do currículo de computação. Este livro deve ser visto, em primeiro lugar, como um " curso de alfabetização", que procura ensinar as definições e conceitos essenciais para comunicação técnica em teoria da computação.

Para atingir esse objetivo, tivemos que sacrificar a profundidade pela abrangência. Em um livro ou artigo sobre um assunto específico, é normal o autor escolher um conjunto de definições e notações, e usá-las consistentemente na obra toda, ignorando as outras escolhas possíveis. Mas esta atitude não seria adequada para este livro. Assim, por exemplo, dedicamos um bom espaço às múltiplas definições incompatíveis de conceitos fundamentais, como "número natural" (inclui ou não o zero?), "função", "grafo", e muitas outras, e às variações de notação que os estudantes podem vir a encontrar na literatura. Só depois dessas discussões é que adotamos uma definição ou notação específica, para uso no resto do livro.

Por outro lado, não nos preocupamos em enunciar, muito menos provar, os teoremas que são considerados fundamentais dessas áreas — exceto a título de exemplo de uso dos conceitos. Assim, nosso tratamento de grafos (capítulo 13) não pretende substituir disciplinas de teoria dos grafos, onde esses resultados devem ser cobertos em detalhe. Seu objetivo é apenas dar ao estudante familiaridade com os conceitos e vocabulário da área — para facilitar seu acompanhamento dessas disciplinas, e para que ele consiga entender e usar a linguagem de grafos em outras áreas da computação. O mesmo vale para todos os outros capítulos.

**Lógica matemática.** Professores das disciplinas dos cursos de computação, com conteúdo teórico, frequentemente observam a grande dificuldade que seus alunos tem em formalizar seu raciocínio. A raiz desse problema é a dificuldade que muitos alunos tem em perceber a diferença entre uma prova rigorosa e uma coleção de frases aleatórias e inconclusivas, mesmo que com vocabulário

matemático, que termina com a conclusão esperada.

Acontece que essa não é uma habilidade nata. Seu apredizado requer, além de anos de prática, o conhecimento dos fundamentos da lógica. Embora as demonstrações que se encontram na literatura (e que os professores esperam que os alunos produzam) quase nunca são *formais* — sequências de fórmulas lógicas, encadeadas por aplicações de regras de inferência — o que caracteriza uma prova rigorosa é o fato de que ela pode ser *formalizada*. Assim, a lógica é o esqueleto *invisível* que sustenta e caracteriza uma demonstração válida.

Por esse motivo, optamos por iniciar nosso livro com uma exposição da lógica matemática, nas suas duas formulações clássicas — a teoria de conjuntos, por um lado, e a lógica proposicional e cálculo de predicados, pelo outro. Estamos supondo que os leitores deste livro já tiveram contato com o conceito de conjuntos, graças a disciplinas anteriores; portanto não julgamos necessário dedicar mais que algumas páginas a esse assunto. Os leitores interessados numa abordagem mais profunda podem consultar por exemplo o livro de Halmos [6]. Por outro lado, acreditamos que poucos leitores conhecem o cálculo de proposições e predicados (apesar do uso de operações booleanas em programação), e os conceitos de axiomas, teoremas, e demonstrações formais. Por essa razão, dedicamos três capítulos inteiros (3, 4 e 5) a esses tópicos — sendo que o último é inteiramente dedicado a técnicas de prova por indução.

**Relações e funções.** Outro tópico ao qual resolvemos dedicar bastante espaço é o conceito de relação. Relações são muito usadas em todas as àreas teóricas e práticas da computação, incluindo autômatos e circuitos lógicos, estruturas e bancos de dados, redes e comunicações digitais, etc..

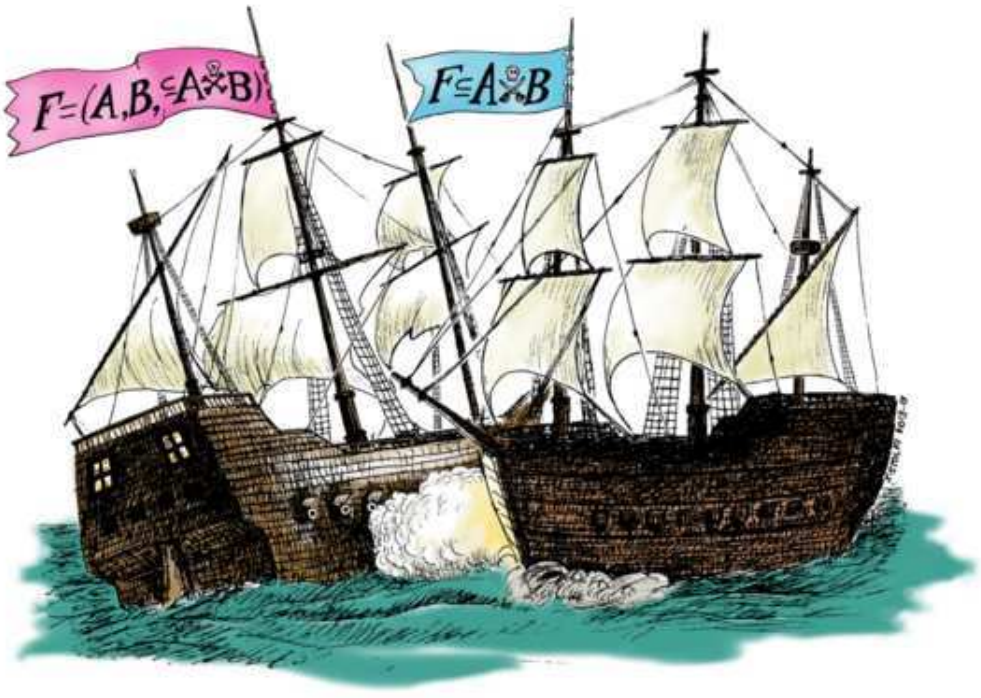



Figura 1: Debate acadêmico sobre definição de funções.

Na literatura há duas principais abordagens para este conceito. Segundo uma abordagem, uma relação entre dois conjuntos é uma tripla $(A, B, R)$ onde $A$ e $B$ são conjuntos, e $R$ é um subconjunto do produto cartesiano $A \times B$. Na outra abordagem, uma relação entre $A$ e $B$ é apenas um subconjunto de $A \times B$. Esta diferença tem inúmeras repercussões em conceitos derivados, e inclusive na linguagem. Por exemplo, na primeira abordagem a relação tem um domínio "nominal" ($A$), que é distinto de seu domínio "efetivo" (os elementos de $A$ que aparecem no lado esquerdo de pares de $R$). Na segunda abordagem, pelo contrário, existe apenas o domínio efetivo. A mesma observação vale para o contra-domínio. Na primeira abordagem existem infinitas relações vazias (com $R = \emptyset$), enquanto que na segunda só existe uma. Na primeira abordagem podemos dizer que uma relação é sobrejetora ou bijetora, enquanto que na segunda temos que especificar os conjuntos e dizer "sobrejetora em $B$" e "bijetora entre $A$ e $B$".

Cada abordagem tem suas vantagens e desvantagens. Constatamos inclusive que muitos livros textos são inconsistentes neste ponto, e adotam ora uma definição, ora outra, conforme as conveniências do momento. Debatemos muito qual destas duas abordagens deveríamos adotar para os capítulos seguintes (veja a figura 1.), e por fim resolvemos adotar a segunda (conjunto de pares, sem domínio e contra-domínio).

Enfrentamos um dilema semelhante na seção sobre relações de ordem, pois para esse conceito também há várias escolhas incompatíveis (ou mesmo ilógicas) de nomenclatura. Por exemplo, os termos "ordem parcial" e "ordem total" não são mutuamente exclusivos (como se esperaria pelo dicionário), mas um inclui o outro. E "relação de ordem estrita" não é um caso particular de relação de ordem, mas um conceito praticamente disjunto (uma é reflexiva e a outra é irreflexiva). Além disso, os termos "elemento mínimo" e "elemento máximo" são enganosos quando são aplicados à relação "$\geq$" (ou a outras relações sobre números que não "$\leq$"). Mas não cabe a este livro propor nomenclaturas mais consistentes; tudo o que podemos fazer é alertar o estudante para essas armadilhas.

**Somatórias e produtórias.** Dentro dos objetivos deste livro, nosso tratamento de somatórias e produtórias (capítulo 9) dá mais ênfase à "linguagem" do que a resultados avançados da teoria. Assim, tomamos cuidado de expor o leitor às várias convenções da notação, e procuramos ensinar as principais técnicas de manipulação de somatórias (como troca de índices e mudança de ordem de soma). Por outro lado, também procuramos desenvolver a intuição dos estudantes, apontando as analogias entre somatórias e integrais (que eles supostamente conhecem de cálculos diferenciais e integrais anteriores).

**Sequências e recorrências.** Procuramos seguir a mesma filosofia no capítulo 10, que trata de sequências definidas por recorrências. Além de apresentar a linguagem, enfatizamos a técnica geral de resolução de recorrências lineares homogêneas, que resolve muitos dos problemas encontrados em computação.

**Contagem.** A análise combinatória é fundamental tanto para a análise de algoritmos quanto para inúmeras áreas práticas, e deveria merecer uma disciplina à parte. Neste livro nos limitamos a rever os conceitos de permutações, arranjos e combinações, e o teorema da inclusão e exclusão. Embora esses assuntos sejam oficialmente vistos no ensino fundamental e médio, consideramos oportuno rever as definições e fórmulas básicas, especialmente à luz dos conceitos de indução e recorrências

vistos nos capítulos anteriores. Uma vez que problemas de contagem raramente admitem fórmulas simples e exatas, consideramos oportuno também apresentar a fórmula de aproximação de Stirling para a função fatorial.

**Cardinalidade de conjuntos infinitos.** A rigor, a teoria das cardinalidades infinitas tem pouca utilidade prática em computação. Porém, a distinção entre infinidades enumeráveis e não enumeráveis é relevante para a teoria da computação. Por exemplo, a existência de funções não computáveis decorre trivialmente da observação de que o conjunto de funções de $\mathbb{N}$ para $\mathbb{N}$ (que tem a mesma cardinalidade que $\mathbb{R}$) é maior que o conjunto de todos os algoritmos (que tem a mesma cardinalidade que $\mathbb{N}$). Além disso, o argumento de diagonalização usado para provar que $\mathbb{R}$ não é enumerável é usado, por exemplo, na demonstração do teorema de Turing.

Consideramos também que essa área é um capítulo importante da história da matemática, e portanto é "cultura geral" quase que obrigatória para quem tem curso superior em ciência ou tecnologia. Por outro lado, esse assunto nem sempre é visto nas outras disciplinas de matemática dos currículos de computação. Por essas razões, optamos por incluir um curto resumo desses conceitos neste livro (capítulo 14).

**Probabilidade.** Optamos por incluir neste livro um capítulo sobre noções elementares de estatística e probabilidade pois constatamos que eles são essenciais para várias disciplinas teóricas e aplicadas, como análise de algoritmos, criptografia, redes e serviços distribuídos, sistemas operacionais, compiladores, processamento de imagens, reconhecimento de padrões, e processamento de linguagens naturais. A teoria da probabilidade é também a fundação da teoria da informação (incluindo o conceito de bit!) e portanto para a análise de sistemas de comunicação, digitais ou não. Além disso, a teoria da probabilidade é parte da evolução da lógica matemática, o passo seguinte após o desenvolvimento do cálculo de predicados.

# Agradecimentos

Queremos agradecer aqui a todas as pessoas que contribuíram para este livro, com seus comentários e sugestões: nossos colegas André Vignatti, Arnaldo V. Moura, Cândida N. da Silva, Célia P. de Mello, Orlando Lee, Otília T. W. Paques e Pedro J. de Rezende, e os alunos Gustavo T. Vicentini, Luiz F. F. Pereira, e Vinícius N. G. Pereira. Queremos agradecer em especial a Mário San Felice, que revisou todo o texto, incluindo os exercícios, e fez inúmeras correções e sugestões que muito melhoraram o texto.

# Capítulo 1

# Introdução à lógica matemática

## 1.1 Como ter certeza?

Você escreveu um programa, ou inventou um algoritmo, para resolver um certo problema. Como pode você se convencer que ele funciona? Como pode você convencer os outros que ele funciona?

Uma maneira de adquirir confiança sobre um algoritmo é testá-lo. Porém, para a maioria dos algoritmos, é impossível montar testes que verifiquem absolutamente todos os casos possíveis que podem ocorrer durante sua execução. Muitos programadores podem citar exemplos de programas que funcionaram perfeitamente em todos os testes, mas falharam imediatamente quando usados na prática.

## 1.2 A invenção da lógica

Essa questão — como ter certeza que nosso raciocínio é correto, e como transmitir aos outros essa certeza — foi estudada pelos gregos séculos antes de Cristo. Eles observaram que uma maneira de conseguir esse tipo de certeza, e para passar essa certeza a outras pessoas, é começar por um conjunto de *axiomas*, fatos simples que todos concordam que são verdade; e desenvolver um raciocínio a partir desses axiomas, usando *regras de inferência*, maneiras de raciocinar que todos concordam que são válidas. Com isso eles inventaram a *lógica*, que eles consideravam um ramo da *retórica*, a arte de discursar e convencer pessoas.

O filósofo grego Aristóteles (384–322 A.C.), em particular, estudou os chamados *silogismos*, raciocínios em que, partindo de duas premissas cuja verdade é aceita, obtém-se uma conclusão nova que é necessariamente verdadeira. Por exemplo, se acreditamos nas premissas "todos os homens são mortais" e "Sócrates é um homem", então temos que acreditar também que "Sócrates é mortal.". Ou então, se acreditamos que "nenhum mamífero tem penas", e que "morcegos são mamíferos", então temos que acreditar que "morcegos não tem penas".

## 1.3 Euclides e demonstrações geométricas

Enquanto isso, os arquitetos e engenheiros gregos tinham preocupações semelhantes em relação aos "algoritmos geométricos" — construções com régua e compasso — que eles usavam em seus

projetos. Por exemplo, a receita da figura 1.1 supostamente constrói um pentágono com todos os lados e ângulos iguais.

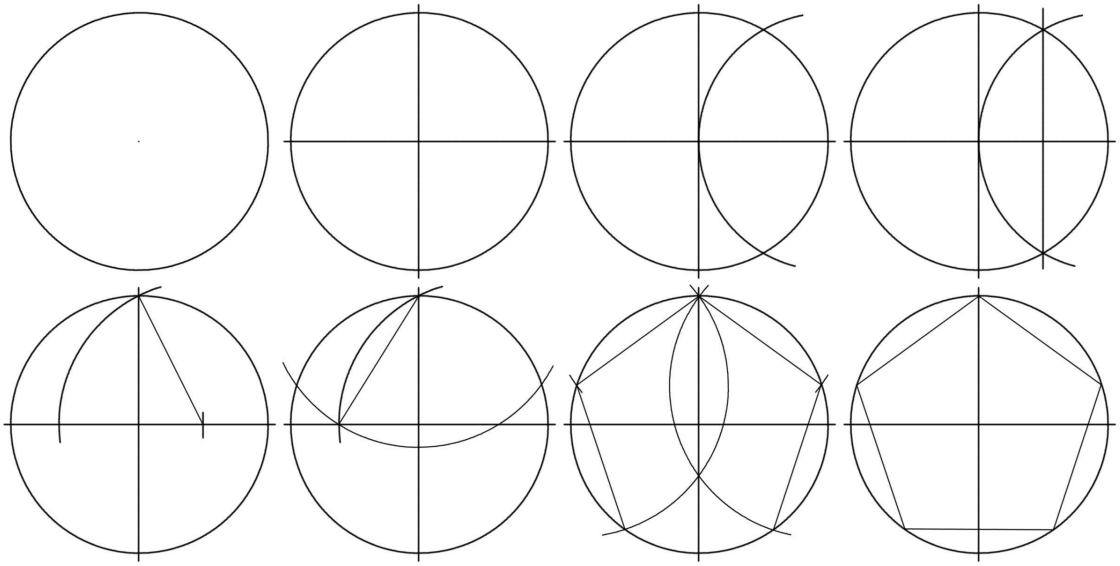


Figura 1.1: **Construção de um pentágono regular.**

Como podemos ter certeza de que essa construção realmente faz isso? Podemos efetuá-la numa folha de papel e medir os ângulos; mas tanto os passos da construção quanto a medida final tem sempre pequenos erros, e portanto esse teste não vai dizer se a construção é matematicamente correta ou apenas aproximada. Se as diferenças entre os ângulos são desprezíveis no papel, será que serão desprezíveis quando esse algoritmo for usado na construção de um anfiteatro?

O primeiro a descrever um sistema lógico completo para a geometria da época foi o geômetra grego Euclides (que viveu por volta do século III antes de Cristo), no seu livro *Elementos de Geometria* [9]. Euclides começou enumerando dez axiomas sobre conceitos geométricos (pontos, retas, círculos, distâncias, ângulos), como por exemplo

- *Por dois pontos distintos do plano passa uma única reta.*
- *Qualquer segmento de reta pode ser prolongado indefinidamente nos dois sentidos.*
- *É possível contruir um círculo com quaisquer centro e raio dados.*
- *Todos os ângulos retos são iguais.*

Em seguida Euclides mostrou centenas de outras afirmações (*teoremas*) que decorrem desses axiomas, como por exemplo

- *Se um triângulo tem os três lados iguais, ele tem os três ângulos iguais.*
- *Duas retas que são perpendiculares a uma terceira são paralelas entre si.*
- *Num triângulo retângulo, o quadrado do maior lado é a soma dos quadrados dos outros dois lados.*

Muitos desses teoremas são afirmações de que certas construções geométricas, como a da figura 1.1, produzem o resultado desejado. Principalmente, para cada teorema, ele também escreveu uma *prova* ou *demonstração* — uma sequência de passos lógicos que, começando com os axiomas e teoremas já provados, convence qualquer leitor de que o novo teorema é verdadeiro.

## 1.4 Álgebra

A lógica de Euclides e outros filósofos gregos foi extensamente usada por mais de dois mil anos. Entretanto, por muitos séculos o hábito de provar as afirmações foi limitado apenas à geometria. Embora os gregos conhecessem muitas propriedades de números (por exemplo, os conceitos de divisor comum e número primo), para demonstrar tais propriedades eles geralmente convertiam os números em comprimentos de retas, e usavam a linguagem da geometria. Esse é o caso, por exemplo, do *algoritmo de Euclides* para calcular o máximo divisor comum de dois números — que é considerado por muitos o mais antigo algoritmo não trivial. Na descrição original de Euclides, o problema é dividir dois segmentos de reta dados em partes iguais e de maior tamanho possível.

Na idáde média, entretanto, o matemático árabe Al-Khowarizmi inventou a *álgebra*, outra maneira de provar afirmações sobre números e convencer pessoas de que uma dada sequência de operações aritméticas alcança o resultado desejado. Na álgebra, os números são representados abstratamente por letras, e as operações ou afirmações sobre esses números são indicadas com símbolos como '+' ou '>'. A álgebra também fornece algumas fórmulas, como $A + B = B + A$ e $A \times (B + C) = (A \times B) + (A \times C)$, que representam afirmações que são sempre verdadeiras, quaiquer que sejam os números que vierem a substituir as variáveis. A álgebra também fornece certas regras fundamentais que permitem transformar uma fórmula em outra fórmula equivalente, ou combinar fórmulas corretas para produzir novas fórmulas corretas. Por exemplo, se sabemos que $A > B$ e $B > C$ podemos concluir com certeza que $A > C$.

## 1.5 As linguagens da lógica matemática

Como resultado desse desenvolvimento histórico, dispomos hoje de dois principais sistemas de notação, ou *linguagens formais*, para expressar raciocínios lógicos de maneira matematicamente clara, sucinta, e, principalmente, livre de ambiguidades. Estas linguagens são a *teoria de conjuntos* e o *cálculo de predicados*.

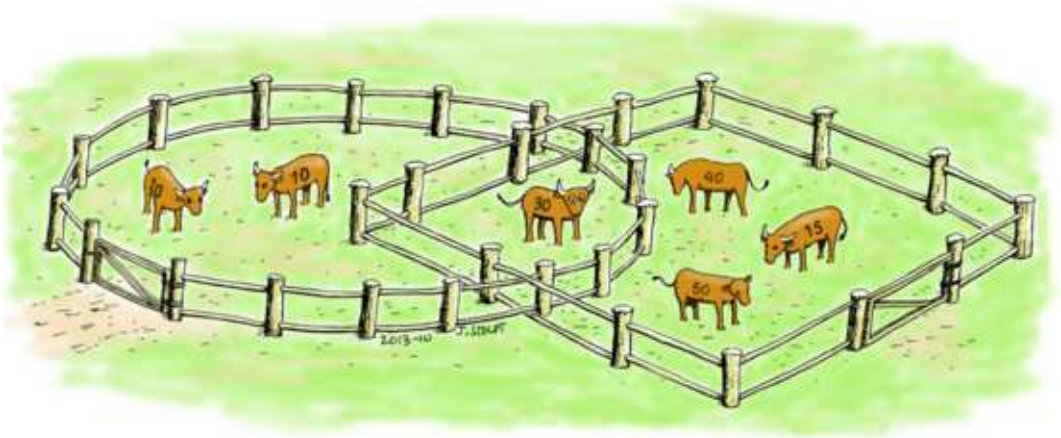
A lógica clássica somente lida com afirmações que são verdadeiras ou falsas. Essa característica praticamente restringe o uso da lógica para afirmações matemáticas. Mas no século 16 e 17 matemáticos começaram a estudar o cálculo de chances em jogos de azar (dados, roletas, loteria, etc.). No iníco do século 20 estas investigações haviam evoluído para a *teoria da probabilidade*, que permite expressar nosso grau de confiança a respeito de afirmações incertas, e raciocinar com precisão sobre elas; e para a *estatística*, um conjunto de técnicas para analisar dados experimentais que supostamente confirmam ou refutam tais afirmações.

Em meados do século XX, motivada pela expansão do rádio, telefone e outros meios eletrônicos de comunicação, a teoria da probabilidade por sua vez deu origem à *teoria da informação*, que permite determinar, por exemplo, a capacidade real de canais de comunicação na presença de distúrbios aleatórios no sinal recebido. Finalmente, com o surgimento do computador digital, sur-

giram disciplinas matemáticas específicas para raciocinar precisamente com programas e estruturas de dados, incluindo *análise de algoritmos*, *teoria da computabilidade e complexidade de funções*, *criptografia digital*, e muitas outras.

# Capítulo 2

# Teoria dos Conjuntos




Acreditamos que o leitor já teve contato com os conceitos básicos da teoria dos conjuntos, como *elemento*, *união*, *intersecção*, etc.. Nesta seção vamos revisar esses conceitos.

Embora seja possível desenvolver a teoria de conjuntos de maneira axiomática, como foi feito por Georg Cantor (1845–1918) e Ernest Zermelo (1871–1953), a abordagem informal apresentada é suficiente para nossos propósitos.

Um *conjunto* é um conceito primitivo, que informalmente pode ser entendido como uma coleção *não ordenada* de entidades distintas, chamadas de *elementos* do conjunto.

Dizemos que um elemento $x$ *pertence* a um conjunto $A$ se $x$ é um elemento de $A$. Denotamos este fato por $x \in A$. Para denotar que $x$ *não pertence* a $A$, ou seja, que $x$ não é um elemento do conjunto $A$, escrevemos $x \notin A$.

Se $x$ pertence a um conjunto $A$, diz-se também que $A$ *tem* (ou *possui*) $x$, e escreve-se $A \ni x$. A negação desta afirmação ($A$ *não tem* ou *não possui* $x$) é denotada por $A \not\ni x$. Não é correto dizer que $A$ "contém" $x$, pois este termo é usado em matemática com um sentido bem diferente (veja a seção 2.4)

## 2.1 Especificando conjuntos

Podemos especificar um conjunto de diversas formas. Se um conjunto tem poucos elementos, podemos listá-los, um a um, em qualquer ordem, entre chaves '{}'. Por exemplo, o conjunto cujos elementos são os números inteiros 2, 3 e 5 pode ser escrito $\{2, 3, 5\}$. Assim, por exemplo, temos que $3 \in \{2, 3, 5\}$, mas $4 \notin \{2, 3, 5\}$.

Outra maneira de especificar um conjunto é através das propriedades de seus elementos. Para tanto, usamos a notação $\{ a : P(a) \}$, onde $a$ é uma variável arbitrária e $P(a)$ uma afirmação matemática que depende do valor de $a$. Por exemplo,

$$\{ a : a \text{ é um número inteiro e } -5 < a < 5 \}$$

é outra maneira de definir o conjunto $\{-4, -3, -2, -1, 0, +1, +2, +3, +4\}$.

Existem alguns conjuntos de números que são muito usados em matemática, e tem notações convencionais bem estabelecidas:

- o conjunto dos *números inteiros* $\mathbb{Z}$,
- o conjunto dos *números naturais* $\mathbb{N} = \{ x : x \in \mathbb{Z} \text{ e } x \geq 0 \}$,
- o conjunto dos *números racionais* $\mathbb{Q} = \left\{ \frac{a}{b} : a, b \in \mathbb{Z} \text{ e } b \neq 0 \right\}$, e
- o conjunto dos *números reais* $\mathbb{R}$.

**Exercício 2.1:** Escreva explicitamente os elementos dos seguintes conjuntos:

1. $A = \left\{ x : x \in \mathbb{Z} \text{ e } x^2 - 2x + 1 \leq 0 \right\}$.
2. $A = \{ x : x \in \mathbb{Z},\ 2 \leq x \leq 20 \text{ e } x \text{ é primo} \}$.
3. $A = \left\{ x : x \in \mathbb{R} \text{ e } x^2 - 2x = 0 \right\}$.

### 2.1.1 Definições circulares e contraditórias

A definição de um conjunto pode usar outros conjuntos, como por exemplo "seja $X$ o conjunto de todos os elementos que estão no conjunto $Y$ mas não no conjunto $Z$". Porém, deve-se tomar cuidado para evitar definições circulares, que podem não ter sentido. Um exemplo clássico é a definição "seja $X$ o conjunto de todos os elementos que não pertencem a $X$". Esta "definição" não faz sentido pois diz que um elemento que está em $X$ não está em $X$, e vice-versa.

Este contra-exemplo teve um papel muito importante no desenvolvimento da teoria de conjuntos. Ele é conhecido pelo nome *Paradoxo de Russel*, por ter sido observado pelo matemático inglês Bertrand Russel (1872–1970). Ele é conhecido também como *Paradoxo do Barbeiro*, pois foi exemplificado com uma anedota em que o barbeiro de um quartel recebeu a ordem de fazer a barba de todos os que não fizessem sua própria barba, e apenas esses — deixando o barbeiro na dúvida sobre o que ele deveria fazer com a sua.

Por outro lado, há definições circulares de conjuntos que são perfeitamente válidas. Por exemplo, considere o conjunto de inteiros $X$ que possui o inteiro 1, não possui o inteiro 0, possui $x + 2$ e $x - 2$ qualquer que seja o elemento $x$ de $X$. Pode-se verificar que o único conjunto $X$ com estas propriedades é o conjunto dos inteiros ímpares. Para entender porque esta definição é válida vamos precisar do conceito de indução matemática, que será visto no capítulo 5.

## 2.2 Igualdade de conjuntos

Por definição, um conjunto $A$ *é igual a* um conjunto $B$ se, e somente se, todo elemento de $A$ é elemento de $B$, e todo elemento de $B$ é elemento de $A$. Esta condição, denotada por $A = B$, significa que $A$, $B$ são o mesmo conjunto.

Dito de outra forma, dois conjuntos $A$ e $B$ são diferentes ($A \neq B$) se, e somente se, existe um elemento de $A$ que não pertence a $B$, ou um elemento de $B$ que não pertence a $A$.

Observe que, como os conjuntos não são ordenados, o conjunto $\{1, 2, 3\}$ é igual ao conjunto $\{3, 2, 1\}$.

## 2.3 Conjunto vazio

É possivel definir conjuntos sem elementos. Dizemos que tal conjunto é *vazio*. Por exemplo, considere o conjunto $A = \{ x : x \in \mathbb{R} \text{ e } x = x + 1 \}$. Todos os conjuntos vazios são iguais; ou seja existe um único conjunto vazio, que é geralmente denotado por $\emptyset$.

## 2.4 Relação de inclusão

Sejam $A$ e $B$ dois conjuntos. Dizemos que $A$ é um *subconjunto* de $B$ se, e somente se, todo elemento de $A$ é um elemento de $B$. Neste caso, dizemos também que $A$ *está contido em* $B$, ou que $B$ *contém* $A$. Denotamos esta condição por $A \subseteq B$ ou $B \supseteq A$.

Se existe um elemento de $A$ que não pertence a $B$, então $A$ não é subconjunto de $B$, e escrevemos $A \nsubseteq B$. De acordo com esta definição, todo conjunto está contido em si próprio e contém o conjunto vazio; ou seja, $A \subseteq A$ e $\emptyset \subseteq A$, para qualquer conjunto $A$.

Se $A \subseteq B$ mas $A \neq B$, dizemos que $A$ é um sub-conjunto *próprio* de $B$, que denotamos por $A \subset B$ ou $B \supset A$. Analogamente, $A \not\subset B$ significa que $A$ não é um subconjunto próprio de $B$.

## 2.5 Cardinalidade

Informalmente, dizemos que um conjunto $A$ é *finito* se ele tem um número finito $n \in \mathbb{N}$ de elementos. Este número é a *cardinalidade* de $A$, denotada por $|A|$ ou $\#A$. Observe que $|A| = 0$ se e somente se $A = \emptyset$.

Dizemos que um conjunto é *infinito* se ele não é finito. Os conjuntos $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, e $\mathbb{R}$ são infinitos.

Conjuntos infinitos não podem ter seus elementos listados explicitamente. Informalmente, é comum usar '. . . ' nesses casos, por exemplo

- $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \ldots\}$
- $\mathbb{Z} = \{\ldots, -3, -2, -1, 0, +1, +2, +3, \ldots\}$

Entretanto, esta notação deve ser evitada pois pode ser ambígua. Por exemplo, o que é o conjunto $\{2, 3, 5, 7, \ldots\}$?

## 2.6 Operações com conjuntos

Para os próximos conceitos sejam $A$ e $B$ dois conjuntos.

### 2.6.1 União e interseção

A *união* de $A$ e $B$, denotada por $A \cup B$, é o conjunto de todos os elementos que estão em pelo menos um dos conjuntos, $A$ ou $B$.

**Exemplo 2.1:** Se $A = \{1, 2, 3\}$ e $B = \{2, 3, 4, 5\}$ então $A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5\}$.

A *intersecção* de $A$ e $B$, denotada por $A \cap B$, é o conjunto de todos os elementos que estão em ambos os conjuntos, $A$ e $B$.

**Exemplo 2.2:** Se $A = \{1, 2, 3\}$ e $B = \{2, 3, 4, 5\}$ então $A \cap B = \{2, 3\}$.

Se $A \cap B = \emptyset$ dizemos que os conjuntos $A$ e $B$ são *disjuntos*.

### 2.6.2 Diferença, universo, e complemento

A *diferença de $A$ e $B$* é o conjunto de todos os elementos de $A$ que não estão em $B$. Este conjunto é também chamado $A$ *menos* $B$, ou o *complemento de $B$ em $A$*, e é denotado por $A - B$ ou $A \setminus B$.

Em certos casos, é conveniente supor que todos os elementos de todos os conjuntos que nos interessam pertencem a um *conjunto universal* ou *universo*, que denotaremos por $\mathcal{U}$. Se $A$ é o conjunto universo $\mathcal{U}$, então $\mathcal{U} - B$ é chamado o *complemento* de $B$ e denotado por $\bar{B}$ ou $B^c$.

Observe que se $A \subseteq B$ então $A \cup B = B$, $A \cap B = A$ e $\bar{B} \subseteq \bar{A}$.

**Exercício 2.2:** Dê exemplos em que $(A \cup B) - B = A$ e $(A \cup B) - B \neq A$

**Exercício 2.3:** Sejam $\mathbb{U} = \{ n \in \mathbb{N} : 0 \leq n \leq 9 \}$, $A = \{1, 2, 3, 4\}$, $B = \left\{ x \in \mathbb{R} : (x-1)(x-3)^3 = 0 \right\}$ e $C = \{ n \in \mathbb{N} : n \text{ é ímpar} \}$. Calcule:

1. $A \cup B$.
2. $A \cap (B \cup C)$.
3. $C - A$.
4. A cardinalidade de $A$, de $B$ e de $C$.
5. $\bar{A} \cup C$.

**Exercício 2.4:** Sejam $A$ e $B$ dois conjuntos finitos quaisquer. Encontre uma fórmula matemática que relaciona $|A|$, $|B|$, $|A \cap B|$ e $|A \cup B|$.

### 2.6.3 Diferença simétrica

Outra operação entre conjuntos é a *diferença simétrica*, denotada por $A \oplus B$ ou $A \triangle B$, que consiste de todos os elementos que estão em *exatamente* em um dos dois conjuntos. Isto é,

$$A \triangle B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A) \tag{2.1}$$

**Exercício 2.5:** Se $A \triangle B = A$ o que se pode dizer dos conjuntos $A$ e $B$?

### 2.6.4 Diagrama de Venn

A figura 2.1 mostra uma representação gráfica das operações de conjuntos:

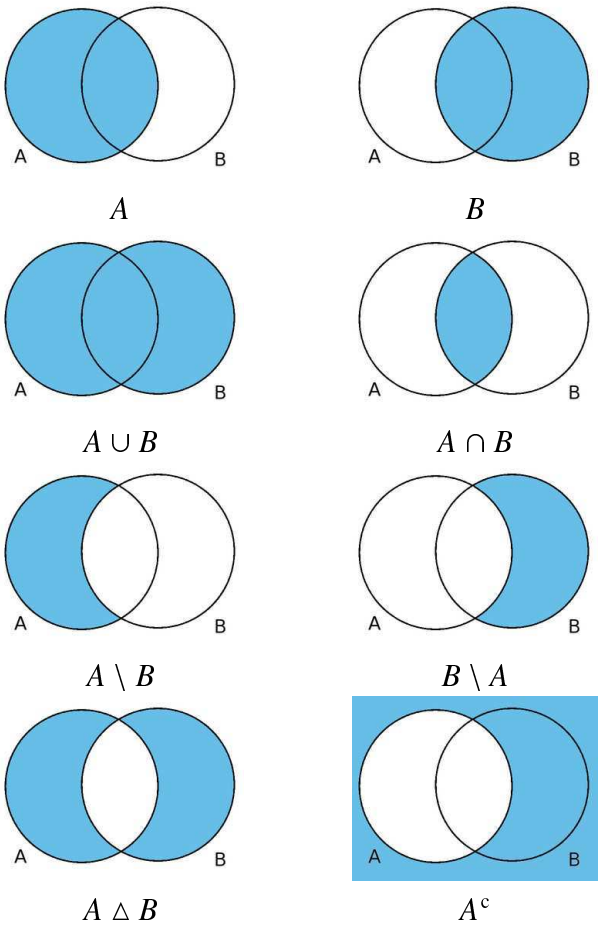



Figura 2.1: Operações com conjuntos.

Esta representação gráfica para conjuntos é chamada de *diagrama de Venn*, por ter sido introduzida pelo matemático inglês John Venn (1834–1923).

### 2.6.5 Propriedades das operações com conjuntos

A seguir listaremos algumas propriedades que são satisfeitas pelas operações com conjuntos.

- *Comutatividade*:
  - $A \cup B = B \cup A$.
  - $A \cap B = B \cap A$.
- *Associatividade*:
  - $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$.
  - $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$.

- *Distributividade*:
  - $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$.
  - $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$.
- *Idempotência*:
  - $A \cup A = A$.
  - $A \cap A = A$.
- *Leis de De Morgan*:
  - $\overline{A \cup B} = \bar{A} \cap \bar{B}$.
  - $\overline{A \cap B} = \bar{A} \cup \bar{B}$.

  Estas leis levam o nome do matemático inglês Augustus de Morgan (1806–1871), mas eram conhecidas desde a Antiguidade.
- *Propriedades do complemento*:
  - $\bar{\bar{A}} = A$.
  - $A \cup \bar{A} = \mathcal{U}$.
  - $A \cap \bar{A} = \emptyset$.
  - $\bar{\mathcal{U}} = \emptyset$.
  - $\bar{\emptyset} = \mathcal{U}$.
- *Propriedades do conjunto universal*:
  - $A \cup \mathcal{U} = \mathcal{U}$.
  - $A \cap \mathcal{U} = A$.
- *Propriedades do conjunto vazio*:
  - $A \cup \emptyset = A$.
  - $A \cap \emptyset = \emptyset$.

**Exercício 2.6:** Usando diagramas de Venn, verifique que a diferença simétrica também é uma operação associativa e comutativa; isto é, que $A \triangle B = B \triangle A$ e $(A \triangle B) \triangle C = A \triangle (B \triangle C)$, para quaiquer conjuntos $A$, $B$ e $C$.

## 2.7 Conjuntos de conjuntos

Conjuntos podem ser elementos de outros conjuntos. Por exemplo, o conjunto

$$A = \{\emptyset, \{2,3\}, \{2,4\}, \{2,4,7\}\}$$

é um conjunto com quatro elementos. Se $B$ é o conjunto $\{2,3\}$, temos que $B$ é elemento de $A$ ($B \in A$), mas $B$ não é sub-conjunto de $A$ ($B \not\subseteq A$). Note que $\emptyset$ é elemento de $A$ e também subconjunto de $A$, enquanto que $\{2\}$ não é nem uma coisa nem outra.

Em particular, o conjunto $A = \{\emptyset\}$ *não* é vazio, pois ele tem um elemento — o conjunto vazio. Observe que $|A| = 1$, enquanto que $|\emptyset| = 0$.

## 2.8 Conjunto potência

O conjunto de todos os subconjuntos de um conjunto $A$ é chamado de *conjunto potência* de $A$, e denotado por $\mathbb{P}(A)$.

**Exemplo 2.3:** Se $A = \{1,2,3\}$ então $\mathbb{P}(A) = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1,2\}, \{1,3\}, \{2,3\}, \{1,2,3\}\}$.

Observe que se $A = \emptyset$ então $\mathbb{P}(A) = \{\emptyset\}$, e se $A = \{\emptyset\}$ então $\mathbb{P}(A) = \{\emptyset, \{\emptyset\}\}$.

Se $A$ é um conjunto finito, então $|\mathbb{P}(A)| = 2^{|A|}$. Este fato será demonstrado no capítulo 5. Por esta razão, muitos autores denotam o conjunto potência de $A$ por $2^A$.

**Exercício 2.7:** Se $A$ e $B$ são dois conjuntos com o mesmo conjunto potência, podemos concluir que $A = B$?

## 2.9 Partição

Seja $A$ um conjunto, e $P$ um conjunto cujos elementos são sub-conjuntos de $A$ (isto é, $P \subseteq \mathbb{P}(A)$). Dizemos que $P$ é uma *partição* de $A$ se os elementos de $P$ são não vazios, disjuntos dois a dois, e a união de todos os elementos de $P$ é $A$. Nesse caso, cada elemento de $P$ é também chamado de uma *parte* ou *bloco* da partição.

**Exemplo 2.4:** Se $A = \{1,2,3,4,5,6,7,8,9,10\}$, o conjunto

$$P = \{\{1,2,5,6,7\}, \{3\}, \{4,8,10\}, \{9\}\}$$

é uma partição de $A$.

Observe que, para qualquer conjunto $A$, o conjunto $\{A\}$ é sempre uma partição de $A$. Além disso, se $B$ é qualquer subconjunto próprio e não vazio de $A$ ($\emptyset \subset B \subset A$), então o conjunto $\{B, A \setminus B\}$ também é uma partição de $A$.

O conjunto vazio tem apenas uma partição, que é o próprio conjunto vazio (sem nenhuma parte).

**Exercício 2.8:** Quais dos conjuntos abaixo são partições do conjunto $\mathbb{Z}$ dos números inteiros?

a) $\{P, I\}$ onde $P$ é o conjunto dos pares e $I$ é o conjunto dos ímpares.

b) $\{\mathbb{Z}^+, \mathbb{Z}^-\}$ onde $\mathbb{Z}^+$ é o conjunto dos inteiros positivos, e $\mathbb{Z}^-$ é o conjunto dos inteiros negativos.

c) $\{R_0, R_1, R_2\}$ onde, para $i = \{0, 1, 2\}$, $R_i$ é o conjunto dos inteiros que tem resto $i$ na divisão por 3.

d) $\{A, B, C\}$ onde $A$ é o conjunto dos inteiros menores que $-100$, $B$ é o conjunto dos inteiros com valor absoluto menor ou igual a 100, e $C$ é o conjunto dos inteiros maiores que 100.

e) $\{P_0, P_1, P_2, \ldots, P_9\}$, onde $P_k$ é o conjunto de todos os inteiros cujo quadrado termina com o algarismo $k$. (Por exemplo, $P_6 = \{4, -4, 6, -6, 14, \ldots\}$.)

f) $\{\{0\}\} \cup \{P_k : k \in \mathbb{N}\}$, onde $P_k$ é o conjunto de todos os inteiros cujo valor absoluto está entre $2^k$ (inclusive) e $2^{k+1}$ (exclusive).

## 2.10 Produto cartesiano

Indicamos por $(a, b)$ um *par ordenado* de elementos, no qual $a$ é o *primeiro elemento* e $b$ é o *segundo elemento*. Um par ordenado não deve ser confundido com um conjunto de dois elementos, pois a ordem é importante (por exemplo, o par $(10, 20)$ é diferente do par $(20, 10)$) e os dois elementos podem ser iguais (como por exemplo no par $(10, 10)$). Dois pares ordenados $(a, b)$ e $(c, d)$ são iguais (são o mesmo par) se, e somente se, $a = c$ e $b = d$.

### 2.10.1 Produto cartesiano de dois conjuntos

Sejam $A$ e $B$ dois conjuntos. O *produto cartesiano*, denotado por $A \times B$, é o conjunto de todos os pares ordenados $(a, b)$ com $a \in A$ e $b \in B$. Como os pares são ordenados, temos que $A \times B \neq B \times A$ (exceto quando $A = B$ ou $A = \emptyset$ ou $B = \emptyset$).

**Exercício 2.9:** Quanto elementos tem o conjunto $A \times B$ se o conjunto $A$ tem $m$ elementos, e o conjunto $B$ tem $n$?

### 2.10.2 Produto cartesiano de vários conjuntos

Definimos uma *ênupla ordenada*, ou simplesmente *ênupla*, como sendo uma sequência finita de $m$ elementos $(x_1, x_2, \ldots, x_m)$. (Sequências finitas são definidas formalmente na seção 8.12.) Observe que, como em um par ordenado, a ordem dos elementos é importante, e pode haver repetições. Assim, por exemplo, as $(10, 20, 20)$, $(10, 10, 20)$ e $(20, 10, 20)$ são três ênuplas diferentes.

Uma ênupla com dois elementos pode ser considerada um par ordenado, e é geralmente chamada por esse nome. Para $m \geq 3$ usam-se os nomes *tripla*, *quádrupla*, *quíntupla*, *sêxtupla*, *séptupla*, *óctupla*, etc.. Não há um nome especial consagrado quando $m = 1$. Na escrita usam-se também as notações 2-upla, 3-upla, etc., e $m$-upla quando $m$ é genérico.

Em particular, uma 1-upla é uma sequência $(a_1)$ com apenas um elemento. Note que a 1-upla $(10)$ não é a mesma coisa que o inteiro 10. Há uma única 0-upla, a *ênupla vazia*, denotada por $()$.

O *produto cartesiano* de $m$ conjuntos $A_1, A_2, \ldots, A_m$, denotado por $A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_m$, é o conjunto das $m$-uplas $(a_1, a_2, \ldots, a_m)$, com $a_i \in A_i$ para $i = 1, 2, \ldots, m$.

Se todos os conjuntos $A_1, A_2, \ldots, A_m$ são o mesmo conjunto $A$, o produto é denotado por $A^m$. Por exemplo, se $A = \{10, 20, 30\}$,

$$A^3 = \{(10, 10, 10), (10, 10, 20), (10, 10, 30), (10, 20, 10), \ldots, (30, 30, 30)\}$$

e $A^1$ é o conjunto das 1-uplas $\{(10), (20), (30)\}$. Para qualquer conjunto $A$, $A^0$ é o conjunto $\{()\}$ que só tem a ênupla vazia.

## 2.11 Exercícios

**Exercício 2.10:** Seja $\mathbb{R}$, o conjunto dos números reais. Considere os seguintes subconjuntos de $\mathbb{R}$:

- $(a, b) = \{ x : a < x < b \}$ (*intervalo aberto*);
- $[a, b] = \{ x : a \leq x \leq b \}$ (*intervalo fechado*);
- $(a, b] = \{ x : a < x \leq b \}$ (*intervalo fechado à direita*),
- $[a, b) = \{ x : a \leq x < b \}$ (*intervalo fechado à esquerda*),
- $(-\infty, a) = \{ x : x < a \}$,
- $(-\infty, a] = \{ x : x \leq a \}$,
- $(a, \infty) = \{ x : a < x \}$,
- $[a, \infty) = \{ x : a \leq x \}$,
- $(-\infty, \infty) = \mathbb{R}$,

Encontre

1. $[1, 3] \cap (2, 4)$.
2. $(-\infty, 2) \cap [-1, 0]$.
3. $(-\infty, 2) \cap [-1, 3]$.
4. $[0, 10] \cup [1, 11]$.
5. $(0, \infty) \cap (-\infty, 1)$.
6. $[-3, 0] \cup (0, 3]$.
7. $\overline{(0, 5]}$.

**Exercício 2.11:** Diagramas de Venn podem ser usados para três ou mais conjuntos. Um diagrama de Venn para três conjuntos $A$, $B$ e $C$, por exemplo, precisa dividir o plano em 8 regiões, correspondendo a todas as possíveis relações (pertence ou não pertence) entre um elemento e esses três conjuntos. Desenhe tal diagrama e use-o para mostrar as seguintes fórmulas:

1. $A \cap B \cap C$.
2. $A \cup B \cup C$.
3. $(A \cup B) - C$.
4. $(A - B) \cup (B - C) \cup (C - A)$.

**Exercício 2.12:** Use diagramas de Venn para verificar as seguintes identidades:

1. $A - (A \cap B) = A - B$.
2. $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$.
3. $(A \cup B) - C = (A - C) \cup (B - C)$.

4. $A \cup (B - C) = (A \cup B) - (C - A)$.

**Exercício 2.13:** Sejam $A$, $B$ e $C$ três conjuntos finitos quaiquer. Encontre uma fórmula matemática para $|A \cup B \cup C|$ em função de $|A|$, $|B|$, $|C|$, $|A \cap B|$, $|A \cap C|$, $|B \cap C|$ e $|A \cap B \cap C|$.

**Exercício 2.14:** Quais dos conjuntos abaixo são partições do conjunto $\mathbb{R}$ dos números reais?

a) $\{\mathbb{R}^+, \{0\}, \mathbb{R}^-\}$, onde $\mathbb{R}^+$ é o conjunto dos números reais positivos e $\mathbb{R}^-$ é o conjunto dos números reais negativos.

b) $\{\mathbb{I}, \mathbb{Q}\}$ onde $\mathbb{I}$ é o conjunto dos números irracionais e $\mathbb{Q}$ é o conjunto dos números racionais.

c) $\{\,[k, k+1] : k \in \mathbb{Z}\,\}$.

d) $\{\,(k, k+1) : k \in \mathbb{Z}\,\}$.

e) $\{\,(k, k+1] : k \in \mathbb{Z}\,\}$

f) $\{\{\,x + n : n \in \mathbb{N}\,\} : x \in [0, 1)\}$.

# Capítulo 3

# Lógica matemática

## 3.1 Lógica proposicional

### 3.1.1 Proposições e valores lógicos

Uma *proposição* é uma sentença declarativa que ou é verdadeira ou é falsa. Exemplos:

1. *O morcego é um mamífero*.

2. *Rio de Janeiro é a capital do Brasil.*

3. *Há 36 macacos no zoológico de Londres.*

4. *A taxa de juros do Banco Central vai subir amanhã.*

5. *O trilionésimo algarismo decimal de $\pi$ é 7.*

Observe que não é necessário que saibamos se a sentença é verdadeira ou falsa. Este fato pode depender de informações que não temos no momento (como no exemplo 3 acima), de eventos que ainda não aconteceram (como no exemplo 4), ou de cálculos que não temos recursos para realizar (como no exemplo 5).

Como exemplos de frases que *não* são proposições, podemos citar

1. frases interrogativas, como "*O que é isto?*",

2. frases imperativas, como "*Leia com cuidado*",

3. certas sentenças auto referentes, como "*Esta frase é falsa*".

Uma sentença declarativa que depende de variáveis pode ser considerada uma proposição em um contexto onde as variáveis tem valor determinado. Por exemplo, a sentença "*$x$ é menor que 3*" isoladamente não é uma proposição. Porém, uma vez que o valor de $x$ for definido, ela se torna uma proposição. Este ponto será tratado com mais detalhe na seção 3.6.

Dizemos que o *valor lógico* ou *valor-verdade* de uma proposição é *verdadeiro* se ela for verdadeira, e *falso* caso contrário.

### 3.1.2 Conectivos lógicos e proposições compostas

Todas as línguas naturais possuem *conectivos lógicos*, como "e", "ou", "não", "se ... então", que permitem combinar proposições simples para formar proposições mais complexas. Por exemplo,

1. [*Brasília é a capital do Brasil,*] *e* [*Montevidéu é a capital da Argentina*].

2. [*Brasília é a capital do Brasil,*] *ou* [*Montevidéu é a capital da Argentina*].

3. *Se* [*a taxa de juros cair amanhã*], *então* [*a inflação vai aumentar neste mês*].

4. *Não* [*haverá sessão da meia-noite hoje neste cinema*].

Uma proposição que não pode ser decomposta em proposições menores ligadas por conectivos lógicos é dita uma *proposição simples* ou *atômica*. Nos exemplos acima, os colchetes "[]" indicam as proposições simples.

O valor lógico (*verdadeiro* ou *falso*) de uma proposição deste tipo depende do valor lógico das proposições simples que a compõem, e da maneira como elas são combinadas pelos conectivos. Assim, se sabemos que a proposição "*Brasília é a capital do Brasil*" é verdadeira, e "*Montevidéu é a capital da Argentina*" é falsa, podemos concluir que a proposição 1 acima é falsa, mas a proposição 2 é verdadeira.

### 3.1.3 Notação para cálculo proposicional

A *lógica proposicional*, ou *cálculo proposicional*, é um formalismo que nos permite determinar o valor lógico de proposições compostas, se soubermos os valores lógicos das proposições simples que a compõem.

A linguagem natural é frequentemente ambígua, e os conetivos lógicos podem ter significados diferentes em sentenças diferentes. Para eliminar essa fonte de confusão, é vantajoso traduzir as proposições para uma notação algébrica, cuja interpretação seja precisamente definida.

Neste livro, representaremos as proposições por letras minúsculas ($p, q, r, \ldots$). Podemos entender estas letras como variáveis que podem ter apenas um de dois valores possíveis, **V** (representando o valor lógico *verdadeiro*) ou **F** (*falso*). Os conectivos lógicos serão representados por sinais algébricos especiais (*operadores*) aplicados a essas variáveis. Os mais importantes são:

- *conjunção*: $p \wedge q$, significando "$p$ e $q$".
- *disjunção*: $p \vee q$, significando "$p$ ou $q$".
- *negação*: $\neg p$, significando "não $p$".
- *implicação*: $p \rightarrow q$, significando "se $p$, então $q$".
- *equivalência*: $p \leftrightarrow q$, significando "$p$ se, e somente se, $q$".

Nas próximas seções, vamos explicar em detalhes estes operadores lógicos, e definir outros operadores menos usados.

### 3.1.4 Operador de conjunção

Se $p$, $q$ são duas proposições, então "$p$ e $q$" também é uma proposição, chamada *conjunção* de $p$ e $q$. Denotaremos essa proposição por $p \wedge q$. Por definição, o valor lógico de $p \wedge q$ é verdadeiro se $p$ e $q$ são ambos verdadeiros. Se qualquer uma das duas proposições for falsa, ou ambas forem falsas, o valor de $p \wedge q$ é falso. Podemos resumir esta definição por uma tabela, a *tabela-verdade* do operador $\wedge$:

| $p$ | $q$ | $p \wedge q$ |
|---|---|---|
| **V** | **V** | **V** |
| **V** | **F** | **F** |
| **F** | **V** | **F** |
| **F** | **F** | **F** |

**Exemplo 3.1:** A frase "José compra tijolos e vende casas" é uma conjunção de duas proposições atômicas, "(José compra tijolos) $\wedge$ (José vende casas)."

Note que a palavra "e" em português tem vários sentidos, e nem todos correspondem à conjunção lógica. Por exemplo a frase "Maria gosta de arroz e feijão" não significa "Maria gosta de arroz e Maria gosta de feijão" (uma conjunção de duas proposições), mas sim "Maria gosta de arroz misturado com feijão" (uma proposição atômica).

### 3.1.5 Operador de disjunção

Se $p, q$ são duas proposições, então "$p$ ou $q$" também é uma proposição, chamada de *disjunção* de $p$ e $q$. Denotaremos essa proposição por $p \vee q$. Por definição, o valor lógico de $p \vee q$ é verdadeiro se pelo menos uma das duas proposições for verdadeira. Se ambas forem falsas, o valor de $p \vee q$ é falso. A tabela-verdade do operador $\vee$ é

| $p$ | $q$ | $p \vee q$ |
|---|---|---|
| **V** | **V** | **V** |
| **V** | **F** | **V** |
| **F** | **V** | **V** |
| **F** | **F** | **F** |

**Exemplo 3.2:** A frase "O cliente tem celular ou laptop" é uma disjunção de duas proposições atômicas, "(O cliente tem celular) $\vee$ (O cliente tem laptop)".

Este conectivo é também chamado de "ou inclusivo", pois permite que as duas frases sejam verdadeiras. A frase do exemplo acima é verdadeira se o cliente tem apenas celular, apenas laptop, ou celular **e** laptop.

### 3.1.6 Operador de negação

A partir de uma proposição $p$, podemos formar uma nova proposição com o valor lógico oposto ao de $p$. Essa nova proposição é chamada a *negação* de $p$ e denotada por $\neg p$. A tabela-verdade desse operador é:

| $p$ | $\neg p$ |
|---|---|
| **V** | **F** |
| **F** | **V** |

Em português, a negação pode ser expressa de várias formas, por exemplo acrescentando a palavra "não" antes do verbo ou dizendo que "não é verdade que ...".

**Exemplo 3.3:** A frase "A casa é de qualquer cor menos branca." é uma negação, "¬(A casa é branca)."

**Exercício 3.1:** Uma proposição composta é *viável* ou *possível* se existe uma atribuição de valores verdades para as variáveis da proposição que a torna verdadeira. Verifique quais das proposições abaixo são viáveis.

a) $(p \vee q \vee \neg r) \wedge (p \vee \neg q \vee \neg s) \wedge (p \vee \neg r \vee \neg s) \wedge (\neg p \vee \neg q \vee \neg s) \wedge (p \vee q \vee \neg s)$.

b) $(\neg p \vee \neg q \vee r) \wedge (\neg p \vee q \vee \neg s) \wedge (p \vee \neg q \vee \neg s) \wedge (\neg p \vee \neg r \vee \neg s) \wedge (p \vee q \vee \neg r) \wedge (p \vee \neg r \vee \neg s)$.

c) $(p \vee q \vee r) \wedge (p \vee \neg q \vee \neg s) \wedge (q \vee \neg r \vee s) \wedge (\neg p \vee r \vee s) \wedge (p \vee q \vee \neg s) \wedge (p \vee \neg q \vee \neg r) \wedge (\neg p \vee \neg q \vee s) \wedge (\neg p \vee \neg r \vee \neg s)$.

### 3.1.7 Operador de implicação

Sejam $p, q$ duas proposições. A proposição "se $p$ então $q$", que denotaremos por $p \to q$, é chamada de *implicação* ou *condicional*. O valor lógico de $p \to q$ é falso apenas se $p$ for verdadeiro e $q$ for falso. Nos demais casos, o valor de $p \to q$ é verdadeiro. A tabela-verdade desse conectivo é portanto:

| $p$ | $q$ | $p \to q$ |
|---|---|---|
| **V** | **V** | **V** |
| **V** | **F** | **F** |
| **F** | **V** | **V** |
| **F** | **F** | **V** |

Note que em lógica, este conectivo não pressupõe uma relação causal entre $p$ e $q$. Por exemplo a sentença "se 2 é par então Brasília é a capital do Brasil" é verdadeira apesar de não haver nenhuma relação conhecida entre os dois fatos. Uma outra notação usada para este operador é $p \Rightarrow q$.

**Exemplo 3.4:** A frase "se José foi para casa, ele perdeu a reunião" contém uma implicação: "(José foi para casa) $\to$ (José perdeu a reunião)."

A implicação é um dos mais importantes conectivos da lógica e da matemática. Muitos teoremas em matemática estão na forma de implicações: se determinada afirmação $p$ (a *hipótese*, *premissa*, ou *antecedente*) é verdadeira, então outra afirmação $q$ (a *tese*, *conclusão* ou *consequência*) também é verdadeira.

Em português, a implicação pode ser expressa de muitas outras formas:

- se $p$ então $q$.
- quando $p$, temos $q$.
- caso $p$, vale $q$.
- $q$ segue de $p$.
- $p$ implica $q$.
- $q$ se $p$.
- $q$ sempre que $p$.

Em matemática, as seguintes expressões também são muito usadas para indicar a implicação $p \to q$:

- $p$ é condição suficiente para $q$.
- $p$ somente se $q$.
- Uma condição suficiente para $q$ é $p$.
- $p$ é uma condição mais forte que $q$.

Dizemos que a implicação $q \to p$ é a *recíproca* de $p \to q$. Observe que que há casos em que $p \to q$ é verdadeira, mas sua reciproca $q \to p$ é falsa; e vice-versa (vide exercício 3.7).

A proposição $(\neg p) \to (\neg q)$ é chamada de *inversa* de $p \to q$. Observe que há casos em que $p \to q$ é verdadeira, mas sua inversa é falsa; e vice-versa (vide exercício 3.8).

Dizemos também que proposição $(\neg q) \to (\neg p)$ é a *contrapositiva* de $p \to q$. Pode-se verificar que contrapositiva tem sempre o mesmo valor lógico que a proposição $p \to q$, quaisquer que sejam os valores lógicos de $p$ e de $q$ (vide exercício 3.9).

Em vista deste resultado, a implicação $p \to q$ é frequentemente enunciada na forma contrapositiva:

- se não $q$, então não $p$.
- se $q$ não vale, então $p$ não vale.
- quando $q$ é falsa, $p$ também é falsa.
- não $q$ implica não $p$.
- não $p$ se não $q$.
- $p$ é falsa sempre que $q$ é falsa.
- $q$ é mais fraco que $p$.
- $q$ é condição necessária para $p$.
- Uma condição necessária para $p$ é $q$.

**Exercício 3.2:** Encontre:

a) A contrapositiva de $\neg p \to q$.

b) A recíproca de $\neg q \to p$.

c) A inversa da recíproca de $q \to \neg p$.

d) A negação de $p \to \neg q$.

e) A recíproca de $\neg p \vee q$.

### 3.1.8 Operador de equivalência

Se $p$, $q$ são duas proposições, a proposição "$p$ se, e somente se, $q$" é chamada de *equivalência* ou *bicondicional* de $p$ e $q$. Denotaremos essa proposição por $p \leftrightarrow q$. O valor lógico de $p \leftrightarrow q$ é verdadeiro quando $p$ e $q$ tem o mesmo valor lógico, e falso caso contrário. A tabela-verdade deste conectivo é

| $p$ | $q$ | $p \leftrightarrow q$ |
|---|---|---|
| **V** | **V** | **V** |
| **V** | **F** | **F** |
| **F** | **V** | **F** |
| **F** | **F** | **V** |

**Exemplo 3.5:** A frase "a encomenda será enviada se, e somente se, o cheque tiver fundo" afirma uma equivalência lógica: "[a encomenda será enviada] $\leftrightarrow$ [o cheque tem fundo]."

Outros símbolos usados para este operador são $p \Leftrightarrow q$, $p \equiv q$, e $p = q$.

O conectivo lógico "se e somente se" também é muito usado em matemática, e pode ser expresso de várias outras maneiras; como, por exemplo:

- $p$ é condição necessária e suficiente para $q$.
- as condições $p$ e $q$ são equivalentes.
- se $p$ então $q$, e se $q$ então $p$.
- $p$ implica $q$, e vice-versa.

Alguns autores usam a abreviação "$p$ sse $q$" (com dois "s") para significar "$p$ se e somente se $q$".

### 3.1.9 Operador de disjunção exclusiva

Se $p$, $q$ são duas proposições, denotamos por $p \oplus q$ a proposição "ou $p$ ou $q$, mas não ambos." Este conectivo é chamado de *disjunção exclusiva* de $p$ e $q$. O valor lógico de $p \oplus q$ é verdadeiro se $p$ e $q$ tem valores lógicos opostos, ou seja, exatamente um deles é verdadeiro. A tabela-verdade desse conectivo é

| $p$ | $q$ | $p \oplus q$ |
|---|---|---|
| **V** | **V** | **F** |
| **V** | **F** | **V** |
| **F** | **V** | **V** |
| **F** | **F** | **F** |

É importante observar que, em português, o conectivo "ou" pode significar tanto a disjunção inclusiva ($\vee$) quanto a disjunção exclusiva ($\oplus$). Por exemplo, na frase "o original foi enviado pelo correio, ou [o original foi enviado] pelo malote," entende-se que o "ou" é exclusivo, pois o original não pode ter sido enviado pelos dois meios. Por outro lado, na frase "a bateria está descarregada ou o tanque está vazio" o "ou" deve ser entendido como inclusivo, pois nada impede que as duas condições sejam verdadeiras. A interpretação correta geralmente depende do contexto, e em alguns casos pode ser impossível determinar qual dos dois sentidos é o que o autor da frase pretendia.

### 3.1.10 Precedência dos operadores lógicos

Em uma proposição que usa dois ou mais operadores lógicos, como $p \vee q \wedge r$, a ordem em que eles devem ser aplicados é muito importante. Podemos sempre usar parênteses para indicar a ordem correta, por exemplo $(p \vee q) \wedge r$ ou $p \vee (q \wedge r)$. Observe que estas duas proposições podem ter valores lógicos diferentes, para certas proposições $p$, $q$, e $r$.

Assim como na álgebra, é útil estabelecer *regras de precedência* entre operadores, que determinam uma ordem convencional de aplicação mesmo na ausência de parênteses, como na proposição $p \vee q \wedge r$.

A tabela a seguir estabelece as precedências tradicionais dos operadores lógicos.

| *Operador* | *Precedência* |
|---|---|
| $\neg$ | 1 |
| $\wedge$ | 2 |
| $\vee$,$\oplus$ | 3 |
| $\rightarrow$,$\leftrightarrow$ | 4 |

Assim, por exemplo, a proposição $\neg p \wedge q \rightarrow r \oplus s \wedge u$ deve ser entendida como $((\neg p) \wedge q) \rightarrow (r \oplus (s \wedge v))$

Para memorizar as prioridades relativas de $\wedge$ e $\vee$, basta lembrar que $\wedge$ ("e"), na álgebra de Boole, era representado por multiplicação; enquanto que $\vee$ ("ou") era representado por uma soma modificada. Assim, a proposição $p \vee q \wedge r$, por analogia com $x + y \times z$, deve ser entendida como $p \vee (q \wedge r)$ e não como $(p \vee q) \wedge r$.

Em matemática, diz-se que uma operação $\star$ é *associativa* se $(x \star y) \star z$ é igual a $x \star (y \star z)$, quaisquer que sejam $x$, $y$, e $z$. Nesse caso, podemos omitir os parênteses dessas duas fórmulas, e escrever simplesmente $x \star y \star z$. A soma e a multiplicação de números reais, por exemplo, são operações associativas; enquanto que a subtração não é.

Dentre os conectivos lógicos que vimos até agora, $\vee$, $\wedge$, $\oplus$ e $\leftrightarrow$ são associativos. Portanto, podemos escrever $p \vee q \vee r$, $p \wedge q \wedge r$, ou $p \oplus q \oplus r$, ou $p \rightarrow q \rightarrow r$, sem risco de ambiguidade. Por outro lado, a fórmula $p \rightarrow q \rightarrow r$ é ambígua, pois $(p \rightarrow q) \rightarrow r$ não é equivalente a $p \rightarrow (q \rightarrow r)$. (Veja exercícios 3.4 e 3.5.)

É tradicional considerar $\oplus$ como tendo menos prioridade que $\wedge$. (Em parte, isso se deve ao uso de "+" para denotar $\oplus$ em certas áreas da matemática.) Por outro lado, não há uma tradição forte para interpretar combinações de $\oplus$ com $\vee$, como $p \oplus q \vee r$.

Alguns autores usam a convenção de que fórmulas com dois ou mais operadores não associativos de mesma prioridade, como $p \rightarrow q \rightarrow r$, devem ser avaliadas da esquerda para a direita; ou seja $(p \rightarrow q) \rightarrow r$. Note que esta convenção também é usada em álgebra: a fórmula $x - y - z$ deve ser entendida como $(x - y) - z$, e não como $x - (y - z)$. A mesma regra poderia ser usada para interpretar $p \oplus q \vee r$. Mas, por via das dúvidas, é aconselhável usar parênteses nesses casos. O mesmo vale para $\rightarrow$ em relação a $\leftrightarrow$, como $p \rightarrow q \leftrightarrow r$. Para evitar equívocos, é aconselhável sempre usar parênteses.

**Exercício 3.3:** Um grupo de pessoas está tentando planejar um passeio turístico. Porém:

1. Alice só vai se Bento também for;
2. Bento não vai se Carlos e Eunice forem;
3. Carlos, Dudu e Eunice conhecem o lugar, então um deles tem que ir;
4. Dudu só vai se ou Carlos, ou Alice ou ambos forem;
5. Carlos não pode ir se nem Alice nem Bento forem.

É possivel realizar esse passeio? Em caso afirmativo, quais composições são viáveis?

**Exercício 3.4:** Construa as tabelas-verdade das fórmulas $(p \rightarrow q) \rightarrow r$ e $p \rightarrow (q \rightarrow r)$. Elas são equivalentes?

**Exercício 3.5:** Construa as tabelas-verdade das fórmulas $(p \leftrightarrow q) \leftrightarrow r$ e $p \leftrightarrow (q \leftrightarrow r)$. Elas são equivalentes?

## 3.2 Afirmações auto-referentes

Já mencionamos que a afirmações que referem a si mesmas, como "esta sentença é falsa", não são proposições lógicas. Tais afirmações, relacionadas com o Paradoxo do Barbeiro, sempre foram um problema para a lógica matemática, que não tem maneiras satisfatórias de lidar com elas.

Este problema surge mesmo quando há várias afirmações que se referenciam entre si. Por exemplo, na frase "a sentença seguinte é falsa, e a sentença anterior é verdadeira", embora possa ser analisada como uma conjunção $p \wedge q$, não é uma afirmação lógica porque $p$ é uma afirmação sobre $q$ e vice-versa. Um exemplo mais elaborado é o seguinte

**Exemplo 3.6:** Considere uma lista de 100 proposições, $p_0, p_1, \ldots, p_{99}$, onde cada proposição $p_n$ diz "exatamente $n$ das proposições desta lista são falsas."

**Exercício 3.6:**

Sejam $p$ e $q$ as proposições "a eleição foi decidida" e "os votos foram contados", respectivamente. Expresse cada uma das proposições compostas a seguir como uma sentença em português.

a) $\neg p$

b) $\neg p \wedge q$

c) $\neg q \rightarrow \neg p$

d) $\neg q \vee (\neg p \wedge q)$

**Exercício 3.7:** Demonstre, pelas tabelas-verdade, que há casos em que $p \rightarrow q$ é verdadeira, mas sua reciproca $q \rightarrow p$ é falsa; e vice-versa.

**Exercício 3.8:** Demonstre, pelas tabelas-verdade, que há casos em que $p \rightarrow q$ é verdadeira, mas sua inversa $(\neg p) \rightarrow (\neg q)$

**Exercício 3.9:** Demonstre, pelas tabelas-verdade, que a proposição $p \rightarrow q$ e sua contrapositiva $(\neg q) \rightarrow (\neg p)$ tem sempre o mesmo valor lógico, quaisquer que sejam os valores lógicos de $p$ e de $q$.

**Exercício 3.10:** Prove que a inversa de uma implicação $p \rightarrow q$ é a contrapositiva da recíproca.

**Exercício 3.11:** Prove que a inversa de uma implicação $p \rightarrow q$ é a recíproca da sua contrapositiva.

**Exercício 3.12:** Considere que $p$, $\neg q$ e $r$ são proposições verdadeiras. Verifique quais das afirmações são verdadeiras.

a) $p \rightarrow q$.

b) $q \rightarrow p$.

c) $p \rightarrow (q \vee r)$.

d) $p \leftrightarrow q$.

e) $p \leftrightarrow r$.

f) $(p \vee q) \rightarrow p$.

g) $(p \wedge q) \rightarrow q$.

**Exercício 3.13:** Um conectivo muito importante para projeto de circuitos lógicos é o operador *não-e* ou (*nand*), que denotaremos por $\bar{\wedge}$, definido por $p \bar{\wedge} q = \neg(p \wedge q)$. De maneira análoga temos o operador *não-ou* ou (*nor*), denotado por $\bar{\vee}$, e definido por $p \bar{\vee} q = \neg(p \vee q)$. Construa as tabelas-verdade dos operadores $\bar{\wedge}$ e $\bar{\vee}$.

**Exercício 3.14:** Encontre fórmulas envolvendo os conectivos $\wedge$, $\vee$ e $\neg$ para as variáveis $x$ e $y$ da tabela-verdade abaixo:

| $p$ | $q$ | $x$ | $y$ |
|---|---|---|---|
| **V** | **V** | **V** | **F** |
| **V** | **F** | **V** | **V** |
| **F** | **V** | **F** | **V** |
| **F** | **F** | **V** | **F** |

**Exercício 3.15:** Construa a tabela-verdade de cada uma das proposições:

a) $(p \wedge q) \rightarrow (p \vee q)$.

b) $(p \rightarrow q) \rightarrow (q \rightarrow p)$.

c) $(q \rightarrow \neg p) \leftrightarrow (p \leftrightarrow q)$.

d) $(p \leftrightarrow q) \oplus (p \leftrightarrow \neg q)$.

e) $(p \oplus q) \rightarrow (p \oplus \neg q)$.

## 3.3 Manipulação lógica de proposições

O objetivo da lógica proposicional é identificar as deduções e transformações de proposições compostas cuja validade independe da natureza das suas proposições atômicas, e dos valores lógicos destas.

Por exemplo, veremos mais adiante que qualquer proposição composta da forma $p \wedge (p \wedge q)$ pode ser substituída por $p \wedge q$; pois, qualquer que sejam as proposições $p$ e $q$, os valores lógicos de $p \wedge (p \wedge q)$ e $p \wedge q$ são sempre iguais. Nesta seção, veremos as principais regras deste tipo.

### 3.3.1 Tautologias e contradições

Uma *tautologia* é uma proposição composta que é sempre verdadeira, quaisquer que sejam os valores lógicos das proposições simples que a compõem. Ou seja, uma proposição composta é uma tautologia se e somente se a coluna de resultado de sua tabela-verdade contém somente valores lógicos verdadeiros (**V**).

Por exemplo, a proposição $p \vee (\neg p)$ tem a seguinte tabela-verdade:

| $p$ | $\neg p$ | $p \vee (\neg p)$ |
|---|---|---|
| **V** | **F** | **V** |
| **V** | **F** | **V** |
| **F** | **V** | **V** |
| **F** | **V** | **V** |

Podemos concluir então que a proposição $p \vee (\neg p)$ é uma tautologia. Observe que a veracidade de uma tautologia é uma propriedade de sua forma, e é independente dos significados de suas proposições simples. A tautologia mais simples é **V**.

Uma *contradição* é uma proposição composta que é sempre falsa, quaisquer que sejam os valores lógicos das suas proposições atômicas. Portanto, uma proposição composta é uma contradição se, e somente se, sua tabela-verdade contém somente **F** na sua coluna final. É fácil ver que a proposição $p \wedge (\neg p)$ é uma contradição.

Em particular, a negação de uma tautologia é sempre uma contradição, e a negação de uma contradição é uma tautologia. A contradição mais simples é **F**.

**Exercício 3.16:** Construa as tabelas-verdade das proposições abaixo, e determine se elas são tautologias, contradições, ou nem uma nem outra.

a) $(p \wedge \neg q) \rightarrow (q \vee \neg p)$.

b) $\neg p \rightarrow p$.

c) $\neg p \leftrightarrow p$.

d) $(p \wedge \neg p) \rightarrow p$.

e) $(p \wedge \neg p) \rightarrow q$.

f) $(p \wedge \neg q) \leftrightarrow (p \rightarrow q)$.

g) $((p \oplus q) \oplus (q \oplus p))$.

**Exercício 3.17:** Construa as tabelas-verdade das proposições abaixo, e determine se elas são tautologias, contradições, ou nem uma nem outra. Note que as fórmulas dependem de 3 variáveis, portanto a tabela verdade tem $2^3 = 8$ linhas.

g) $((p \rightarrow q) \leftrightarrow r) \leftrightarrow (p \rightarrow (q \leftrightarrow r))$.

i) $((p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow r)) \rightarrow (p \rightarrow r)$

### 3.3.2 Equivalência lógica

Duas proposições compostas $p$ e $q$ são ditas *logicamente equivalentes* se elas têm valores lógicos iguais, para quaisquer combinações de valores lógicos que sejam atribuídos às suas proposições atômicas. Em outras palavras, $p$ e $q$ são logicamente equivalentes se e somente se $p \leftrightarrow q$ é uma tautologia.

Por exemplo, podemos verificar, pela tabela-verdade, que as proposições compostas $p$ e $\neg(\neg p)$ são equivalentes, ou seja, que $p \leftrightarrow (\neg(\neg p))$ é uma tautologia:

| $p$ | $\neg p$ | $\neg(\neg p)$ | $p \leftrightarrow (\neg(\neg p))$ |
|---|---|---|---|
| **V** | **F** | **V** | **V** |
| **F** | **V** | **F** | **V** |

Este resultado é conhecido como *lei da negação dupla*.

Como outro exemplo, podemos verificar que a proposição $p \leftrightarrow q$ é equivalente a $(p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p)$; ou seja, que $(p \leftrightarrow q) \leftrightarrow ((p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p))$ é uma tautologia:

| $p$ | $q$ | $p \leftrightarrow q$ | $p \rightarrow q$ | $q \rightarrow p$ | $(p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p)$ | $(p \leftrightarrow q) \leftrightarrow ((p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p))$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| **V** | **V** | **V** | **V** | **V** | **V** | **V** |
| **V** | **F** | **F** | **F** | **V** | **F** | **V** |
| **F** | **V** | **F** | **V** | **F** | **F** | **V** |
| **F** | **F** | **V** | **V** | **V** | **V** | **V** |

Assim como a propriedade de ser tautologia ou de ser contradição, a equivalência lógica de duas proposições depende apenas da sua forma, e não depende do significado das proposições atômicas que ocorrem nela. Assim, por exemplo, a proposição $p \leftrightarrow q$ pode ser verdadeira, dependendo das proposições $p$ e $q$; mas nem por isso $p$ é logicamente equivalente a $q$.

Podemos dizer, portanto, que uma tautologia é uma proposição logicamente equivalente a **V**; e uma contradição é uma proposição logicamente equivalente a **F**.

Muito autores escrevem "$\Leftrightarrow$" ou "$\equiv$", para dizer que $p$ é logicamente equivalente a $q$. Entretanto é importante notar que esse símbolo não é um operador lógico. Em particular, o conceito de equivalência lógica entre fórmulas não deve ser confundido com o operador lógico "$\leftrightarrow$".

### 3.3.3 Equivalências lógicas importantes

A seguir listaremos algumas equivalências lógicas importantes. O leitor pode se convencer da veracidade delas construindo as respectivas tabelas-verdade.

- *Leis de elemento identidade*:
  - $p \wedge \mathbf{V}$ equivale a $p$
  - $p \vee \mathbf{F}$ equivale a $p$
  - $p \leftrightarrow \mathbf{V}$ equivale a $p$
  - $p \oplus \mathbf{F}$ equivale a $p$
- *Leis da idempotência*:
  - $p \wedge p$ equivale a $p$
  - $p \vee p$ equivale a $p$
- *Leis de dominação*:
  - $p \vee \mathbf{V}$ equivale a $\mathbf{V}$
  - $p \wedge \mathbf{F}$ equivale a $\mathbf{F}$
- *Leis da comutatividade*:
  - $p \vee q$ equivale a $q \vee p$
  - $p \wedge q$ equivale a $q \wedge p$

  - $p \leftrightarrow q$ equivale a $q \leftrightarrow p$
  - $p \oplus q$ equivale a $q \oplus p$

- *Leis da associatividade*:
  - $(p \vee q) \vee r$ equivale a $p \vee (q \vee r)$
  - $(p \wedge q) \wedge r$ equivale a $p \wedge (q \wedge r)$
  - $(p \leftrightarrow q) \leftrightarrow r$ equivale a $p \leftrightarrow (q \leftrightarrow r)$
  - $(p \oplus q) \oplus r$ equivale a $p \oplus (q \oplus r)$

- *Leis da distributividade*:
  - $p \vee (q \wedge r)$ equivale a $(p \vee q) \wedge (p \vee r)$
  - $p \wedge (q \vee r)$ equivale a $(p \wedge q) \vee (p \wedge r)$
  - $p \wedge (q \oplus r)$ equivale a $(p \wedge q) \oplus (p \wedge r)$

- *Leis de De Morgan*:
  - $\neg(p \wedge q)$ equivale a $\neg p \vee \neg q$
  - $\neg(p \vee q)$ equivale a $\neg p \wedge \neg q$

- *Leis da implicação*
  - $(p \rightarrow q)$ equivale a $(\neg p \vee q)$
  - $\neg(p \rightarrow q)$ equivale a $(p \wedge \neg q)$

- *Leis da equivalência*
  - $(p \leftrightarrow q)$ equivale a $(p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p)$
  - $(p \leftrightarrow q)$ equivale a $\neg(p \oplus q)$

- *Lei da contrapositiva*:
  - $(p \rightarrow q)$ equivale a $(\neg q) \rightarrow (\neg p)$

- *Lei da redução ao absurdo*:
  - $p \rightarrow q$ equivale a $(p \wedge \neg q) \rightarrow \mathbf{F}$

**Exercício 3.18:** Verifique cada uma das equivalências acima, construindo a tabela-verdade para as duas proposições.

**Exercício 3.19:** Verifique quais das seguintes afirmações são corretas:

a) $(\neg p \wedge (p \vee q))$ é logicamente equivalente a $q$.

b) $((p \rightarrow q) \rightarrow r)$ é logicamente equivalente a $(p \rightarrow (q \rightarrow r))$.

c) $((p \leftrightarrow q) \leftrightarrow r)$ é logicamente equivalente a $(p \leftrightarrow (q \leftrightarrow r))$.

d) $p \rightarrow (q \wedge r)$ é logicamente equivalente a $(p \rightarrow q) \wedge (p \rightarrow r)$.

e) $(p \vee q) \rightarrow r$ é logicamente equivalente a $(p \rightarrow r) \wedge (q \rightarrow r)$.

**Exercício 3.20:** Use a tabela-verdade para provar as *leis de absorção*:

a) $(p \vee (p \wedge q))$ é logicamente equivalente a $p$.

a) $(p \wedge (p \vee q))$ é logicamente equivalente a $p$.

**Exercício 3.21:** Quais proposições são logicamente equivalentes?

a) $p \wedge \neg q$.

b) $p \rightarrow q$.

c) $\neg(\neg p \vee q)$.

d) $q \rightarrow \neg p$.

e) $p \vee \neg q$.

f) $\neg(p \rightarrow q)$.

g) $p \rightarrow \neg q$.

h) $\neg p \rightarrow \neg q$.

**Exercício 3.22:** Encontre uma fórmula usando apenas os conectivos $\wedge$ e $\neg$ que seja logicamente equivalente a $(r \wedge \neg p) \vee (q \wedge \neg r)$. Justifique sua resposta com a tabela-verdade.

**Exercício 3.23:** Considere a tabela-verdade abaixo de uma certa proposição composta $F$ formada a partir de proposições elementares $x$, $y$ e $z$:

| $x$ | $y$ | $z$ | $F$ |
|---|---|---|---|
| **V** | **V** | **V** | **F** |
| **V** | **V** | **F** | **F** |
| **V** | **F** | **V** | **V** |
| **V** | **F** | **F** | **V** |
| **F** | **V** | **V** | **F** |
| **F** | **V** | **F** | **F** |
| **F** | **F** | **V** | **F** |
| **F** | **F** | **F** | **F** |

Escreva uma fórmula equivalente a $F$, usando as variáveis $x$, $y$ e $z$, e:

(a) apenas os operadores $\wedge$, $\vee$ e $\neg$

(b) apenas os operadores $\neg$ e $\rightarrow$

**Exercício 3.24:** Encontre uma fórmula usando apenas os conectivos $\rightarrow$ e $\neg$ que seja logicamente equivalente a $p \wedge q$. Justifique sua resposta com a tabela-verdade.

**Exercício 3.25:** Encontre uma uma proposição usando os conectivos $\rightarrow$ e $\oplus$ que seja logicamente equivalente a $p \vee q$. Justifique sua resposta com a tabela-verdade.

**Exercício 3.26:** Use as leis de equivalência lógica vistas acima para encontrar fórmulas mais simples que sejam logicamente equivalentes às seguintes proposições:

a) $\neg(\neg p \vee q) \vee (p \wedge \neg r)$.

b) $\neg(\neg p \wedge q) \vee (p \wedge \neg r)$.

c) $(p \wedge r) \vee (\neg r \wedge (p \vee q))$.

### 3.3.4 Implicação lógica

Sejam $p$ e $q$ duas proposições. Dizemos que $p$ *implica logicamente* $q$ se $p \rightarrow q$ é uma tautologia. Nesse caso, dizemos também que $p \rightarrow q$ é uma *implicação lógica* ou $q$ é uma *consequência lógica de* $p$. Mais geralmente, sejam $p_1, p_2, \ldots, p_n$ uma coleção de proposições. Dizemos que essas proposições *implicam logicamente* $q$ se $(p_1 \wedge p_2 \wedge \cdots \wedge p_n) \rightarrow q$ é uma tautologia.

Observe que se uma implicação $p \rightarrow q$ é verdadeira, sua conclusão $q$ pode ser verdadeira ou falsa; mas se tanto a implicação quanto a hipótese $p$ são verdadeiras, então a conclusão $q$ deve ser verdadeira. Isto é, as proposições $p$ e $p \rightarrow q$ implicam logicamente $q$. Isso significa que, se estabelecemos de alguma forma que $p$ é verdadeira, e que $p \rightarrow q$ é verdadeira, podemos concluir que $q$ é verdadeira. Esta implicação lógica é chamada *lei do modus ponens* e é frequentemente usada nas demonstrações de teoremas em matemática. Listaremos algumas implicações lógicas mais conhecidas. As letras $p, q, r$ representam proposições arbitrárias.

- *Lei da adição*:
  - $p$ implica logicamente $p \vee q$
- *Lei da simplificação*:
  - $p \wedge q$ implica logicamente $p$
- *Lei do modus ponens*:
  - $p$ e $p \rightarrow q$ implicam logicamente $q$
- *Lei do modus tollens*:
  - $p \rightarrow q$ e $\neg q$ implicam logicamente $\neg p$
- *Silogismo hipotético*:
  - $p \rightarrow q$ e $q \rightarrow r$ implicam logicamente $p \rightarrow r$
- *Silogismo disjuntivo*:
  - $p \vee q$ e $\neg p$ implicam logicamente $q$

- *Demonstração por absurdo*:
  - $p \to \mathbf{F}$ implica logicamente $\neg p$

O símbolo "$\Rightarrow$" é frequetemente usado para significar "implica logicamente". Entretanto, como o símbolo "$\Leftrightarrow$", ele não é um operador lógico.

**Exercício 3.27:** Verifique cada uma das implicações acima, construindo a tabela-verdade para as duas proposições.

**Exercício 3.28:** Verifique quais das seguintes afirmações são corretas:

a) $(p \to (q \vee r))$ implica logicamente em $(p \to q)$.

b) $(p \to q)$ implica logicamente em $(r \wedge p \to q)$.

c) $((p \vee q) \to r)$ implica logicamente em $(p \to r)$.

d) $((p \to q) \wedge \neg p)$ implica logicamente em $\neg q$.

e) $(p \leftrightarrow q)$ implica logicamente em $(p \to q)$.

f) $(p \to q)$ implica logicamente em $(p \leftrightarrow q)$.

g) $(p \to q)$ implica logicamente em $q$.

h) $(p \vee q) \wedge (\neg p \vee r)$ implica logicamente em $(q \vee r)$.

i) $(p \to q) \wedge (q \to r)$ implica logicamente em $(p \to r)$.

### 3.3.5 Equivalência em contexto específico

As equivalências e implicações lógicas acima são absolutas, isto é, podem ser usadas quaisquer que sejam as proposições simples representadas pelas variáveis.

Neste sentido, por exemplo as fórmulas $p \leftrightarrow q$ e $p \wedge q$ não são equivalentes; pois, quando substituímos $p = \mathbf{F}$ e $q = \mathbf{F}$, a primeira é verdadeira e a segunda é falsa. Porém, se soubermos de alguma maneira, que a afirmação $p \vee q$ é verdadeira, então a combinação $p = \mathbf{F}$ e $q = \mathbf{F}$ não pode ocorrer. As tabelas-verdade dessas fórmulas são:

| $p$ | $q$ | $p \leftrightarrow q$ | $p \wedge q$ | $p \vee q$ |
|---|---|---|---|---|
| **F** | **F** | **V** | **F** | **F** |
| **F** | **V** | **F** | **F** | **V** |
| **V** | **F** | **F** | **F** | **V** |
| **V** | **V** | **V** | **V** | **V** |

Observe que, em todos os casos onde a fórmula $p \vee q$ é verdadeira, a afirmação $p \leftrightarrow q$ tem o mesmo valor lógico de que $p \wedge q$. Portanto, *supondo que $p \vee q$ é verdade*, podemos dizer que as duas outras proposições são logicamente equivalentes.

Em geral, podemos dizer que duas proposições compostas são equivalentes se tiverem o mesmo valor lógico para todas as combinações de valores de suas proposições simples *que forem permitidas pelos fatos conhecidos sobre as mesmas*.

## 3.4 Síntese de proposições

### 3.4.1 Formas normais disjuntivas e conjuntivas

Dada uma tabela-verdade com determinadas variáveis lógicas, é sempre possível construir uma proposição composta com essas mesmas variáveis que tem essa tabela-verdade.

Podemos construir essa proposição considerando todas as linhas da tabela em que o resultado desejado é verdadeiro, e escrevendo para cada linha uma sub-fórmula lógica que é verdadeira para essa combinação de valores das variáveis, e falsa para todas as outras combinações. A disjunção de todas essas fórmulas é a proposição desejada.

Por exemplo, suponha que queremos construir uma proposição $r$ que tem esta tabela-verdade:

| $p$ | $q$ | $r$ |
|---|---|---|
| **F** | **F** | **F** |
| **F** | **V** | **V** |
| **V** | **F** | **V** |
| **V** | **V** | **F** |

Para a segunda linha, precisamos de uma sub-fórmula que seja **V** apenas quando $p$ = **F** e $q$ = **V**. Para isso podemos usar a fórmula $(\neg p) \wedge q$. Para a terceira linha, a fórmula é $p \wedge (\neg q)$. A proposição desejada é então

$$((\neg p) \wedge q) \vee (p \wedge (\neg q))$$

A sub-fórmula correspondente a cada linha com resultado **V** é uma conjunção de todas variáveis ou de suas negações. Especificamente, uma variável deve ser negada na sub-fórmula se e somente se nessa linha ela tem valor **F**.

A fórmula obtida desta maneira — uma disjunção de conjunções, cujos termos são variáveis ou suas negações — é chamada de *forma normal disjuntiva*. A construção acima nos permite concluir que toda proposição composta tem uma forma normal disjuntiva que lhe é logicamente equivalente.

Outra maneira de construir uma proposição a partir de sua tabela-verdade é considerar cada linha em que o resultado desejado é **F**, e escrever uma fórmula que é falsa apenas para essa combinação de variáveis. Esta fórmula pode ser uma disjunção das variáveis e suas negações. A conjunção dessas fórmulas é a proposição desejada. A partir da tabela acima, por exemplo, obteríamos

$$(p \vee q) \wedge ((\neg p) \vee (\neg q))$$

A fórmula assim obtida é chamada de *forma normal conjuntiva*.

**Exercício 3.29:** Considere a tabela-verdade abaixo:

| $p$ | $q$ | $r$ | $s$ |
|---|---|---|---|
| **F** | **F** | **F** | **F** |
| **F** | **F** | **V** | **V** |
| **F** | **V** | **F** | **V** |
| **F** | **V** | **V** | **F** |
| **V** | **F** | **F** | **V** |
| **V** | **F** | **V** | **F** |
| **V** | **V** | **F** | **F** |
| **V** | **V** | **V** | **F** |

1. Construa uma proposição composta na forma normal disjuntiva com essa tabela-verdade.
2. Idem, na forma normal conjuntiva.

**Exercício 3.30:** Sejam $x_1, x_2, \ldots, x_5$ cinco variáveis lógicas. Escreva uma fórmula usando apenas essas variáveis e os operadores $\wedge$, $\vee$ e $\neg$, equivalente à afirmação "pelo menos duas e no máximo três dessas variáveis são verdadeiras."

### 3.4.2 Sistemas completos de operadores

A construção da forma normal disjuntiva (ou conjuntiva) permite concluir que toda proposição composta, usando quaisquer conectivos, é logicamente equivalente a outra proposição que usa apenas os conectivos $\vee$, $\wedge$ e $\neg$. Dizemos então que estes três conectivos formam um *sistema completo* de operadores lógicos.

**Exercício 3.31:** Prove que os conectivos $\wedge$ e $\neg$, sozinhos, constituem um sistema completo de operadores lógicos. Idem para $\vee$ e $\neg$.

**Exercício 3.32:** Prove que os conectivos $\oplus$ e $\wedge$, sozinhos, constituem um sistema completo de operadores lógicos. (Dica: prove que é possível obter o operador $\neg$ combinando esses dois operadores.)

**Exercício 3.33:** Prove que o conectivo $\bar{\wedge}$ (não-e), sozinho, constitui um sistema completo de operadores lógicos. Idem para $\bar{\vee}$ (não-ou).

## 3.5 Dualidade lógica

Seja $p$ uma proposição que usa apenas os conectivos $\vee$, $\wedge$, e $\neg$. A *proposição dual* é obtida a partir de $p$ trocando-se toda ocorrência de $\vee$ por $\wedge$, e vice-versa; bem como toda ocorrência de **T** por **F**, e vice-versa. Por exemplo, a dual da proposição $(p \wedge \neg q) \vee r$ é $(p \vee \neg q) \wedge r$. A dual de uma proposição $p$ é geralmente denotada por $p^*$. Note que $(p^*)^*$, a dual da dual, é a proposição original $p$.

Em geral, $p$ e $p^*$ não são logicamente equivalentes. Entretanto, se $p$ é uma tautologia, $p^*$ é uma contradição, e vice-versa. Além disso, prova-se que se duas proposições $p$ e $q$ são equivalentes, então $p^*$ e $q^*$ são equivalentes, e vice-versa. Esta propriedade nos permite obter equivalências lógicas a partir de equivalências já demonstradas.

Por exemplo, considere as duas leis de distributividade, de $\wedge$ sobre $\vee$ e $\vee$ sobre $\wedge$:

$$p \wedge (q \vee r) \text{ é equivalente a } (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$$

$$p \vee (q \wedge r) \text{ é equivalente a } (p \vee q) \wedge (p \vee r)$$

Uma vez provada a primeira equivalência, não precisamos provar a segunda: basta observar que $p \vee (q \wedge r)$ é a proposição dual de $p \wedge (q \vee r)$, e $(p \vee q) \wedge (p \vee r)$ é a dual de $(p \wedge q) \vee (p \wedge r)$.

**Exercício 3.34:** Escreva a proposição dual de $(p \wedge q) \vee \neg(p \vee r)$.

**Exercício 3.35:** Qual é a relação entre as tabelas-verdade de uma proposição $p$ e de sua proposição dual $p^*$?

**Exercício 3.36:** Encontre uma proposição composta com duas variáveis lógicas, que seja logicamente equivalente a sua proposição dual usando apenas os operadores $\vee$, $\wedge$ e $\neg$ .

**Exercício 3.37:** Para definir o dual de um operador lógico binário qualquer $\odot$, basta encontrar uma fórmula equivalente a $p \odot q$ que use apenas os operadores $\wedge$, $\vee$, e $\neg$, e definir um operador $\otimes$ tal que $p \otimes q$ seja equivalente à proposição dual dessa fórmula. Use este processo para definir os operadores duais de $\leftrightarrow$, $\oplus$, $\rightarrow$, $\bar{\vee}$ e $\bar{\wedge}$. Em cada caso, determine se o dual é um operador conhecido.

## 3.6 Lógica de Predicados

Uma *proposição aberta* é uma proposição que depende de uma ou mais variáveis, por exemplo

- "$x + 1$ é maior que $x$".
- "o quadrado de $x$ é 16".
- "$x$ é um número primo".
- "$x$ é maior que $y$".
- "$x + y = 2x + z$"

Em geral, o valor lógico de uma proposição aberta depende dos valores das variáveis que nela ocorrem. Por exemplo, a frase "$x$ é maior que $y$" é verdadeira se os valores de $x$ e $y$ forem 7 e 4, mas é falsa se os valores forem 10 e 21.

Para certos valores, a frase pode até mesmo não fazer sentido: por exemplo, "$x$ é maior que $y$" não faz sentido se $x$ e $y$ forem números complexos, ou se $x$ for uma matriz e $y$ for um número real. Com esta ressalva, sempre que substituímos as variáveis de uma proposição aberta por valores aceitáveis obtemos uma *proposição fechada* que não depende de nenhuma variável — e que portanto pode ser tratada como uma proposição atômica do cálculo proposicional.

No restante deste capítulo, usaremos letras minúsculas $x$, $y$, $z$ para denotar variáveis. Usaremos também letras maiúsculas $P$, $Q$, $R$, ..., seguidas por uma lista de variáveis distintas entre parênteses, para denotar proposições abertas que dependem dessas variáveis. Por exemplo, a notação $P(x)$ pode representar a frase "$x$ é um número primo", e $Q(x, y)$ pode representar "$y$ é maior que $x$".

Os símbolos $P$, $Q$, $R$, ... são chamados de *predicados*, e podem ser entendidos como funções que, dados valores das variáveis, assumem um valor lógico (**F** ou **V**). Como na álgebra, depois de definido um predicado $P(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, usaremos a notação $P(v_1, v_2, \ldots, v_n)$ para indicar a substituição da variável $x_1$ pelo valor $v_1$, $x_2$ pelo valor $v_2$, etc.. Por exemplo, se $Q(x, y)$ foi definido como a proposição aberta "$y$ é maior que $x$", então $Q(3, z + 1)$ representa a afirmação "$z + 1$ é maior que 3". Supõe-se, também, que todas as ocorrências da mesma variável na proposição são substituídas pelo mesmo valor.

### 3.6.1 Quantificação universal

A substituição de variáveis por valores explícitos não é a única maneira de transformar uma proposição aberta em uma proposição atômica. Outra maneira é a chamada *quantificação universal*, que é uma afirmação do tipo "para todo $x$ no conjunto $D$, $P(x)$".

Denotaremos esta frase por $(\forall x \in D)P(x)$. Nesta frase, $D$ (o *domínio* da quantificação) pode ser qualquer conjunto previamente definido, $x$ pode ser qualquer variável, e $P(x)$ qualquer proposição que depende dessa variável, que tenha valor lógico bem definido sempre que $x$ for substituído por um elemento de $D$.

Por definição, a frase $(\forall x \in D)\, P(x)$ é verdadeira se, e somente se, a proposição $P(x)$ for sempre verdadeira quando substituímos variável $x$ por qualquer elemento do conjunto $D$. Se houver um (ou mais de um) elemento de $D$ que torna $P(x)$ falsa quando atribuído à variável $x$, então a frase $(\forall x \in D)\, P(x)$ é falsa.

Por exemplo, se $P(x)$ representa a frase "$x + 1$ é maior que $x$", então a frase "$(\forall x \in \mathbb{Z})\, P(x)$" é verdadeira, pois, se substituirmos $x$ por qualquer número inteiro, a afirmação $P(x)$ será sempre verdadeira.

Por outro lado, se $P(x)$ representa a frase "$x$ é um número primo", então a frase "$(\forall x \in \mathbb{N})\, P(x)$" é falsa; pois, embora as afirmações $P(3)$ e $P(17)$ sejam verdadeiras, a afirmação $P(6)$ (por exemplo) é falsa.

Em geral, se o domínio $D$ é um conjunto finito, com elementos $v_1, v_2, \cdots, v_n$, então a frase $(\forall x \in D)\, P(x)$ é equivalente a $P(v_1) \wedge P(v_2) \wedge \cdots \wedge P(v_n)$.

**Exercício 3.38:** Sejam $\mathbb{N}$ o conjunto dos números naturais, e suponha que $P(x)$ significa " $x$ é par ", $Q(x)$ significa "x é divisível por 3" e $R(x)$ significa "x é divisível por 4". Escreva em linguagem natural (português) cada uma das proposições a seguir, e determine seu valor-verdade:

a) $(\forall x \in \mathbb{N})\, P(x)$.

b) $(\forall x \in \mathbb{N})\, P(x) \vee Q(x)$.

c) $(\forall x \in \mathbb{N})\, P(x) \to Q(x)$.

d) $(\forall x \in \mathbb{N})\, P(x) \vee R(x)$.

e) $(\forall x \in \mathbb{N})\, P(x) \wedge R(x)$.

f) $(\forall x \in \mathbb{N})\, R(x) \to P(x)$.

g) $(\forall x \in \mathbb{N})\, P(x) \to \neg Q(x)$.

h) $(\forall x \in \mathbb{N})\, P(x) \to P(x + 2)$.

i) $(\forall x \in \mathbb{N})\, R(x) \to R(x + 4)$.

j) $(\forall x \in \mathbb{N})\, Q(x) \to Q(x + 1)$.

### 3.6.2 Quantificação existencial

Outra maneira de transformar uma proposição aberta em fechada é através da *quantificação existencial*, que tem a forma "existe um $x$ no conjunto $D$ tal que $P(x)$".

Denotaremos esta frase por $(\exists x \in D)\, P(x)$. Aqui também, o domínio $D$ da quantificação pode ser qualquer conjunto já definido; $x$ pode ser qualquer variável; e $P(x)$ qualquer proposição que depende dessa variável.

Por definição, a frase "$(\exists x \in D)\, P(x)$" é verdadeira se, e somente se, existir pelo menos um elemento de $D$ que, atribuído à variável $x$, torna a afirmação $P(x)$ verdadeira. A frase "$(\exists x \in D)\, P(x)$" é falsa se, e somente se, não existe nenhum elemento de $D$ com essa propriedade.

Se $D$ é um conjunto finito com elementos $v_1, v_2, \cdots, v_n$, então a frase $(\exists x \in D)\, P(x)$ é equivalente a $P(v_1) \vee P(v_2) \vee \cdots \vee P(v_n)$.

Como exemplo, denotemos por $P(x)$ o predicado "$x$ é um número primo". A proposição $(\exists x \in \mathbb{N})\, P(x)$ é verdadeira, pois, por exemplo, a afirmação $P(7)$ ("7 é um número primo") é verdadeira, e 7 é um elemento de $\mathbb{N}$. Por outro lado, se $Q(y)$ é a proposição aberta "$y$ é igual a $y + 1$", então a frase "$(\exists y \in \mathbb{R})\, Q(y)$" é falsa; pois, qualquer número real que for atribuído a $y$, a afirmação $Q(y)$ ("$y$ é igual a $y + 1$") é falsa.

**Exercício 3.39:** Sejam $\mathbb{N}$ o conjunto dos números naturais, e suponha que $P(x)$ significa "$x$ é par", $Q(x)$ significa "x é divisível por 3" e $R(x)$ significa "x é divisível por 4". Escreva em linguagem natural (português) cada uma das proposições a seguir, e determine seu valor-verdade:

a) $(\exists x \in \mathbb{N})\, R(x)$

b) $(\exists x \in \mathbb{N})\, P(x) \vee Q(x)$.

c) $(\exists x \in \mathbb{N})\, P(x) \to Q(x)$.

d) $(\exists x \in \mathbb{N})\, Q(x) \to Q(x + 1)$.

e) $(\exists x \in \mathbb{N})\, P(x) \to Q(x + 1)$.

**Exercício 3.40:** Sejam $\mathbb{N}$ o conjunto dos números naturais, $P(x, y)$ é "$x + 2 > y$". Escreva as proposições listadas abaixo em linguagem natural (português) e atribua o valor-verdade correspondente a cada uma delas:

a) $(\exists x \in \mathbb{N})(\forall y \in \mathbb{N})\, P(x, y)$.

b) $(\exists x \in \mathbb{N})(\exists y \in \mathbb{N})\, P(x, y)$.

c) $(\forall x \in \mathbb{N})(\forall y \in \mathbb{N})\, P(x, y)$.

d) $(\forall x \in \mathbb{N})(\exists y \in \mathbb{N})\, P(x, y)$.

### 3.6.3 Quantificador de existência e unicidade

Na matemática são comuns afirmações do tipo "existe um *único* $x$ no conjunto $D$ tal que $P(x)$." Esta afirmação é frequentemente denotada por $(\exists! x \in D)\, P(x)$. Esta fórmula pode ser escrita em termos dos quantificadores já definidos:

$$((\exists x \in D)\, P(x)) \wedge ((\forall x \in D)(\forall y \in D)\, ((P(x) \wedge P(y)) \to x = y))$$

Se o domínio $D$ é finito, por exemplo $D = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$, a proposição $(\exists! x \in D)\, P(x)$ significa que uma, *e apenas uma*, das afirmações $P(x_1), P(x_2), \ldots, P(x_n)$ é verdadeira.

**Exercício 3.41:** Seja $D = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ para algum $n \geq 3$. A afirmação $(\exists! x \in D)\, P(x)$ equivale a $P(x_1) \oplus P(x_2) \oplus \cdots \oplus P(x_n)$? E se $n = 2$? Justifique suas respostas.

### 3.6.4 Quantificação sobre o conjunto vazio

A afirmação "existe um estudante com mais de duzentos anos que gosta de física" é obviamente falsa; pois nem sequer existem estudantes com essa idade, muito menos que gostem de física. Esta afirmação pode ser escrita $(\exists x \in D)\, P(x)$, onde $D$ é o conjunto dos estudantes com mais de duzentos anos de idade, e $P(x)$ denota a afirmação "$x$ gosta de física". De modo geral, se o domínio $D$ é vazio, a afirmação "$(\exists x \in D)\, P(x)$" é *falsa, qualquer que seja o predicado* $P$.

Considere agora a afirmação: "todos os estudantes com mais de duzentos anos de idade gostam de física." Qual o valor lógico desta frase?

Na notação acima, esta afirmação pode ser escrita $(\forall x \in D)\, P(x)$. A questão é: qual o valor lógico da afirmação "$P(x)$ é verdadeira, para qualquer elemento $x$ de $D$", se $D$ não tem nenhum elemento?

Verifica-se que, quando o domínio $D$ é vazio, a interpretação mais consistente é considerar a frase $(\forall x \in D)\, P(x)$ *verdadeira, qualquer que seja o predicado* $P$. Dizemos que tais afirmações são *verdadeiras por vacuidade*. Em particular, a frase "todos os estudantes com mais de duzentos anos de idade gostam de física" deve ser considerada verdadeira.

### 3.6.5 Cálculo de predicados

A área da lógica que trata de predicados e quantificadores é chamada *cálculo de predicados*. Assim como no cálculo proposicional, no cálculo de predicados estudam-se as regras de raciocínio que valem para *quaisquer* predicados. Em particular, estamos interessados em *equivalências lógicas* e *implicações lógicas* entre proposições com quantificadores.

Assim como no cálculo proposicional, definimos uma *tautologia* do cálculo de predicados como sendo uma proposição com domínios e predicados simbólicos que é verdadeira quaisquer que sejam as definições que adotemos para os mesmos. Um exemplo trivial é a proposição "$(\forall x \in D)\, P(x) \vee \neg P(x)$". Dizemos também que duas proposições quantificadas $p$ e $q$ são *logicamente equivalentes* se $p \leftrightarrow q$ é uma tautologia, e que $p$ *implica logicamente* $q$ se $p \rightarrow q$ é uma tautologia. Por outro lado, uma *contradição* é uma proposição que é falsa quaisquer que sejam as definições adotadas para seus predicados; como, por exemplo, "$(\exists x \in D)\, P(x) \wedge \neg P(x)$".

### 3.6.6 Negação de quantificadores

Um exemplo importante de equivalência lógica no cálculo de predicados são as regras para *negação de quantificadores*:

- $\neg[(\forall x \in D)\, P(x)]$ é equivalente a $(\exists x \in D)\, \neg P(x)$
- $\neg[(\exists x \in D)\, P(x)]$ é equivalente a $(\forall x \in D)\, \neg P(x)$

Ou seja, podemos trocar as posições do operador de negação e do quantificador, *desde que também troquemos o tipo de quantificador* ($\forall$ por $\exists$, e vice-versa). Ressaltamos que estas equivalências valem para qualquer predicado $P$ e qualquer domínio $D$, e, naturalmente, qualquer que seja a variável usada nos quantificadores.

Por exemplo, considere a afirmação $(\forall n \in \mathbb{N})\, n + 1 > 2$. O valor lógico dessa afirmação é falso, pois a proposição aberta "$n + 1 > 2$" não vale quando $n = 0$ ($(0 + 1) = 1$ e 1 não é maior que 2). Por

outro lado, este mesmo exemplo mostra que existe um $n$ tal que a afirmação contrária "$n + 1 \leq 2$" é verdadeira; isto é, que $(\exists n \in D)\, n + 1 \leq 2$ é verdadeira.

Lembramos que $\forall$, de certa forma, representa várias conjunções ($\wedge$); no mesmo sentido que que $\exists$ representa várias disjunções ($\vee$). Observe portanto que as regras para disjunção de quantificadores são análogas às leis de De Morgan para negação de $\wedge$ e $\vee$.

Estas regras valem também quando o domínio $D$ é vazio. Aliás, a principal justificativa para a regra da seção 3.6.4 é justamente fazer com que as regras de negação de quantificadores sejam válidas em todos os casos. Por exemplo, considere a afirmação "existe um estudante com mais de duzentos anos de idade que não gosta de física", ou seja $(\exists x \in D)\, \neg P(x)$ onde $D$ é o conjunto (vazio) dos "estudantes com mais de duzentos anos", e $P(x)$ é a frase "$x$ gosta de física". Esta afirmação é obviamente falsa; e portanto sua negação, $\neg((\exists x \in D)\, \neg P(x))$, deveria ser verdadeira. De fato, pelas regras acima, a negação desta frase $\neg((\exists x \in D)\, \neg P(x))$ é $(\forall x \in D)\, \neg\neg P(x)$, ou seja $(\forall x \in D)\, P(x)$; e, conforme definimos na seção 3.6.4, esta afirmação tem valor lógico verdadeiro.

### 3.6.7 Distributividade de quantificadores

Em alguns casos, é possível trocar a ordem de quantificadores com outros conectivos lógicos. Por exemplo, lembrando que $\forall$ representa uma série de conjunções $\wedge$, e que $\exists$ representa uma série de disjunções $\vee$, podemos concluir que

- $(\forall x \in D)\, (P(x) \wedge Q(x))$ equivale a $((\forall x \in D)\, P(x)) \wedge ((\forall x \in D)\, Q(x))$.
- $(\exists x \in D)\, (P(x) \vee Q(x))$ equivale a $((\exists x \in D)\, P(x)) \vee ((\exists x \in D)\, Q(x))$.

### 3.6.8 Traduzindo linguagem natural para proposições quantificadas

A codificação de proposições da linguagem natural em fórmulas com quantificadores nem sempre é fácil. Na linguagem natural, muitas vezes os quantificadores e/ou o domímio estão implícitos.

Por exemplo, considere a seguinte afirmação: "macacos gostam de bananas."Nesta afirmação, há um quantificador universal implícito: "*todos* os macacos gostam de bananas. " Sua formalização é portanto $(\forall x \in M)\, B(x)$ onde $M$ é o conjunto dos macacos, e $B(x)$ é o predicado "$x$ gosta de banana."

Outro exemplo é a afirmação "existe um $x$ tal que $x^2 = 5$". O valor lógico dessa afirmação depende do domínio; se escrevermos $(\exists x \in \mathbb{N})\, x^2 = 5$, a afirmação é falsa; se escrevermos $(\exists x \in \mathbb{R})\, x^2 = 5$, ela é verdadeira. Neste caso, o domínio correto só pode ser determinado pelo contexto da afirmação.

Várias expressões podem ser usadas na língua portuguesa para expressar os quantificadores:

- "para qualquer $x$ em $D$, $P(x)$",
- "se $x$ é um elemento genérico de $D$, então $P(x)$",
- "um elemento que está em $D$ sempre satisfaz $P(x)$",
- "para quem está em $D$, vale $P(x)$",
- "algum elemento de $D$ satisfaz $P(x)$",

- "há elementos em $D$ para os quais $P(x)$ vale".

Há também muitas expressões para a negação dos quantificadores:

- "nenhum $x$ em $D$ satisfaz $P(x)$",
- "nem todo $x$ em $D$ satisfaz $P(x)$",
- "não há elemento $x$ em $D$ que satisfaça $P(x)$",
- "ninguém em $D$ satifaz $P(x)$",
- "para nenhum $x$ em $D$ vale $P(x)$",
- "quando $x$ está em $D$, a afirmação $P(x)$ nem sempre é verdadeira."

Na linguagem natural, muitas vezes o quantificador está no meio ou no fim da sentença:

- "$P(x)$ vale para todo $x$ em $D$",
- "$P(x)$ é verdade para algum $x$ em $D$",
- "$P(x)$ vale sempre que $x$ está em $D$",
- "$P(x)$ não é verdade para alguns elementos $x$ de $D$".

Uma maneira de verificar se uma fórmula com quantificadores representa corretamente uma afirmação em linguagem natural é trocar os quantificadores por meio das regras de negação, traduzir o resultado novamente para a linguagem natural, e conferir se o sentido é o mesmo que o original. Por exemplo, suponha que representemos a frase "nenhum gorila é bonito" por $\neg(\exists x \in F)\, B(x)$, onde $F$ é o conjunto de gorilas, e $B(x)$ significa "$x$ é bonito". Pelas regras de negação, esta frase é equivalente a $(\forall x \in F)\, \neg B(x)$, ou seja, "todos os gorilas são feios".

É preciso tomar cuidado com certas frases em língua natural cujo sentido é ambíguo. Por exemplo, "um elemento $x$ de $D$ satisfaz $P(x)$" pode significar tanto $(\forall x \in D)\, P(x)$ quanto $(\exists x \in D)\, P(x)$.

**Exercício 3.42:** Escreva as afirmações abaixo na forma simbólica, definindo os predicados e os domínios dos quantificadores.

a) Todo triângulo equilátero é equiângulo.

b) Todos os estudantes gostam de física.

c) Alguns estudantes não gostam de física.

d) Cada pessoa tem uma mãe.

e) Pelo menos uma das letras da palavra *banana* é uma vogal.

f) Entre todos os inteiros exitem alguns que são primos.

g) Um dia do próximo mês é domingo.

h) Alguns inteiros são pares e divisíveis por 3.

i) Alguns inteiros são pares ou divisíveis por 3.

j) $x^2 - 14 = 0$ tem uma solução positiva.

h) Toda solução de $x^2 - 14 = 0$ é positiva.

k) Nenhuma solução de $x^2 - 14 = 0$ é positiva.

l) Existe algum estudante de direito que não é brasileiro.

m) Todo estudante de direito tem um celular.

n) Ninguém é perfeito.

o) Alguém é perfeito.

p) Todos os nossos amigos são perfeitos.

q) Algum de nossos amigos é perfeito.

r) Todos são nossos amigos e são perfeitos.

s) Ninguém é nosso amigo ou alguém não é perfeito.

t) Apenas um de nossos amigos é perfeito.

**Exercício 3.43:** Expresse, em português, a negação de cada uma das proposições do exercício 3.42.

**Exercício 3.44:** Expresse a negação de cada uma das proposições do exercício 3.39 em forma simbólica e em linguagem natural (português).

### 3.6.9 Mudança de domínio

A regra abaixo permite restringir o domínio das quantificações universais:

- As afirmações $D \subseteq E$ e $(\forall x \in E)\, P(x)$ implicam logicamente $(\forall x \in D)\, P(x)$.

Ou seja, uma quantificação universal verdadeira continua verdadeira se restringirmos o domínio a qualquer subconjunto do mesmo. Por exemplo, se sabemos que "todo ruminante tem quatro patas", e que as zebras são um subconjunto dos ruminantes, podemos concluir que "todas as zebras tem quatro patas".

Reciprocamente, a regra abaixo permite ampliar o domínio de quantificações existenciais:

- As afirmações $D \subseteq E$ e $(\exists x \in D)\, P(x)$ implicam logicamente $(\exists x \in E)\, P(x)$.

Ou seja, uma quantificação existencial verdadeira continua verdadeira se ampliarmos o domínio. Por exemplo, se sabemos que "existe um boi preto", e que os bois são um subconjunto dos ruminantes, podemos concluir que "existe um ruminante preto".

Outras regras permitem mudar o domíno no sentido contrário, com ressalvas na fórmula quantificada:

- Se $D \subseteq E$, a afirmação $(\forall x \in D)\, P(x)$ é logicamente equivalente a $(\forall x \in E)\, (x \in D \to P(x))$.

- Se $D \subseteq E$, a afirmação $(\exists x \in D)\, P(x)$ é logicamente equivalente a $(\exists x \in E)\, (x \in D \wedge P(x))$.

Por exemplo, se aceitarmos que os pagapaios são um subconjunto dos animais, a afirmação "todo papagaio tem um bico" equivale a dizer "todo animal, se for um papagaio, tem um bico;" E a afirmação "existe um papagaio amarelo" equivale a dizer que "existe um animal que é papagaio e é amarelo."

Um erro comum é confundir as duas regras, e mudar o domínio do quantificador universal com $\wedge$ ao invés de $\rightarrow$. Por exemplo, traduzir a afirmação "todo macaco gosta de banana" pela fórmula $(\forall x \in A)\,(x \in M) \wedge B(x)$, onde $A$ é o conjunto dos animais, $M$ é o conjunto dos macacos, e $B(x)$ significa "$x$ gosta de banana". Esta fórmula na verdade significa "todo animal é macaco e gosta de banana", que é bem diferente do sentido original. A fórmula correta seria $(\forall x \in A)\,(x \in M) \rightarrow B(x)$, que, pelas regras acima, equivale a $(\forall x \in M)\,B(x)$.

O erro simétrico é usar $\rightarrow$ ao mudar o domínio do quantificador existencial. Por exemplo, representar a afirmação (falsa) "existe um macaco que voa" por $(\exists x \in A)\,(x \in M) \rightarrow V(x)$, onde $A$ é o conjunto dos animais, $M$ o conjunto dos macacos, e $V(x)$ significa "$x$ voa". Esta fórmula na verdade significa "existe um animal que, se for macaco, voa". Esta afirmação é verdadeira, pois basta considerar um $x$ em $A \setminus M$ (um animal que não é macaco) e a frase $(x \in M) \rightarrow V(x)$ fica $\mathbf{F} \rightarrow V(x)$ e portanto verdadeira. A fórmula correta seria $(\exists x \in A)\,(x \in M) \wedge V(x)$, que é falsa como a original.

**Exercício 3.45:** Em cada um dos casos abaixo, procure determinar se as duas proposições são logicalmente equivalentes:

a) $((\forall x \in A)\,P(x)) \wedge ((\forall x \in B)\,P(x))$ equivale a $(\forall x \in A \cup B)\,P(x)$?

b $((\exists x \in A)\,P(x)) \vee ((\exists x \in B)\,Q(x))$ equivale a $(\exists x \in A \cup B)\,(P(x) \vee Q(x))$?

c) $((\forall x \in A)\,P(x)) \vee ((\forall x \in B)\,P(x))$ equivale a $(\forall x \in A \cup B)\,P(x)$?

d) $((\exists x \in A)\,P(x)) \wedge ((\exists x \in B)\,Q(x))$ equivale a $(\exists x \in A \cup B)\,(P(x) \vee Q(x))$?

### 3.6.10 Quantificadores múltiplos

Se uma proposição aberta menciona mais de uma variável, é preciso mais de um quantificador — um para cada variável distinta — para transformá-la numa proposição fechada. Por exemplo, se escolhermos $\mathbb{Z}$ como o domínio, há oito maneiras de transformar a afirmação aberta "$x + y = 2x$" em uma proposição fechada:

$$\begin{array}{ll} (\forall x \in \mathbb{Z})(\forall y \in \mathbb{Z})\; x + y = 2x & (\forall y \in \mathbb{Z})(\forall x \in \mathbb{Z})\; x + y = 2x \\ (\forall x \in \mathbb{Z})(\exists y \in \mathbb{Z})\; x + y = 2x & (\exists y \in \mathbb{Z})(\forall x \in \mathbb{Z})\; x + y = 2x \\ (\exists x \in \mathbb{Z})(\forall y \in \mathbb{Z})\; x + y = 2x & (\forall y \in \mathbb{Z})(\exists x \in \mathbb{Z})\; x + y = 2x \\ (\exists x \in \mathbb{Z})(\exists y \in \mathbb{Z})\; x + y = 2x & (\exists y \in \mathbb{Z})(\exists y \in \mathbb{Z})\; x + y = 2x \end{array}$$

A ordem dos quantificadores pode ser muito importante. Por exemplo, a fórmula $(\forall x \in \mathbb{Z})(\exists y \in \mathbb{Z})\; x + y = 2x$ significa "para todo inteiro $x$, existe um inteiro $y$ (que pode ser diferente para cada $x$!) tal que $x + y = 2x$". Esta afirmação é verdadeira, pois, para cada $x$, basta tomar $y = x$ para satisfazer a condição. Por outro lado, a fórmula $(\exists y \in \mathbb{Z})(\forall x \in \mathbb{Z})\; x + y = 2x$ significa "existe um inteiro $y$ tal que, para todo inteiro $x$ (e esse mesmo $y$!), $x + y = 2x$". Esta frase é falsa, pois, como $x + y = 2x$ é o mesmo que $y = x$, ela equivale a dizer que "existe um inteiro $y$ que é igual a todos os inteiros".

De modo geral, sempre podemos trocar a ordem de dois quantificadores do mesmo tipo (ambos $\forall$, ou ambos $\exists$). Ou seja, para quaiquer variáveis, domínios e predicados,

- A fórmula $(\forall x \in D)(\forall y \in E)\, P(x,y)$ é logicamente equivalente a $(\forall y \in E)(\forall x \in D)\, P(x,y)$
- A fórmula $(\exists x \in D)(\exists y \in E)\, P(x,y)$ é logicamente equivalente a $(\exists y \in E)(\exists x \in D)\, P(x,y)$

Quando um quantificador sobre uma variável é aplicado a uma proposição aberta que depende dessa variável, dizemos que cada ocorrência dessa variável na proposição está *amarrada* ao quantificador. Todas as demais variáveis que ocorrem na proposição continuam *livres*. Por exemplo, na fórmula $(\forall x \in \mathbb{R})\, x^2 + x - y > z/(x+y)$, as três ocorrências de $x$ em $x^2 + x - y > z/(x+y)$ estão amarradas, enquanto que as duas ocorrências de $y$ e a ocorrência de $z$ estão livres.

Enquanto houver variáveis livres, a fórmula continua sendo uma proposição aberta. A fórmula só é uma proposição fechada quando todas as variáveis estiverem amarradas.

Por influência da linguagem natural, alguns autores às vezes escrevem o símbolo quantificador (especialmente '$\forall$') *depois* da fórmula lógica quantificada, como por exemplo em "$P(x)$, $\forall x \in D$." Entretanto, este estilo deve ser evitado, pois pode gerar ambiguidade — especialmente quando há vários quantificadores envolvidos. Considere, por exemplo "$(\exists x \in \mathbb{Z})\, x + y = 0$, $\forall y \in \mathbb{Z}$."

**Exercício 3.46:** Sejam $\mathbb{N}$ o conjunto dos números naturais, $P(x,y)$ é "$x + 2 > y$". Escreva as proposições listadas abaixo em linguagem natural (português) e atribua o valor-verdade correspondente a cada uma delas:

a) $(\forall x \in \mathbb{N})(\exists y \in \mathbb{N})\, P(x,y)$.

b) $(\forall x \in \mathbb{N})(\forall y \in \mathbb{N})\, P(x,y)$.

c) $(\forall y \in \mathbb{N})(\exists x \in \mathbb{N})\, P(x,y)$.

**Exercício 3.47:** Determine o valor verdade de cada uma das proposições:

a) $(\forall n \in \mathbb{N})(\exists m \in \mathbb{N})\, (n^2 < m)$.

b) $(\exists n \in \mathbb{N})(\forall m \in \mathbb{N})\, (n < m^2)$.

c) $(\exists n \in \mathbb{N})(\forall m \in \mathbb{N})\, (nm = m)$.

d) $(\forall n \in \mathbb{N})(\exists m \in \mathbb{N})\, (n + m = 0)$.

e) $(\exists n \in \mathbb{N})(\forall m \in \mathbb{N})\, (n \cdot m = m)$.

f) $(\exists n \in \mathbb{N})(\exists m \in \mathbb{N})\, (n^2 + m^2 = 5)$.

g) $(\exists n \in \mathbb{N})(\exists m \in \mathbb{N})\, (n^2 + m^2 = 25)$.

h) $(\exists n \in \mathbb{N})(\exists m \in \mathbb{N})\, (n + m = 4 \wedge n - m = 1)$.

i) $(\exists n \in \mathbb{N})(\exists m \in \mathbb{N})\, (n + m = 4 \wedge n - m = 2)$.

j) $(\forall n \in \mathbb{N})(\forall m \in \mathbb{N})(\exists p \in \mathbb{N})\, (p = (n+m)/2)$.

k) $(\forall x \in \mathbb{R})(\exists y \in \mathbb{R})\, (x^2 = y)$.

l) $(\forall x \in \mathbb{R})(\exists y \in \mathbb{R})\, (x = y^2)$.

m) $(\exists x \in \mathbb{R})(\forall y \in \mathbb{R})\, (x \cdot y = 0)$.

n) $(\exists x \in \mathbb{R})(\exists y \in \mathbb{R})\, (x + y \neq y + x)$.

o) $(\forall x \in \mathbb{R})\, x \neq 0 \to (\exists y \in \mathbb{R})\, (x \cdot y = 1)$.

p) $(\exists x \in \mathbb{R})(\forall y \in \mathbb{R})\, (y \neq 0 \to (x \cdot y = 1))$.

q) $(\forall x \in \mathbb{R})(\exists y \in \mathbb{R})\, (x + y = 1)$.

r) $(\exists x \in \mathbb{R})(\exists y \in \mathbb{R})\, (x + 2y = 2 \wedge 2x + 4y = 5)$.

s) $(\forall x \in \mathbb{R})(\exists y \in \mathbb{R})\, (x + y = 2 \wedge 2x - y = 1)$.

t) $(\forall x \in \mathbb{R})(\forall y \in \mathbb{R})(\exists z \in \mathbb{R})\, (z = (x + y)/2)$.

**Exercício 3.48:** Encontre a negação e o valor-verdade de cada uma das proposições do exercício 3.47.

### 3.6.11 Escopo de um quantificador

A parte da fórmula onde um quantificador tem efeito é chamada de *escopo* do quantificador. Por convenção, o escopo é toda a parte da fórmula que segue ao quantificador; mas podemos usar parênteses para limitar esse escopo. Por exemplo, na fórmula $((\forall x \in D)\, P(x)) \wedge ((\exists x \in E)\, Q(x)) \vee R(x)$, o escopo do primeiro quantificador é apenas $P(x)$, o do segundo quantificador é $Q(x)$, e a fórmula $R(x)$ está fora do escopo de ambos — ou seja, a ocorrência de $x$ em $R(x)$ ainda está livre.

### 3.6.12 Omissão do domínio

O domínio da quantificação pode ser omitido em dois casos. Em primeiro lugar, se, em algum contexto, todos os quantificadores tiverem o mesmo domínio $D$, podemos anunciar esse fato no início, e escrever apenas $(\forall x)\, P(x)$ ou $(\exists x)\, P(x)$, em vez de $(\forall x \in D)\, P(x)$ ou $(\exists x \in D)\, P(x)$.

**Exercício 3.49:** Escreva, em português, as seguintes proposições, supondo que $R(x)$ significa "$x$ é um rato," $Q(x)$ significa "$x$ come queijo," e o domínio consiste de todos os animais.

a) $(\forall x)\, R(x) \to Q(x)$.

b) $(\forall x)\, R(x) \wedge Q(x)$.

a) $(\exists x)\, R(x) \to Q(x)$.

b) $(\exists x)\, R(x) \wedge Q(x)$.

Para evitar a quantificação sobre domínios, alguns autores supõem que existe um *conjunto universal* $U$ cujos elementos são todos os elementos de todos os conjuntos que podem vir a ser usados em quantificadores. Nesse caso, podemos usar as equivalências lógicas da seção 3.6.9 para trocar qualquer domínio $D$ pelo domínio universal $U$:

- $(\forall x \in D)\, P(x)$ equivale a $(\forall x \in U)\, (x \in D) \to P(x)$.
- $(\exists x \in D)\, P(x)$ equivale a $(\exists x \in U)\, (x \in D) \wedge P(x)$.

Com estas transformações, todos os quantificadores passam a ter o mesmo domínio $U$, que pode ser então omitido. Isto é,

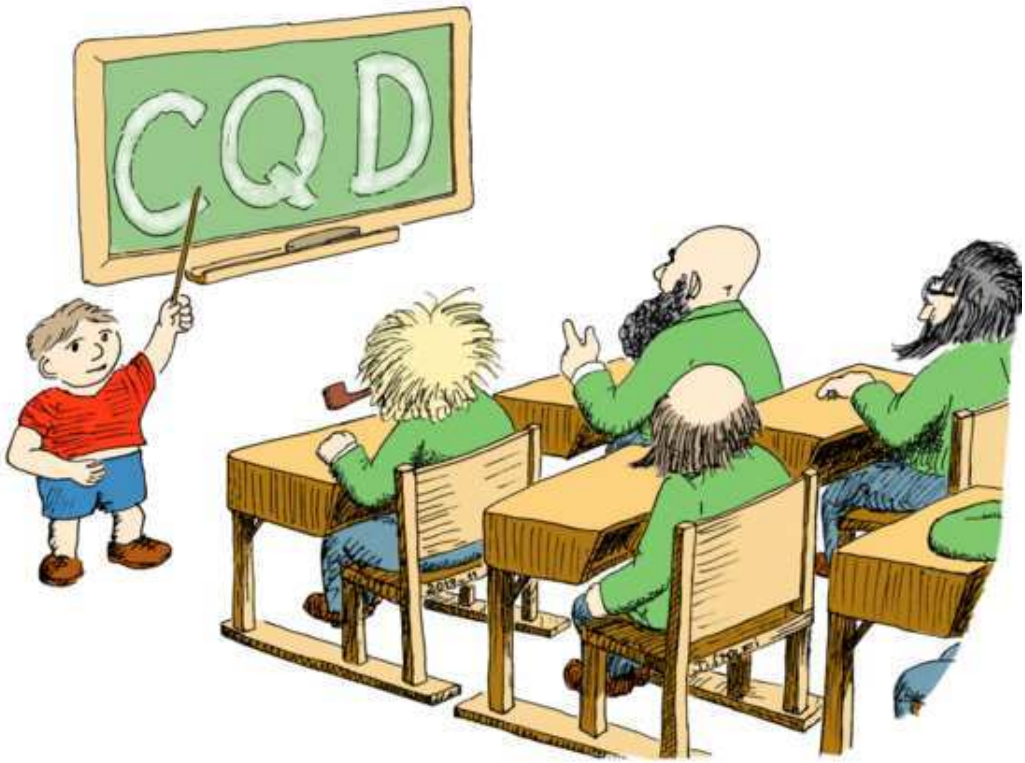
- em vez de $(\forall x \in D)\, P(x)$, pode-se escrever $(\forall x)\, (x \in D) \to P(x)$.

- em vez de $(\exists x \in D)\, P(x)$, pode-se escrever $(\exists x)\, (x \in D) \wedge P(x)$.

Entretanto, uma vez que conjuntos podem ser elementos de outros conjuntos, todos os conjuntos — inclusive o próprio conjunto universal $U$ — deveriam ser elementos de $U$. Mas permitir que um conjunto seja elemento de si mesmo pode levar a fórmulas que não fazem sentido (não são nem verdadeiras nem falsas), como "seja $X$ o conjunto de todos os elementos que não pertencem a $X$." Por essa razão, muitos lógicos evitam o conceito de "conjunto universal", e usam domínios explícitos em todos os quantificadores.

# Capítulo 4

# Métodos de Demonstração




## 4.1 Introdução

Como vimos no capítulo 1, demonstrações são instrumentos usados por uma pessoa para convencer outras pessoas (ou a si mesma) de que uma afirmação é verdadeira. Toda demonstração precisa partir de algumas definições e/ou afirmações básicas — chamadas *axiomas* ou *postulados* — que ambas as partes aceitam como verdadeiras, e/ou afirmações que foram previamente demonstradas.

Para ser convincente, uma demonstração somente pode usar afirmações e regras de raciocínio que as duas partes consideram válidas. Em geral, podem ser usadas as equivalências e implicações lógicas vistas nos capítulos anteriores. Podem também ser usadas as regras de manipulação de

fórmulas da álgebra e da teoria de conjuntos.

Uma afirmação devidamente demonstrada é chamada de *teorema* (palavra derivada de uma expressão grega que significa "verdade dos Deuses"). Um teorema que é demonstrado apenas para ajudar na prova de um outro teorema é chamado de *lema*. Um *corolário* de um teorema é outro teorema que é consequência do primeiro, e cuja demonstração é relativamente simples.

### 4.1.1 Definições

Uma demonstração também pode usar *definições* que tenham sido feitas previamente. Uma definição precisa ser *completa*, isto é, deve especificar todas as propriedades que identificam exatamente o conceito definido. Deve ser também *precisa*, de modo que o leitor não tenha dúvidas sobre seu significado. Por convenção, o termo definido é enfatizado por ocasião de sua definição. Por exemplo:

> **Definição 4.1:** Um inteiro $n$ é um *múltiplo* de um inteiro $p$ se, e somente se, existe um inteiro $q$ tal que $n = pq$.

Observe que esta definição não deixa dúvidas: para quaisquer inteiros $n$ e $p$, ela permite ao leitor decidir se $n$ é ou não múltiplo de $p$. Por outro lado, ela só vale no domínio dos inteiros. O número $\pi$ é um múltiplo de $\sqrt{17}$? Esta definição não diz nem que sim, nem que não. Enquanto o conceito de "múltiplo" não for definido para números reais, essa frase não tem sentido: ela não é nem verdadeira nem falsa, e portanto não é uma proposição lógica.

Observe também que, na afirmação que define o conceito, as variáveis $n$ e $p$ são livres, enquanto que $q$ está amarrada no quantificador "existe". Formalmente, podemos entender esta declaração como a definição de um predicado $P$ ("é multiplo de") com dois parâmetros ($n$ e $p$).

Esta definição pode ser usada em demonstrações como se fosse um axioma, ou seja ela nos autoriza a supor que a afirmação

$$(\forall n, p \in \mathbb{Z})\ (n \text{ é um múltiplo de } p) \leftrightarrow ((\exists q \in \mathbb{Z})\ n = pq)$$

é verdadeira.

Uma vez que um conceito foi definido, ele pode ser usado em outras definições:

> **Definição 4.2:** Um inteiro $p$ *divide* um inteiro $n$ (é um *divisor* de $n$) se, e somente se, $n$ é múltiplo de $p$.

Observe o uso do conectivo lógico "se e somente se" ($\leftrightarrow$) nestas definições. Este conectivo permite ao leitor decidir se uma entidade qualquer do domínio se enquadra *ou não* na definição. Portanto toda definição é se e somente se.

Entretanto, em textos matemáticos e técnicos é comum encontrar definições que usam apenas a palavra "se" quando o autor na verdade quer dizer "se e somente se." Por exemplo:

> **Definição 4.3:** Um inteiro $n$ é *par* se ele é múltiplo de 2.

Esta definição deve ser entendida como "um inteiro $n$ é par se, e somente se, $n$ é múltiplo de 2". Eis outro exemplo:

> **Definição 4.4:** Se um inteiro não é par, dizemos que ele é *ímpar*.

Há outros formatos de definição que não usam nem "se" nem "se e somente se". Por exemplo:

> **Definição 4.5:** Um *número primo* é um número inteiro maior que 1, que não tem nenhum divisor exceto 1 e ele mesmo.

### 4.1.2 Conjecturas

Uma *conjetura* (ou *conjectura*) é uma afirmação para a qual ainda não existe prova. Em geral, este termo é usado quando se suspeita que a afirmação seja verdadeira. Se uma conjetura é finalmente demonstrada, ela se torna um teorema. Por outro lado, se for encontrada uma demonstração da negação da conjetura, dizemos que a mesma foi *refutada*. Enquanto nenhuma das duas coisas ocorre, diz-se que a conjetura continua *aberta*.

Um exemplo famoso é a *conjetura de Fermat*: "se $n > 2$, a equação $x^n + y^n = z^n$ não tem soluções inteiras positivas." Esta conjetura foi encontrada em um livro que pertenceu ao matemático Pierre de Fermat (1601–1665), que escreveu na margem "tenho uma linda demonstração, mas ela não cabe nesta margem." Apesar de inúmeros esforços por matemáticos de todo o mundo, a afirmação permaneceu como conjetura por mais de 300 anos. Em 1995, finalmente, o matemático inglês Andrew Wiles publicou uma demonstração com mais de 200 páginas. Hoje a conjetura é conhecida como *o último teorema de Fermat*.

Outro exemplo famoso é a *conjetura das quatro cores*: "todo mapa pode ser pintado com no máximo quatro cores, de modo que países vizinhos tenham cores diferentes." Esta conjetura foi enunciada em 1852 por Francis Guthrie (1831–1899), mas somente foi provada em 1976 por Kenneth Appel e Wolfgang Haken, utilizando um computador. Em 1994 foi produzida uma prova simplificada por Paul Seymour, Neil Robertson, Daniel Sanders e Robin Thomas, mas continua sendo impossível demonstrar o teorema sem recorrer a um computador.

Há várias conjeturas famosas que ainda estão abertas. A *conjetura de Goldbach*, formulada pelo matemático alemão Christian Goldbach em 1742, afirma que *todo número inteiro par maior que 2 é a soma de dois números primos.* Testes com computadores mostram que esta afirmação é verdadeira para todos os inteiros pares entre 4 e $4 \times 10^{14}$ (400 trilhões); mas obviamente estes testes não constituem uma prova.

O monge e matemático francês Marin Mersenne (1585–1648) investigou os números $M_n = 2^n - 1$, onde $n$ é um número primo. Estes números, hoje, são chamados *números de Mersenne*. Ele observou que os números $M_2 = 3$, $M_3 = 7$, $M_5 = 31$, e $M_7 = 127$ são primos; mas o número seguinte, $M_{11} = 2047$, não é primo ($2047 = 23 \times 89$). Depois de verificar mais alguns casos, ele conjecturou que $M_n$ é primo para todo $n$ em $\{2, 3, 5, 7, 13, 17, 19, 31, 67, 127, 257\}$. Porém, em 1876 Edouard Lucas (1842–1891) provou que $M_{67} = 2^{67} - 1$ não era primo, e portanto a conjetura de Mersenne era falsa. Entretanto, sua prova não exibia os fatores de $M_{67}$, apenas provava que eles existiam. Em 1903, Frank Nelson Cole (1861–1926) apresentou uma palesta em uma conferência de matemática, com o título vago *On the Factorisation of Large Numbers*. Sem dizer nada, Cole primeiro escreveu $2^{67} - 1$ no quadro negro, e fez os cálculos à mão, obtendo o valor $147573952589676412927$. Na outra metade do quadro, ele escreveu o produto $193707721 \times 761838257287$, e fez a multiplicação à mão, obtendo o mesmo resultado. A platéia aplaudiu em pé. Depois ele contou que tinha levado três anos, trabalhando todos os domingos, para encontrar essa fatoração.

### 4.1.3 Métodos de demonstração

Existem teoremas que tem muitas demonstrações diferentes. Qual é a melhor é, até certo ponto, uma questão de gosto, e depende para quem a demonstração é dirigida. Em geral, quanto mais curta a prova, melhor; mas há outros critérios, como a facilidade de compreensão, a simplicidade dos

passos, etc.. De modo geral, quando não sabemos se uma afirmação é verdadeira, nossa primeira preocupação é encontrar uma demonstração que nos convença. Para convencer outras pessoas, entretanto, devemos cuidar para que a demonstração seja, além de correta, também simples, clara e objetiva, tanto quanto possível.

Há vários *métodos de demonstração* (*estilos*, *estratégias*, *esquemas*, etc.) que são frequentemente usados em matemática. Em geral, a mesma demonstração pode ser reformulada e rearranjada de modo a se enquadrar em vários esquemas distintos. Dependendo do caso, algumas dessas versões podem ser mais fáceis de encontrar, escrever e entender do que outras. No restante deste capítulo vamos descrever algumas técnicas frequentemente utilizadas em provas.

## 4.2 Demonstração de implicações

No decorrer de muitas demonstrações, temos que provar implicaçoes da forma $p \to q$, isto é *se* $p$ é verdadeira, *então* $q$ também é. A afirmação $p$ é chamada de *hipótese*, *premissa* ou *condição*, e a afirmação $q$ é chamada de *tese* ou *conclusão*.

### 4.2.1 Método direto

No *método direto* de demonstração, supomos que a hipótese $p$ é verdadeira, e usamos uma sequência de proposições que são consequências lógicas das anteriores, até obter a tese $q$. Esta sequência de passos prova a implicação $p \to q$. Por exemplo, digamos que é preciso provar a afirmação

**Teorema 4.1:** Se $m$ e $n$ são inteiros pares, então $m + n$ é par.

Podemos escrever a seguinte demonstração:

**Prova:**

1. Suponha que $m$ é par. (Hipótese.)
2. Suponha que $n$ é par. (Hipótese.)
3. Existe um inteiro $r$ tal que $m = 2r$. (Definição de "par").
4. Existe um inteiro $s$ tal que $n = 2s$. (Definição de "par").
5. $m + n = 2r + 2s = 2(r + s)$. (De 3 e 4, por álgebra.)
6. Seja $t = r + s$. (Introdução de variável.)
7. Existe um inteiro $t$ tal que $m + n = 2t$. (De 6.)
8. $m + n$ é par. (Definição de "par", dada 6. Tese.)

**Fim.**

Supõe-se que cada um dos passos acima é um raciocínio simples o bastante para ser aceito como válido pelo leitor. Estritamente falando, cada passo deveria ser uma aplicação de uma *regra de inferência*, tirada de uma lista fixa de regras que todos os matemáticos aceitam como válidas e fundamentais. Uma das regras comumente aceitas, por exemplo, é a regra de *modus ponens*: se já demonstramos que uma proposição $p$ é verdade, e que $p \to q$, então podemos considerar a proposição

$q$ demonstrada. Mais geralmente, qualquer das implicações lógicas vistas na seção 3.3.4 pode ser um passo de uma demonstração. Outras regras são necessárias para lidar com quantificadores, como nos passos 5–7 da prova acima (veja seções 4.4–4.5).

Na prática, os passos são escritos de maneira muito abreviada, na suposição de que o leitor consegue perceber as regras de inferência usadas nas entrelinhas, e explicitá-las se for preciso. Por exemplo, a demonstração acima normalmente seria escrita da seguinte maneira:

**Prova:**

Suponha que $m$ e $n$ são inteiros pares. Por definição de número "par", existem inteiros $r$ e $s$ tais que $m = 2r$ e $n = 2s$. Logo $m + n = 2r + 2s = 2(r + s)$. Como $r + s$ é inteiro, concluímos que o inteiro $m + n$ é par, pela definição. Isto prova que, se $m$ e $n$ são pares, $m + n$ é par.

**Fim.**

**Exercício 4.1:** Demonstre que o produto de um inteiro par por um inteiro ímpar é par.

**Exercício 4.2:** Demonstre que se $r$ é um número racional diferente de zero, então $\frac{1}{r}$ é racional.

**Exercício 4.3:** Demonstre que, para quaisquer conjuntos $A$, $B$, $C$ e $D$, as seguintes afirmações são sempre verdadeiras

- Se $x \in A$, $(A \setminus B) \subseteq (C \cap D)$ e $x \notin D$, então $x \in B$.
- Se $B$ e $C$ são disjuntos, $A \subseteq C$ e $x \in A$, então $x \notin B$.
- Se $x \in C$ e $(A \cap C) \subseteq B$, então $x \notin (A \setminus B)$.

**Exercício 4.4:** Sejam $X_1$, $X_2$, $Y_1$, $Y_2$ subconjuntos de um conjunto $U$. Suponha que $X_1 \cup X_2 = U$ e $Y_1 \cap Y_2 =$, que $X_1 \subset Y_1$ e que $X_2 \subset Y_2$. Prove que $X_1 = Y_1$ e $X_2 = Y_2$.

### 4.2.2 Método da contrapositiva

No *método da contrapositiva*, para provar a afirmação $p \to q$, supomos que a negação da tese $\neg q$ é verdadeira, e procuramos uma sequência de deduções lógicas que termina com a negação da hipótese $\neg p$. Esta sequência de passos prova que $(\neg q) \to (\neg p)$. Como vimos na seção 3.3.2, esta afirmação é logicamente equivalente a $p \to q$, que portanto também está provada.

Por exemplo, digamos que é necessário provar a afirmação:

**Teorema 4.2:** Se $n^2$ é um inteiro par, então $n$ é par.

**Prova:**

Suponha que $n$ é ímpar. Pela definição de "ímpar", existe um inteiro $k$ tal que $n = 2k + 1$. Portanto $n^2 = (2k + 1)^2 = 4k^2 + 4k + 1 = 2(2k^2 + 2k) + 1$. Como $2k^2 + 2k$ é um inteiro, pela definição de "ímpar" concluímos que $n^2$ é impar.

Pela regra da contrapositiva, isto prova que, se $n^2$ é um inteiro par, então $n$ é um inteiro par.

**Fim.**

**Exercício 4.5:** Demonstre que, para todo inteiro $n$, se $n^3 + 5$ é impar, então $n$ é par.

**Exercício 4.6:** Seja $n$ um número inteiro da forma $4k + 3$, $k \geq 0$. Demonstre que não existem inteiros $x, y$ tais que $x^2 + y^2 = n$.

### 4.2.3 Método de redução ao absurdo

O *método de redução ao absurdo* (também chamado de *prova indireta* ou *por contradição*), baseia-se na equivalência lógica entre a fórmula $(p \rightarrow q)$ e a fórmula $(p \wedge \neg q) \rightarrow \mathbf{F}$, vista na seção 3.3.2. Neste método, para provar a afirmação $p \rightarrow q$, supomos que tanto a hipótese $p$ quanto a negação da tese $\neg q$ são verdadeiras, e procuramos uma sequência de deduções lógicas que termina com uma contradição (uma afirmação com valor lógico **F**). Isto prova a afirmação $(p \wedge \neg q) \rightarrow \mathbf{F}$, e portanto também a afirmação equivalente a $p \rightarrow q$.

Por este método, a afirmação

**Teorema 4.3:** Se $m$ e $n$ são inteiros pares, então $m + n$ é um inteiro par

pode ser provada desta maneira:

**Prova:**

Suponhamos que $m$ e $n$ são inteiros pares e $m + n$ é um inteiro ímpar; vamos mostrar que estas suposições levam a uma contradição.

Pela definição de "par", existem $r$ e $s$ inteiros tais que $m = 2r$ e $n = 2s$. Pela definição de "ímpar", existe um inteiro $j$ tal que $m + n = 2j + 1$. Logo $2r + 2s = 2j + 1$, ou seja, $r + s - j = 1/2$. Isto é falso pois $r + s - j$ é um inteiro.

Esta contradição prova que, se $m$ e $n$ são inteiros pares, $m + n$ é um inteiro par.

**Fim.**

**Exercício 4.7:** Seja $n$ um número inteiro da forma $4k + 3$, $k \geq 0$. Escreva uma demonstração detalhada de não existem inteiros $x, y$ tais que $x^2 + y^2 = n$.

**Exercício 4.8:** Demonstre que a soma de um número racional com um número irracional é um número irracional.

**Exercício 4.9:** Demonstre que o número $\sqrt{2}$ é irracional.

**Exercício 4.10:** Sejam $x, y, z$ números reais. Demonstre que pelo menos um deles é maior ou igual à média aritmética dos três.

**Exercício 4.11:** Demonstre que, se $p$ é um inteiro ímpar, então a equação $x^2 + x - p = 0$ não tem solução inteira.

**Exercício 4.12:** Demonstre que, se $r$ é um número irracional, então $\frac{1}{r}$ é irracional.

### 4.2.4 Implicação com tese conjuntiva

Para provar uma conjunção de duas afirmações $p \wedge q$, basta provar cada uma das afirmações separadamente.

Em particular, para provar uma implicação da forma $p \rightarrow (q \wedge r)$, podemos observar que ela equivale logicamente à afirmação "$(p \rightarrow q) \wedge (p \rightarrow r)$". Portanto, basta provar cada uma destas duas implicações separadamente. Se usarmos o método direto para provar cada implicação, supomos que $p$ é verdadeira; provamos então $q$; e provamos em seguida $r$.

Por exemplo, considere o teorema abaixo:

**Teorema 4.4:** Se 6 divide um inteiro $n$, então 2 divide $n$ e 3 divide $n$.

**Prova:**

Se 6 divide $n$ então existe um inteiro $k$ tal que $n = 6k$. Então, $n = 2(3k)$, logo 2 divide $n$. Temos também que $n = 3(2k)$, logo 3 divide $n$. Portanto 2 divide $n$ e 3 divide $n$.

**Fim.**

Depois de provar a parte $p \rightarrow q$, podemos supor que $q$ também é verdadeira, o que pode facilitar a prova de $r$. Ou seja, para provar $p \rightarrow (q \wedge r)$, podemos provar "$p \rightarrow q$" e em seguida "$(p \wedge q) \rightarrow r$".

Essa análise pode ser estendida para tese com três ou mais termos, isto é, $p \rightarrow (q_1 \wedge q_2 \wedge q_3 \cdots \wedge q_n)$ é equivalente a $(p \rightarrow q_1) \wedge (p \rightarrow q_2) \wedge \cdots \wedge (p \rightarrow q_n)$.

### 4.2.5 Implicação com hipótese disjuntiva

Suponha que é necessário provar uma implicação da forma $(p \vee q) \rightarrow r$, onde a hipótese é uma disjunção de duas afirmações. Pode-se verificar que esta implicação equivale a $(p \rightarrow r) \wedge (q \rightarrow r)$. (Note a troca de '$\vee$' por '$\wedge$'.) Portanto, basta provar cada uma destas duas implicações separadamente.

Assim como na seção 4.2.4 podemos estender essa técnica para hipóteses com três ou mais termos. Observamos que $(p_1 \vee p_2 \vee \cdots \vee p_n) \rightarrow q$ equivale a $(p_1 \rightarrow q) \wedge (p_2 \rightarrow q) \wedge \cdots \wedge (p_n \rightarrow q)$ e se cada uma das implicações for provada pelo método direto, a demonstração consistirá de uma lista de casos:

- Caso 1: Supomos que $p_1$ vale. Provamos $q$.
- Caso 2: Supomos que $p_2$ vale. provamos $q$.
- ...
- Caso $n$: Supomos que $p_n$ vale. Provamos $q$.

Note que os casos não precisam ser mutuamente exclusivos. Por exemplo:

**Teorema 4.5:** Para quaiquer inteiros $m$ e $n$, se $m$ for par ou $n$ for par, então $mn$ é par.

**Prova:**

Sejam $m$ e $n$ inteiros quaisquer. Temos dois casos (não exclusivos):

- Caso 1: $m$ é par. Pela definição, existe um inteiro $q$ tal que $m = 2q$. Nesse caso, $mn = (2q)n = 2(nq)$, e portanto $mn$ é par.
- Caso 2: $n$ é par. pela definição, existe um inteiro $r$ tal que $n = 2r$. Nesse caso $mn = m(2r) = 2(mr)$, e portanto $mn$ é par.

Portanto, se $m$ é par ou $n$ é par, $mn$ é par.

**Fim.**

Muitas vezes os casos não são óbvios no enunciado, e tem que ser intuidos. Por exemplo, considere este teorema:

**Teorema 4.6:** Se o número inteiro $n$ não é divisível por 3, então seu quadrado tem resto 1 quando divisível por 3.

**Prova:**

Seja $n$ um inteiro não divisível por 3. Podemos escrever $n = 3p + r$, onde $p$ e $r$ são inteiros e $r$ é 1 ou 2. Então $n^2 = (3p + r)^2 = 9p^2 + 6pr + r^2$. Note que $9p^2 + 6pr$ é um múltiplo de 3, portanto $n^2$ $r^2$. Temos dois casos:

- Caso 1: $r = 1$, então $r^2 = 1$, cujo resto na divisão por 3 é 1.
- Caso 2: $r = 2$, então $r^2 = 4$, cujo resto na divisão por 3 é 1.

Portanto, o resto de $n^2$ é 1.

**Fim.**

**Exercício 4.13:** Demonstre que não existem soluções inteiras $x$ e $y$ para a equação $x^2 + 3y^2 = 8$.

**Exercício 4.14:** Demonstre que, se $x$ e $y$ são números reais, então $max(x, y) + min(x, y) = x + y$

**Exercício 4.15:** Demonstre que o quadrado de um número inteiro, não divisível por 5, tem resto 1 ou 4 quando dividido por 5.

**Exercício 4.16:** Demonstre que o algarismo das unidades do quadrado de qualquer inteiro $n$ é 0, 1, 4, 5, 6 ou 9.

**Exercício 4.17:** Demonstre que o algarismo das unidades da quarta potência de qualquer inteiro $n$ é 0, 1, 5 ou 6.

**Exercício 4.18:** Demonstre que, para todo inteiro $n$, se $n$ não é divisível nem por 2 nem por 3, então $n^2 - 1$ é divisível por 24.

## 4.3 Demonstrações de afirmações "se e somente se"

Outro tipo comum de teorema tem a forma $p \leftrightarrow q$, ou seja, "$p$ vale se e somente se $q$ vale."

Para demonstrar este tipo de teorema, podemos usar a equivalência lógica entre as afirmações $p \leftrightarrow q$ e $(p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p)$. Ou seja, dividimos a demonstração em duas partes: (1) prova que $p \rightarrow q$; (2) prova que $q \rightarrow p$. Por exemplo:

**Teorema 4.7:** Os inteiros $x$ e $y$ são ambos ímpares se, e somente se, o produto $xy$ é ímpar.

**Prova:**

Sejam $x$ e $y$ inteiros quaisquer.

- Parte (1): provaremos que, se $x$ e $y$ são ímpares, então $xy$ é ímpar. Se $x$ e $y$ são ímpares, por definição existem inteiros $r$ e $s$ tais que $x = 2r+1$ e $y = 2s+1$. Portanto $xy = (2r+1)(2s+1) = 2(rs+r+s)+1$. Como $rs+r+s$ é um inteiro, concluímos que $xy$ é ímpar.
- Parte (2): provaremos que, se $xy$ é ímpar, então $x$ e $y$ são ambos ímpares. Ou seja (pela contrapositiva), que se $x$ é par ou $y$ é par, então $xy$ é par. Temos dois casos (não exclusivos):
  - Caso (a): $x$ é par. Neste caso existe um inteiro $r$ tal que $x = 2r$. Portanto $xy = (2r)y = 2(ry)$. Como $ry$ é inteiro, concluímos que $xy$ é par.
  - Caso (b): $y$ é par. Então existe um inteiro $s$ tal que $y = 2s$. Portanto $xy = x(2s) = 2(xs)$. Como $xs$ é inteiro, concluímos que $xy$ é par.

**Fim.**

Observe que neste exemplo usamos o método da contrapositiva na segunda parte. Com essa escolha, que é bastante comum, a prova de $p \leftrightarrow q$ passa a ser (1) prova de que $p \rightarrow q$; (2) prova de que $(\neg p) \rightarrow (\neg q)$.

**Exercício 4.19:** Prove que um número inteiro positivo $n$ é ímpar se, e somente se, $5n+6$ é ímpar.

Este método pode ser generalizado para afirmações com três ou mais termos, como $(p_1 \leftrightarrow p_2) \wedge (p_2 \leftrightarrow p_3) \wedge \cdots \wedge (p_{n-1} \leftrightarrow p_n)$. Observe que esta afirmação significa que, no contexto corrente, todas as afirmações $p_1$, $p_2$, ..., $p_n$ são equivalentes. Esta afirmação é logicamente equivalente a $(p_1 \rightarrow p_2) \wedge (p_2 \rightarrow p_3) \wedge \cdots \wedge (p_{n-1} \rightarrow p_n) \wedge (p_n \rightarrow p_1)$. Por exemplo:

**Teorema 4.8:** Para todo inteiro $n$, as seguintes afirmações são equivalentes:

1. $n$ é um número par
2. $n-1$ é um número ímpar
3. $n^2$ é um número par.

**Prova:**

Parte (1): vamos provar que se $n$ é par então $n-1$ é ímpar. Como $n$ é par, por definição existe um inteiro $r$ tal que $n = 2r$. Logo, $n - 1 = 2r - 1 = 2(r-1) + 1$. Como $r - 1$ é inteiro, concluímos que $n - 1$ é ímpar.

Parte (2) vamos provar que, se $n - 1$ é ímpar, então $n^2$ é par. Como $n - 1$ é ímpar, existe um inteiro $s$ tal que $n - 1 = 2s + 1$. Logo $n = (2s + 1) + 1 = 2(s + 1)$, e $n^2 = (2(s + 1))^2 = 2(2(s + 1)^2)$. Como $2(s + 1)^2$ é inteiro, concluímos que $n^2$ é par. Portanto $n^2 = 4(k + 1)^2 = 2(2(k + 1)^2)$ é par.

Parte (3) vamos provar que, se $n^2$ é par, então $n$ é par. Esta afirmação é verdadeira pelo teorema 4.2.

**Fim.**

**Exercício 4.20:** Demonstre que as seguintes afirmações são equivalentes:

1. $(\exists x)\, P(x) \wedge (\forall y)\, (P(y) \rightarrow y = x)$.
2. $(\exists x)(\forall y)\, P(y) \leftrightarrow y = x$.
3. $(\exists x)\, P(x) \wedge (\forall y)(\forall z)\, ((P(y) \wedge P(z)) \rightarrow y = x)$

**Exercício 4.21:** Demonstre que, se $x$ e $y$ são números reais, as seguintes afirmações são equivalentes:

1. $x$ é menor que $y$.
2. A média aritmética de $x$ e $y$ é maior que $x$.
3. A média aritmética de $x$ e $y$ é menor que $y$.

Algumas vezes é possível demonstrar afirmações do tipo $p \leftrightarrow q$ sem dividir as duas implicações. Por exemplo, em alguns casos é possível obter $q$ a partir de $p$ (ou vice-versa) através de uma cadeia de equivalências lógicas. Essa cadeia então é uma prova de que $p \leftrightarrow q$.

**Teorema 4.9:** Sejam $A$ e $B$ conjuntos. Prove que $(A \subseteq \bar{B}) \leftrightarrow (A \cap B = \emptyset)$.

**Prova:**

$A \subseteq \bar{B}$ é equivalente a $(\forall x \in A)\, x \in \bar{B}$; que é equivalente a $(\forall x \in A)\, x \notin B$. Esta afirmação é equivalente a $(\forall x)(x \in A) \rightarrow (x \notin B)$, que é equivalente a $(\forall x), \neg((x \in A) \wedge (x \in B))$. Pela definição de intersecção, esta afirmação equivale a $A \cap B = \emptyset$.

**Fim.**

**Exercício 4.22:** Em cada item abaixo, encontre e prove uma condição necessária e suficiente sobre dois conjuntos $A$ e $B$ para que a fórmula seja verdadeira, qualquer que seja o conjunto $X$.

a) $A \cup (X \cap B) = (A \cup X) \cap B)$.

b) $A \setminus (X \setminus B) = (A \setminus X) \setminus B)$

## 4.4 Regras para quantificadores universais

### 4.4.1 Instanciação universal

No decorrer de uma prova, uma vez que tivermos estabelecido a veracidade de uma afirmação do tipo $(\forall x \in D)\, P(x)$, podemos afirmar $P(c)$ para qualquer elemento $c$ do domínio $D$. Por exemplo, se tivermos provado que "para todo inteiro $x$, $2^x > x^2$", podemos imediatamente concluir que $2^{418} > 418^2$. Esta regra é chamada de *instanciação universal*.

### 4.4.2 Generalização universal

Por outro lado, se o objetivo é provar uma afirmação do tipo $(\forall x \in D)\, P(x)$, podemos começar supondo que $x$ é um elemento de $D$ escolhido arbitrariamente, e omitir o quantificador no restante da prova. Se, com essa suposição, conseguirmos provar a afirmação $P(x)$, podemos concluir que o teorema original (com o quantificador) é verdadeiro. Este último passo é chamado de *generalização universal* ou *suspensão do quantificador universal*.

O mesmo método pode ser usado para vários quantificadores universais encaixados. Por exemplo:

**Teorema 4.10:** Para quaisquer números reais $x$ e $y$, $(x + y)^2 - (x - y)^2 = 4xy$.

**Prova:**

Sejam $x$ e $y$ dois números reais quaisquer.

Pelo teorema do binômio, temos $(x + y)^2 = x^2 + 2xy + y^2$, e $(x - y)^2 = x^2 - 2xy + y^2$. Portanto, $(x + y)^2 - (x - y)^2 = (x^2 + 2xy + y^2) - (x^2 - 2xy + y^2) = 4xy$.

**Fim.**

Ao usar este método, deve-se tomar cuidado para usar variáveis que não tenham significado já definido anteriormente.

**Exercício 4.23:** Prove a seguinte proposição:

$$(\forall x \in \mathbb{Z})(\forall y \in \mathbb{Z})(\forall k \in \mathbb{Z})\; x + y = 7k \leftrightarrow 4x - 3y = 7(4k - y)$$

### 4.4.3 Demonstração por vacuidade

Lembramos que, se $E$ é o conjunto vazio, a afirmação $(\forall x \in E)\, Q(x)$ é verdadeira, qualquer que seja o predicado $Q$. Como vimos na seção 3.6.4 esta afirmação é verdadeira *por vacuidade*.

**Exemplo 4.1:** Todos os pares primos maiores que dois são quadrados perfeitos.

Esta afirmação é verdadeira por vacuidade pois não existem primos pares maiores que dois.

Uma maneira de provar uma afirmação da forma $(\forall x \in D)\, P(x)$, para um domínio arbitrário $D$, é mostrar que ela é equivalente a outra afirmação $(\forall x \in E)\, Q(x)$, para um certo domínio $E$ e algum predicado $Q$; e então mostrar que $E$ é vazio.

Por exemplo, a afirmação $(\forall x \in D)\, A(x) \to B(x)$ equivale a $(\forall x \in E)\, B(x)$ onde $E = \{\, x \in D : A(x) \,\}$. Portanto, se mostrarmos que $A(x)$ é falsa para todo $x$ em $D$, a afirmação $(\forall x \in D)\, A(x) \to B(x)$ estará provada por vacuidade — qualquer que seja o predicado $B$.

**Exemplo 4.2:** Para todo número inteiro $x$, se $x^2 = 5$ então $x$ é par.

Esta afirmação pode ser escrita $(\forall x \in D)\, Q(x) \rightarrow P(x)$ onde $D = \mathbb{Z}$, $Q(x)$ significa "$x^2 = 5$", e $P(x)$ é "$x$ é par". Ela é equivalente a "Para todo número inteiro $x$ cujo quadrado é 5, $x$ é par", ou seja $(\forall x \in E)\, P(x)$ onde $E$ é o conjunto dos inteiros cujo quadrado é 5. Como $E$ é vazio, a afirmação é verdadeira por vacuidade.

## 4.5 Regras para quantificadores existenciais

### 4.5.1 Instanciação existencial

Uma vez que estabelecemos a veracidade de uma proposição do tipo $(\exists x \in D)\, P(x)$, podemos supor, dali em diante, que a variável $x$ é um dos elementos cuja existência é afirmada, e portanto que $P(x)$ é verdadeira. Desse ponto em diante, a variável $x$ passa a ser livre (veja seção 3.6.10). Esta regra é chamada de *instanciação existencial*.

Para evitar confusão, a variável $x$ deve ser distinta de todas as outras variáveis livres criadas em passos anteriores da demonstração. Se necessário, pode-se trocar a variável do quantificador.

### 4.5.2 Demonstrações construtivas

Por outro lado, em muitas demonstrações é necessário provar a existência de objetos com uma propriedade particular, ou seja, são da forma $(\exists x \in D)\, P(x)$. Uma maneira de chegar a essa conclusão é através de uma *demonstração construtiva*, em que se exibe um elemento específico $a$ do domínio $D$ (explicitamente, ou através de uma construção algoritmica) e prova-se que $P(a)$ é verdadeira, para esse elemento. Por exemplo:

**Teorema 4.11:** Existem três números inteiros positivos tais que $x^2 + y^2 = z^2$.

**Prova:**

Sejam $x = 3$, $y = 4$, e $z = 5$. Como $x^2 + y^2 = 3^2 + 4^2 = 25 = 5^2 = z^2$, a afirmação é verdadeira.

**Fim.**

(Três números $x, y, z$ que satisfazem o teorema 4.11 são chamados de *tripla de inteiros pitagóricos* ou *tripla pitagórica*. Essas triplas correspondem a triângulos retângulos cujos lados têm comprimentos inteiros.)

Naturalmente, este método pode ser usado como parte de uma demonstração mais longa. Por exemplo:

**Teorema 4.12:** Para todo número natural $n$, se $2^n - 1$ é primo, então $n$ é primo.

**Prova:**

Seja $n$ um número natural. Vamos provar a contrapositiva, ou seja, que se $n$ não é um número primo, então $2^n - 1$ não é primo. Se $n = 0$ ou $n = 1$, nenhum dos dois é primo,

e a afirmação é trivialmente verdadeira. Suponhamos então que $n$ é maior que 1 e não é primo. Por definição, existem inteiros $r$ e $s$ maiores que 1 e menores que $n$ tais que $n = rs$.

Vamos agora mostrar que existe um inteiro $x$ que é divisor próprio de $2^n - 1$. Seja $x = 2^s - 1$ e $y = 1 + 2^s + 2^{2s} + \cdots + 2^{(r-1)s}$. Então

$$\begin{aligned} xy &= (2^s - 1)(1 + 2^s + 2^{2s} + \cdots + 2^{(r-1)s}) \\ &= 2^s(1 + 2^s + 2^{2s} + \cdots + 2^{(r-1)s}) - (1 + 2^s + 2^{2s} + \cdots + 2^{(r-1)s}) \\ &= (2^s + 2^{2s} + \cdots + 2^{rs}) - (1 + 2^s + 2^{2s} + \cdots + 2^{(r-1)s}) \\ &= 2^{rs} - 1 \\ &= 2^n - 1. \end{aligned}$$

Uma vez que $s$ é maior que 1 e menor que $n$, temos que $x = 2^s - 1$ é maior que $2^1 - 1 = 1$ e menor que $2^n - 1$. Ou seja, $x$ é um divisor próprio de $2^n - 1$.

Concluímos portanto $2^n - 1$ não é primo.

**Fim.**

Observe na demonstração acima, que a existência do divisor próprio de $2^n - 1$ foi provada exibindo um $x$ e provando que ele tem essa propriedade. Esta regra de inferência é também chamada de *generalização existencial.*

Outro exemplo de demonstração construtiva é a seguinte afirmação, conhecida como *teorema do deserto de primos*:

**Teorema 4.13:** Para todo número inteiro positivo $n$, existe uma sequência de $n$ números inteiros consecutivos que não são primos.

**Prova:**

Seja $n$ um inteiro positivo, e seja $x = (n + 1)! + 2$. Observe que

$$\begin{aligned} 2 \text{ divide } x &= (n + 1)! + 2, && (4.1) \\ 3 \text{ divide } x + 1 &= (n + 1)! + 3, && (4.2) \\ &\ldots && (4.3) \\ n + 1 \text{ divide } x + (n - 1) &= (n + 1)! + n + 1. && (4.4) \end{aligned}$$

Logo todos os inteiros $x + i$ com $0 \leq i < n$ são não primos; e eles formam uma sequência de $n$ inteiros consecutivos.

**Fim.**

**Exercício 4.24:** Existem 100 inteiros consecutivos que não são quadrados perfeitos.

**Exercício 4.25:** Demonstre que existem dois inteiros positivos consecutivos, tal que um é um cubo perfeito e o outro é um quadrado perfeito.

### 4.5.3 Demonstrações não construtivas

Em alguns casos, é possível demonstrar a existência de um elemento que satisfaz uma dada condição mesmo sem exibir explicitamente tal elemento. Uma demonstração deste tipo é chamada de *demonstração não construtiva*. Por exemplo:

**Teorema 4.14:** Existem dois números reais irracionais $x$ e $y$ tais que $x^y$ é racional.

**Prova:**

Sabemos que número $\sqrt{2}$ é irracional. Se $(\sqrt{2})^{\sqrt{2}}$ for racional, a afirmação está satisfeita tomando-se $x = \sqrt{2}$ e $y = \sqrt{2}$. Por outro lado, se $(\sqrt{2})^{\sqrt{2}}$ for irracional, podemos tomar $x = (\sqrt{2})^{\sqrt{2}}$ e $y = \sqrt{2}$. Então $x^y = ((\sqrt{2})^{\sqrt{2}})^{\sqrt{2}} = (\sqrt{2})^{\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}} = (\sqrt{2})^2 = 2$ que é racional.

**Fim.**

Observe que esta demonstração prova que existem valores de $x$ e $y$ que satisfazem a condição, mas deixa em suspenso o valor de $x$ ($\sqrt{2}$ ou $(\sqrt{2})^{\sqrt{2}}$). Para tornar esta demonstração construtiva, teríamos que determinar se $(\sqrt{2})^{\sqrt{2}}$ é racional ou não; mas este é um problema muito difícil.

Outro exemplo clássico de demonstração não construtiva de existência é o seguinte teorema, atribuído a Euclides (360 AC – 295 AC).

**Teorema 4.15:** Existem infinitos números primos.

**Prova:**

Vamos usar o método da demonstração por absurdo. Suponhamos que existem finitos números primos, a saber $2, 3, 5, \ldots, p$. Seja $n$ o inteiro $(2 \times 3 \times 5 \times \cdots \times p) + 1$. Como $n$ é maior que 1, ele tem algum fator primo $r$. Observe que $n$ não é divisível por $2, 3, 5, \ldots, p$, pois tem resto 1 quando dividido por qualquer desses números. Portanto, $r$, que é divisor de $n$, não pode ser nenhum dos primos listados acima. Isso contradiz a suposição de que essa lista contém todos os primos.

**Fim.**

### 4.5.4 Demonstração de existência e unicidade

Lembramos que uma afirmação do tipo $(\exists! x \in D)\, P(x)$ equivale logicamente a

$$((\exists x \in D)\, P(x)) \wedge ((\forall x \in D)(\forall y \in D)\, ((P(x) \wedge P(y)) \rightarrow x = y))$$

Portanto, uma demonstração de existência e unicidade pode ser dividida em duas partes:

- *Existência:* prova-se (construtivamente ou não) que existe pelo menos um $x$ em $D$ que satisfaz $P(x)$.
- *Unicidade:* supõe-se que $y$ também é um elemento de $D$ que satisfaz $P(y)$, e prova-se que ele é igual ao $x$ cuja existência foi mostrada na primeira parte.

**Teorema 4.16:** Para todo número complexo $z$ diferente de zero, existe um único número complexo $x$ tal que $zx = 1$.

**Prova:**

Seja $z$ um número complexo qualquer, diferente de zero. Por definição, existem $a$ e $b$ em $\mathbb{R}$ tais que $z = a + b\mathbf{i}$, onde $\mathbf{i}$ é um elemento de $\mathbb{C}$ tal que $\mathbf{i}^2 = -1$.

Vamos primeiro mostrar que existe pelo menos um $x$ em $\mathbb{C}$ tal que $zx = 1$. Como $z$ é diferente de zero, pelo menos um dos números $a$ e $b$ é diferente de zero. Isso implica que $a^2 + b^2$ é positivo. Seja então $x = (a - b\mathbf{i})/(a^2 + b^2)$. Temos que

$$\begin{aligned} zx &= (a + b\mathbf{i})((a - b\mathbf{i})/(a^2 + b^2)) \\ &= (a^2 - ab\mathbf{i} + ab\mathbf{i} - b^2\mathbf{i}^2)/(a^2 + b^2) \\ &= (a^2 + b^2)/(a^2 + b^2) \\ &= 1. \end{aligned}$$

Suponha agora que $y$ é um número complexo qualquer tal que $zy = 1$; vamos mostrar que ele é igual a $x$. Multiplicando os dois lados da equação $zy = 1$ por $x$ temos $(zy)x = x$. Como a multiplicação de números complexos é associativa e comutativa, esta afirmação equivale a $(zx)y = x$. Como $zx = 1$, concluímos que $y = x$.

**Fim.**

**Exercício 4.26:** Demonstre que, se $m$ e $n$ são inteiros distintos e $m - n$ é par, então existe um único inteiro $r$ tal que $|m - r| = |n - r|$

**Exercício 4.27:** Demonstre que, se $r$ é um número irracional, então existe um único inteiro $n$ tal que a distância entre $r$ e $n$ é menor do que $1/2$.

**Exercício 4.28:** Prove que para qualquer matriz A $2\times2$ de números reais com determinante $|a|$ não nulo existe uma única matriz B $2 \times 2$ de números reais tal que

$$AB = BA = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

### 4.5.5 Demonstração de falsidade por contra-exemplo

Demonstrações de existência são usadas, em particular, para refutar conjeturas da forma $(\forall x \in D)\, P(x)$; pois a negação desta afirmação é $(\exists x \in D)\, \neg P(x)$. Neste caso dizemos que o elemento $x$ de $D$ que comprovadamente não satisfaz $P(x)$, e que portanto mostra a falsidade da conjetura, é um *contra-exemplo* para a mesma.

Considere a seguinte afirmação: "Para todo primo $n$, o inteiro $2^n - 1$ é primo." Esta afirmação não é verdadeira, basta ver que o número $n = 11$ é um contra-exemplo, pois $P(11) = 2^{11} - 1 = 2047 = 23 \times 89$.

**Exercício 4.29:** Demonstre (por meio de contra-exemplos) que as seguintes conjeturas são falsas:

a) Todo inteiro positivo é soma dos quadrados de três inteiros.

b) Se $n$ é um número inteiro e $4n$ é par, então $n$ é par.

c) O produto de dois números irracionais é um número irracional.

**Exercício 4.30:** Em cada caso abaixo, demonstre (por meio de contra-exemplo) que as duas proposições *não* são equivalentes:

a) $(\forall x \in D)\, P(x) \vee Q(x)$ e $((\forall x \in D)\, P(x)) \vee (\forall x \in D)\, Q(x))$.

b) $(\exists x \in D)\, P(x) \wedge Q(x)$ e $((\exists x \in D)\, P(x)) \wedge (\exists x \in D)\, Q(x))$.

# Capítulo 5

# Indução Matemática

## 5.1 Introdução

Seja $P(n)$ uma sentença matemática que depende de uma variável natural $n$, a qual se torna verdadeira ou falsa quando substituimos $n$ por um número natural dado qualquer. Estas sentenças são chamadas *sentenças abertas definidas sobre o conjunto dos números naturais* $\mathbb{N}$. Exemplos:

1. $P(n)$: "$n$ é ímpar." Observe que esta afirmação é verdadeira para alguns valores de $n$ e falsa para outros.

2. $P(n)$: "$n^2-n+41$ é um número primo." Neste exemplo podemos verificar, não tão facilmente, que $P(1), P(2), \ldots, P(40)$ são verdadeiros mas $P(41) = 41^2$ é falso.

3. $P(n)$: "$2n + 6$ é par." É fácil ver que $2n + 6 = 2(n + 3)$ para qualquer $n$, portanto $P(n)$ é verdade para todo $n$.

4. $P(n)$: "$1 + 3 + 5 + \cdots + (2n + 1) = (n + 1)^2$." Será que conseguiremos encontrar algum $m$ tal que $P(m)$ seja falso?

Depois de algumas tentativas começamos a desconfiar que a sentença $P(n)$ do exemplo 4 é verdadeira para todo $n \in \mathbb{N}$. Como poderíamos provar isso? Obviamente não podemos testar, um por um, todos os números naturais pois eles são em número infinito. Algumas proposições $P(n)$, como no exemplo 3. podem ser demonstradas usando álgebra e as técnicas estudadas anteriormente. No exemplo 4, como o lado esquerdo da igualdade não é uma forma fechada, ela não pode ser tratada algebricamente. Para estes casos, vamos precisar de uma nova técnica, a *demonstração por indução matemática*.

## 5.2 Princípio de Indução Matemática

O *princípio da indução matemática* (PIM) é a principal ferramenta para demonstrar sentenças da forma "$(\forall n \in \mathbb{N})\, P(n)$". Ele diz o seguinte:

**Axioma 5.1:** Seja $P(n)$ uma sentença aberta sobre $\mathbb{N}$. Suponha que:

1. $P(0)$ é verdade, e
2. Sempre que $P(k)$ é verdade, para algum $k \in \mathbb{N}$, temos que $P(k + 1)$ é verdade.

Então $P(n)$ é verdade para todo $n \in \mathbb{N}$.

Este princípio pode ser visto como uma propriedade fundamental dos números naturais. Estes podem ser definidos por um conjunto de axiomas enunciados pelo matemático Giuseppe Peano em 1889; e um dos postulados de Peano é equivalente ao PIM.

Para demonstrar uma afirmação "$(\forall n \in \mathbb{N})\, P(n)$" usando o PIM, podemos então seguir este roteiro:

- *Base da Indução*: Provar que $P(0)$ é verdade.
- *Hipótese de Indução*: Supor que para algum $k \in \mathbb{N}$, $P(k)$ é verdade.
- *Passo da Indução*: Provar que $P(k + 1)$ é verdade.

**Exemplo 5.1:** Provar que, para todo $n \geq 0$:

$$1 + 3 + 5 + \cdots + (2n + 1) = (n + 1)^2$$

**Prova:**

- *Base*: $P(0)$ é verdade pois a expressão acima é trivialmente válida para $n = 0$.
- *Hipótese de indução*: suponhamos que para algum $k$, $P(k)$ é verdade, isto é,

$$1 + 3 + 5 + \cdots + (2k + 1) = (k + 1)^2$$

.

- *Passo de indução*: temos de provar que $P(k+1)$ é verdade, isto é temos que provar que:

$$1 + 3 + 5 + \cdots + (2k+1) + (2(k+1)+1) = ((k+1)+1)^2$$

Pela hipótese de indução, temos

$$[1 + 3 + 5 + \cdots + (2k+1)] + (2(k+1)+1)) = [(k+1)^2] + (2(k+1)+1)$$

Por simples cálculos verficamos que o lado direito é igual a

$$((k+1)+1)^2$$

Isto mostra que $P(k+1)$ é verdade, toda vez que $P(k)$ é verdade. Portanto, pelo PIM, a fórmula é válida para todo número natural $n$.

**Fim.**

**Exemplo 5.2:** Dizemos que um conjunto de $n$ retas no plano *estão em posição geral* se não possui duas retas paralelas e nem três retas se interceptando num mesmo ponto. Vamos provar por indução que um conjunto de $n$ retas em posição geral divide o plano em $R_n = n(n+1)/2 + 1$ regiões.

**Prova:**

- *Base*: Para $n = 0$ temos apenas uma região. Como $R_0 = 0(0+1)/2+1 = 1$, a fórmula é válida neste caso.
- *Hipótese de indução*: Suponhamos que para algum $k$ a fórmula é válida, isto é quaisquer $k$ retas em posição geral dividem o plano em $R_k = k(k+1)/2 + 1$ regiões.
- *Passo da indução*: temos que provar que quaisquer $k+1$ retas em posição geral definem $R_{k+1} = (k+1)(k+2)/2 + 1$ regiões.
  Sejam $L_1, L_2, \ldots, L_{k+1}$ essas retas. Compare as regiões do plano definidas por elas, que chamaremos de *regiões novas*, com as *regiões velhas* definidas pelas primeiras $k$ dessas retas. Observe que algumas das regiões velhas são divididas pela última reta $L_{k+1}$, cada uma delas formando duas regiões novas; enquanto que as demais regiões velhas são também regiões novas.
  Como as retas estão em posição geral, a reta $L_{k+1}$ cruza cada uma das $k$ retas anteriores em $k$ pontos distintos. Em cada um desses cruzamentos, a reta $L_{k+1}$ passa de uma região velha para outra. Essas regiões são duas a duas distintas porque estão em lados opostos de alguma reta $L_i$, com $1 \leq i \leq k$. Portanto a reta $L_{k+1}$ corta $k+1$ regiões velhas, que dão origem a $2(k+1)$ regiões novas. Ou seja,

$$R_{k+1} = R_k - (k+1) + 2(k+1) = R_k + (k+1)$$

Como as retas $L_1, L_2, \ldots, L_k$ estão em posição geral, podemos usar a hipótese de indução. Obtemos

$$R_k + (k+1) = k(k+1)/2 + 1 + k + 1 = (k+1)(k+2)/2 + 1.$$

**Fim.**

### 5.2.1 Formulação do PIM usando conjuntos

O Princípio da Indução Matemática também pode ser enunciando usando a linguagem da teoria de conjuntos:

**Teorema 5.1:** Seja $S$ um subconjunto de $\mathbb{N}$ tal que

1. $0 \in S$, e
2. sempre que $k \in S$, para algum $k \in \mathbb{N}$, temos que $k + 1 \in S$.

Então $S = \mathbb{N}$.

Este teorema pode ser facilmente mostrado usando o PIM. Por outro lado, podemos demonstrar o PIM supondo que o teorema acima é verdade, e considerando o conjunto $S$ de todos os naturais $n$ para os quais $P(n)$ é verdadeira.

**Exercício 5.1:** Prove que $(\forall n \in \mathbb{N})\, 2^0 + 2^{-1} + 2^{-2} + 2^{-3} + \cdots + 2^{-n} \leq 2$.

**Exercício 5.2:** Prove que $(\forall n \in \mathbb{N})\, 1 \cdot 2^0 + 2 \cdot 2^1 + 3 \cdot 2^2 + \cdots + n \cdot 2^{n-1} = 1 + (n-1)2^n$

**Exercício 5.3:** Prove que $(\forall n \in \mathbb{N})\, 2^n > n$.

**Exercício 5.4:** Prove que $(\forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0\})\, n^n \geq n!$ (onde $n!$ denota o fatorial de um inteiro $n$; veja seção 8.9).

**Exercício 5.5:** Prove que, para todo $n \in \mathbb{N}$, $9^n - 1$ é divisível por 8.

**Exercício 5.6:** Prove que, para todo $n \in \mathbb{N}$, $a^n - 1$ é divisível por $a - 1$ para todo número inteiro $a > 1$.

**Exercício 5.7:** Prove que, para todo $n \in \mathbb{N}$, $11^{n+2} + 12^{2n+1}$ é divisível por 133.

**Exercício 5.8:** Prove que, para todo $n \in \mathbb{N}$, $\frac{n^5}{5} + \frac{n^4}{2} + \frac{n^3}{3} - \frac{n}{30}$ é um número inteiro.

**Exercício 5.9:** Suponha que uma caixa contém $p$ bolas vermelhas e $q$ bolas amarelas, e que o seguinte procedimento é repetido até sobrar uma única bola na caixa: "Retire duas bolas da caixa; se elas tiverem a mesma cor, coloque uma bola vermelha na caixa; se elas tiverem cores diferentes, coloque uma bola amarela na caixa. Em ambos os casos, não devolva à caixa as bolas retiradas." Descubra qual é a cor da bola que ficará na caixa, em função de $p$ e $q$. Demonstre, por indução no número de bolas $p + q$, que a sua resposta está correta.

**Exercício 5.10:** Prove que, para todo $n \in \mathbb{N}$, $2^{2n} - 1$ é um múltiplo de 3.

## 5.3 Generalizações da Indução Matemática

Há muitas variações do princípio da indução matemática, que são no fundo equivalentes, mas podem tornar algumas demonstrações mais simples.

### 5.3.1 Base genérica

Muitas vezes precisamos provar que uma sentença aberta $P(n)$ vale para todos os números naturais maiores ou iguais a um certo $n_0$; ou seja, que "$(\forall n \in \mathbb{N})\, n \geq n_0 \rightarrow P(n)$". Por exemplo, a afirmação $n^2 > 3n$ é verdadeira para todo natural $n$ maior ou igual a 4, embora não seja verdadeira se $n$ for 0, 1, 2 ou 3.

Podemos usar o PIM para provar esse tipo de afirmação, de maneira indireta. Primeiro definimos um outro predicado $Q(m)$ como sendo equivalente a $P(n_0 + m)$. Provamos então a afirmação $(\forall m \in \mathbb{N})\, Q(m)$, usando o PIM. Essa afirmação então implica $(\forall n \in \mathbb{N})\, n \geq n_0 \rightarrow P(n)$.

Este raciocínio justifica o teorema geral abaixo, que nos permite provar tais afirmações por indução matemática de maneira mais direta, usando $n_0$ como base em vez de 0:

**Teorema 5.2:** Seja $P(n)$ uma sentença aberta sobre $n \in \mathbb{N},\ n \geq n_0$, $n_0$ um número natural qualquer. Se

1. $P(n_0)$ é verdadeira, e
2. Para todo $k \geq n_0$, $(P(k) \rightarrow P(k+1))$,

então $P(n)$ é verdadeira para todo $n \in \mathbb{N}$ com $n \geq n_0$.

**Exemplo 5.3:** Prove que $n^2 > 3n$ para todo $n \in \mathbb{N}$ com $n \geq 4$.

**Prova:**

- *Base*: $n = 4$ é verdade pois $16 > 12$.
- *Hipótese de indução*: suponhamos que para algum $k \geq 4$, $k^2 > 3k$.
- *Passo da indução*: provar que $(k+1)^2 > 3(k+1)$. Temos que

$$(k+1)^2 = k^2 + 2k + 1$$

Por hipótese de indução $k^2 > 3k$, então

$$k^2 + 2k + 1 > 3k + 2k + 1$$

. Como $k \geq 4$ temos que $2k + 1 > 3$, logo

$$3k + 2k + 1 \geq 3k + 3 = 3(k+1)$$

portanto, destas duas desigualdades,

$$(k+1)^2 > 3(k+1).$$

**Fim.**

### 5.3.2 Passo genérico constante

Numa prova por indução, além de começar com uma base $n_0$ arbitrária, é possível usar um incremento maior que 1 no passo da indução. Ou seja, o passo da indução pode ser a demonstração de que $P(k) \rightarrow P(k+p)$, em vez de $P(k) \rightarrow P(k+1)$. Nesse caso, o roteiro é dado pelo seguinte teorema geral:

> **Teorema 5.3:** Seja $P(n)$ uma sentença aberta sobre $n \in \mathbb{N},\ n \geq n_0$, $n_0$ um número natural qualquer, e $p$ um inteiro positivo. Se
>
> 1. $P(n_0), P(n_0+1), \ldots, P(n_0+p-1)$ são verdadeiros, e
> 2. Para todo $k$ tal que $k \geq n_0$, $P(k) \rightarrow P(k+p)$.
>
> então $P(n)$ é verdade para todo $n \geq n_0$.

Observe que, neste caso, a prova da base da indução deve valer para $p$ inteiros consecutivos, ($n_0$, $n_0+1, \ldots, n_0+p-1$, e não apenas $n_0$.

> **Exemplo 5.4:** Prove que qualquer valor postal inteiro $n \geq 8$ pode ser obtido utilizando apenas selos com valores 3 e 5.
>
> Podemos provar esta afirmação usando o teorema da indução geral 5.3, com incremento $p = 3$:
>
> **Prova:**
>
> - *Bases*: $n = 8$, $n = 9$, $n = 10$. Como $8 = 5+3$, $9 = 3+3+3$ e $10 = 5+5$ temos que a proposição é válida para as bases.
> - *Hipótese de indução*: Suponhamos que $P(k)$ é verdadeira para algum valor $k \geq 8$.
> - *Passo*: Vamos provar que a proposição é válida para $k+3$. Podemos obter o valor $k+3$ acrescentando um selo de valor 3 aos selos usados para obter $k$.
>
> **Fim.**

### 5.3.3 Troca de variável na hipótese

Na hipótese de indução, podemos fazer uma troca de variável, usando $k$ no lugar de $k+1$. Nesse caso, o roteiro da demonstração fica assim:

- *Base da Indução*: Provar que $P(0)$ é verdade.
- *Hipótese de Indução*: Supor que para algum inteiro *positivo* $k$, $P(k-1)$ é verdade.
- *Passo da Indução*: Provar que $P(k)$ é verdade.

### 5.3.4 Exercícios

> **Exercício 5.11:** Prove que a soma dos ângulos internos de um polígono convexo de $n$ vértices, $n \geq 3$, é $180(n-2)$.

**Exercício 5.12:** Prove que o número de diagonais de um polígono convexo de $n$ lados, $n \geq 3$, é dado por $d_n = \frac{n(n-3)}{2}$.

**Exercício 5.13:** Seja $C$ um conjunto com $n \geq 2$ elementos. Prove que $C$ tem $n(n-1)/2$ subconjuntos com exatamente dois elementos.

**Exercício 5.14:** Prove que a soma dos cubos de três números naturais consecutivos é sempre divisível por 9.

**Exercício 5.15:** Prove que $(\forall n \in \mathbb{N})\, n \geq 13 \rightarrow n^2 < (3/2)^n$.

**Exercício 5.16:** Prove que todo valor inteiro $n \geq 5$, em dinheiro, pode ser obtido usando somente notas de 2 ou de 5 reais.

**Exercício 5.17:** Prove que, para todo inteiro $n \geq 2$, $\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \frac{1}{n+3} \cdots \frac{1}{2n} > \frac{13}{24}$.

**Exercício 5.18:** Prove que, para todo inteiro $n \geq 3$, $n^2 - 7n + 12 \geq 0$.

**Exercício 5.19:** Prove que, para todo inteiro $n > 1$, $2^{n+1} < 3^n$.

**Exercício 5.20:** Prove que, $(\forall n \in \mathbb{N} - \{0\})\, \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \ldots \frac{1}{n(n+1)} = \frac{n}{n+1}$.

## 5.4 Usos indevidos da indução matemática

É importante entender e verificar as condições em que a indução matemática se aplica. Se mal utilizada, ela pode levar a conclusões absurdas. Nos exemplos a seguir, tente encontrar o erro na demonstração.

**Exemplo 5.5:** Todos os cavalos têm a mesma cor.

**Prova:**

Seja a sentença aberta $P(n)$: "Num conjunto com $n$ cavalos, todos os cavalos têm a mesma cor." Vamos provar que $P(n)$ é verdadeira para todo $n \geq 1$, por indução.

- *Base*: Para $n = 1$ a sentença $P(n)$ é verdadeira.
- *Hipótese de indução*: Suponha que $P(k)$ é verdadeira para algum $k \geq 1$; isto é, em todo conjunto com $k$ cavalos, todos têm a mesma cor.
- *Passo de indução*: Vamos provar que, em todo conjunto com $k+1$ cavalos, todos têm a mesma cor. Considere um conjunto $C = \{c_1, c_2, \ldots, c_k, c_{k+1}\}$ com $k+1$ cavalos. Podemos escrever o conjunto $C$ como união de dois conjuntos, cada um com $k$ cavalos, da seguinte forma:

$$C = C' \cup C'' = \{c_1, \ldots, c_k\} \cup \{c_2, \ldots, c_{k+1}\}$$

Pela hipótese de indução, todos os cavalos de $C'$ têm a mesma cor. O mesmo é verdade para $C''$. Como $c_2$ pertence a $C'$ e a $C''$, concluímos que os cavalos de $C'$ têm a mesma cor que os cavalos de $C''$. Logo todos os cavalos de $C$ têm a mesma cor.

**Fim.**

Este exemplo, conhecido como *paradoxo dos cavalos*, foi inventado pelo matemático húngaro George Pólya (1887-1995). O exemplo a seguir ilustra um erro similar na aplicação do PIM, com "conclusão" igualmente absurda:

**Exemplo 5.6:** Todos os números naturais são iguais.

**Prova:**

Seja $P(n)$ a sentença aberta "todos os números naturais menores ou iguais a $n$ são iguais." Vamos provar que $P(n)$ é verdadeira para todo $n \in \mathbb{N}$, por indução.

- *Base*: $P(0)$ é obviamente verdadeira.
- *Hipótese de indução*: Suponha que $P(k)$ é verdadeira para algum $k \geq 0$, ou seja, todos os números menores ou iguais a $k$ são iguais.
- *Passo de indução*: Vamos provar que $P(k+1)$ é verdadeira. Pela hipótese de indução, $k - 1 = k$. Somando 1 em ambos os lados da iqualdade temos $k = k + 1$. Portanto $P(k + 1)$ também é verdadeira.

**Fim.**

O próximo exemplo mostra a necessidade de provar a base da indução:

**Exemplo 5.7:** Para todo número natural $n \geq 1$, o número $n^2 + n$ é ímpar.

**Prova:**

- *Hipótese de indução*: Suponha que $k^2 + k$ é ímpar para algum $k \geq 1$.
- *Passo de indução*: Vamos provar que $(k + 1)^2 + (k + 1)$ é ímpar. Observe que

$$(k + 1)^2 + (k + 1) = k^2 + 2k + 1 + k + 1 = (k^2 + k) + 2(k + 1)$$

Este resultado é ímpar, pois $(k^2 + k)$ é ímpar pela hipótese de indução, $2(k + 1)$ é par, e um número ímpar somado com um número par é ímpar.

**Fim.**

O leitor pode verificar que a afirmação "provada" acima não é verdadeira.

Outro erro comum é ilustrado pelo exemplo seguinte:

**Exemplo 5.8:** Todo polinômio de grau $n \geq 1$ tem exatamente $n$ raízes reais distintas.

**Prova:**

- *Base da indução*: $P(1)$ diz que todo polinômio de grau 1 tem exatamente uma raiz real. De fato, todo polinômio de grau 1 tem a forma $ax + b$ com $a \neq 0$, e o número real $-b/a$ é sua única raiz.
- *Hipótese de indução*: Suponha que, para algum inteiro $k \geq 1$, $P(k)$ é verdadeira; isto é, todo polinômio de grau $k$ tem exatamente $k$ raizes reais distintas.

- *Passo de indução*: Vamos provar que $P(k+1)$ é verdade. Seja $F$ um polinômio de grau $k$, com variável $x$. Pela hipótese da indução, $F$ tem exatamente $k$ raizes reais distintas. Seja $r$ a maior dessas raízes, e seja $G = (x-(r+1))F$. Pode-se ver que $G$ é um polinômio de grau $k+1$. Toda raiz de $F$ é raiz de $G$, e $r+1$ (que é distinta de todas essas) também é. Por outro lado, toda raiz de $G$ deve ser raiz de $(x-(r+1))$ ou de $F$. Portanto todo polinômio de grau $k+1$ tem exatamente $k+1$ raízes distintas;

**Fim.**

Obviamente essa afirmação é falsa, pois o polinômio $x^2+1$, por exemplo, não tem nenhuma raiz real. Onde está o erro da demonstração? Observe que no passo da indução precisaríamos provar a afirmação para *qualquer* polinômio de grau $k+1$, mas em vez disso só provamos para os poliômios que podem ser obtidos pelo produto de qualquer polinômio de grau $k$ por um certo fator de grau 1. Acontece que existem polinômios de grau $k+1$ (como $x^2+1$) que não podem ser obtidos desta forma.

Mais formalmente, a afirmação que queremos provar pode ser escrita como $(\forall n \in \mathbb{N})\,(\forall F \in \mathcal{P}_n)\,Q(F,n)$, onde $\mathcal{P}_n$ é o conjunto de todos os polinômios de grau $n$, e $Q(F,n)$ é o predicado "$F$ tem $n$ raízes reais distintas." A indução se aplica ao primeiro quantificador, mas não ao segundo. Na demonstração (incorreta) acima, a hipótese de indução é "suponha que, para algum inteiro $k \geq 1$, $(\forall F \in \mathcal{P}_k)\,Q(F,k)$. No passo de indução, usamos instanciação universal para dizer que "seja um $F$ qualquer em $\mathcal{P}_k$, pela hipótese de indução temos $Q(F,k)$". Construímos então *um* polinômio $G$ de $\mathcal{P}_{k+1}$ tal que $Q(G,k+1)$. Entretanto, como este $G$ não foi escolhido *arbitrariamente* em $\mathcal{P}_{k+1}$, não podemos usar a generalização universal para concluir $(\forall G \in \mathcal{P}_{k+1})\,Q(G,k+1)$.

## 5.5 Mais exemplos de indução matemática

**Exemplo 5.9:** [Desigualdade de Bernoulli] Se $c$ é um número real tal que $c > -1$ e $c \neq 0$, então para todo número natural $n \geq 2$ vale a desigualdade

$$(1+c)^n > 1+nc$$

.

**Prova:**

- *Base*: Para $n = 2$ a proposição é verdadeira pois

$$(1+c)^2 = 1+2c+c^2 > 1+2c.$$

- *Hipótese de indução*: Para um dado $k \geq 2$, $(1+c)^k > 1+kc$.
- *Passo*: Provar que $(1+c)^{k+1} > 1+(k+1)c$.
  Como $(1+c)^{k+1} = (1+c)^k(1+c)$, pela hipótese de indução temos que

$$(1+c)^{k+1} > (1+kc)(1+c) = 1+(k+1)c+kc^2 > 1+(k+1)c.$$

  Logo a desigualdade é válida para $k+1$. Portanto a desigualdade vale para todo $n \geq 2$
  .

**Fim.**

**Exemplo 5.10:** [Conjunto Potência] Seja $A$ um conjunto com $n$ elementos. Prove que o conjunto potência $\mathbb{P}(A)$ tem $2^n$ elementos.

**Prova:**

- *Base*: Se $n = 0$ temos que o conjunto $A$ é vazio e portanto $\mathbb{P}(A) = \{\emptyset\}$. Logo o número de elementos de $\mathbb{P}(A)$ é igual a $1 = 2^0$.
- *Hipótese de indução*: Para um dado conjunto $A$ com $k \geq 0$ elementos temos que o conjunto potência $\mathbb{P}(A)$ tem $2^k$ elementos.
- *Passo*: Provar que para um conjunto $A$ com $k+1$ elementos o conjunto $\mathbb{P}(A)$ tem $2^{k+1}$ elementos. Seja $A$ um conjunto com $k+1$ elementos. Como $k \geq 0$, $A$ tem pelo menos um elemento. Seja $a$ este elemento. Considere o conjunto $B = A - \{a\}$. Logo $B$ tem $k$ elementos, o que, pela hipótese de indução, implica que $\mathbb{P}(B)$ tem $2^k$ elementos. O conjunto $\mathbb{P}(A)$ pode ser dividido em dois sub-conjuntos, ou seja

$$\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(B) \cup \{\, C \cup \{a\} : C \in \mathbb{P}(B) \,\}.$$

  Como $\mathbb{P}(B) \cap \{\, C \cup \{a\} : C \in \mathbb{P}(B) \,\} = \emptyset$ e

$$|\mathbb{P}(B)| = |\{\, C \cup \{a\} : C \in \mathbb{P}(B) \,\}| = 2^k$$

  concluímos que o número de elementos de $\mathbb{P}(A)$ é $2^{k+1}$, ou seja $|\mathbb{P}(A)| = 2^{k+1}$.

**Fim.**

**Exemplo 5.11:**[Descobrindo a Moeda Falsa] Num conjunto de $2^n$ moedas de ouro temos uma que é falsa, ou seja pesa menos que as outras. Prove, por indução, que é possível achar a moeda falsa com $n$ pesagens usando uma balança de dois pratos sem usar peso.

**Prova:**

- *Base*: Para $n = 1$ temos duas moedas e, portanto, basta colocar uma em cada prato para descobrir a falsa.
- *Hipótese de indução*: Usando $k$ pesagens podemos descobrir a moeda falsa dentre $2^k$ moedas.
- *Passo*: Provar que, num conjunto de $2^{k+1}$ moedas, podemos descobrir a moeda falsa com $k+1$ pesagens. Divida o conjunto de $2^{k+1}$ moedas em dois conjuntos de $2^k$ moedas. Coloca-se esses conjuntos em cada prato da balança. Dessa forma descobrimos em qual conjunto de $2^k$ moedas se encontra a falsa. Pela hipótese de indução descobre-se a moeda com $k$ pesagens, e, mais a pesagem anterior temos um total de $k+1$ pesagens.

**Fim.**

O matemático alemão Johann Dirichlet (1805-1859) enunciou em 1834 o seguinte fato, conhecido como *princípio dos escaninhos* (ou *das gavetas*, *das casas de pombos* etc.):

**Teorema 5.4:** Se em $n$ caixas ($n \geq 1$) colocarmos mais de $n$ objetos, então alguma caixa conterá mais de um objeto.

Vamos provar este princípio usando indução matemática no número $n$ de caixas.

**Prova:**

- *Base*: Para $n = 1$ o resultado é trivial pois, se há mais de um objeto, essa caixa terá mais de um objeto.
- *Hipótese de indução*: Suponhamos que o resultado é válido para algum número $k \geq 1$ de caixas, contendo mais do que $k$ objetos.
- *Passo*: Queremos provar que o resultado é válido para $k+1$ caixas contendo mais do que $k+1$ objetos. Seja $m > k+1$ o número de objetos. Escolha uma caixa ao acaso. Se essa caixa contiver mais de um objeto, a proposição está provada. Se nessa caixa não há nenhum objeto, nas $k$ caixas restantes estão acomodados $m > k + 1 > k$ objetos; pela hipótese de indução, uma delas deve conter mais de um objeto. Finalmente, se na caixa escolhida há apenas um objeto, temos que, nas $k$ caixas restantes estão distribuídos $m - 1 > (k + 1) - 1 = k$ objetos, o que, novamente pela hipótese de indução, implica que uma das caixas contém mais de um objeto.

**Fim.**

## 5.6 Princípio da Indução Completa

Vamos agora enunciar o *princípio da indução completa* (PIC), também chamado de *princípio da indução forte*. Esta versão alternativa do princípio da indução matemática serve, como a anterior, para demonstrar sentenças na forma "$(\forall n \in \mathbb{N})\, P(n)$". Em alguns casos essa técnica torna a demonstração da sentença mais fácil que a técnica anterior. Na seção 5.9 provaremos a equivalência desses dois princípios.

**Teorema 5.5:** Seja $P(n)$ uma sentença aberta sobre $\mathbb{N}$. Suponha que

1. $P(0)$ é verdade; e
2. para todo $k$ em $\mathbb{N}$, $((\forall i \in \mathbb{N})\, i \leq k \rightarrow P(i)) \rightarrow P(k+1)$,

então $P(n)$ é verdade para todo $n \in \mathbb{N}$.

Ou seja, ao provar o caso geral $P(k+1)$, podemos supor já provados *todos* os casos anteriores, desde a base $P(0)$ até $P(k)$. Mais precisamente, para provar que "$(\forall n \in \mathbb{N})\, P(n)$" é verdadeiro, usando indução completa, devemos proceder da seguinte forma:

1. *Base da indução*: Provar que $P(0)$ é verdade.
2. *Hipótese de indução*: Supor que, para algum $k \in \mathbb{N}$, $P(0)$, $P(1)$, $\ldots$ $P(k)$ são verdadeiros.
3. *Passo da indução*: Provar que $P(k+1)$ é verdade.

### 5.6.1 Indução completa com base genérica

Como no *PIM*, podemos generalizar este princípio para provar afirmações do tipo "$(\forall n \in \mathbb{N})\, n \geq n_0 \rightarrow P(n)$". Neste caso, a base da indução é $P(n_0)$ em vez de $P(0)$, e na hipótese de indução supomos provados $P(n_0), P(n_0+1), \ldots P(k)$ para algum $k \in \mathbb{N}$. Isto equivale a definir um predicado $Q$ tal que $Q(n) = P(n + n_0)$, para todo $n \in \mathbb{N}$; e então provar "$(\forall n \in \mathbb{N})\, Q(n)$" pelo PIC.

**Exemplo 5.12:** Definimos que um número inteiro $p$ é *primo* quando ele é maior que 1 e seus únicos divisores são 1 e $p$. Vamos provar que todo inteiro maior ou igual a 2 é primo ou é um produto de primos.

**Prova:**

Seja $P(n)$ a sentença aberta "$n$ é primo ou é um produto de primos." Vamos provar que $(\forall n \in \mathbb{N})\, n \geq 2 \rightarrow P(n)$, por indução completa.

- *Base*: $P(2)$ é verdade pois 2 é primo.
- *Hipótese de indução*: Suponha que, para algum $k \geq 2$, $P(i)$ é verdade para todo $i \in \mathbb{N}$ com $2 \leq i \leq k$.
- *Passo da indução*: Vamos provar que $P(k+1)$ também é verdade. Se $k+1$ é primo então $P(k+1)$ é verdadeiro. Se $k+1$ não é primo, como $k+1 \geq 2$, ele deve ter algum divisor diferente de 1 e de $k+1$. Ou seja, $k+1 = ab$ para algum $a$ e $b$, com $1 < a \leq k$. Como $a > 1$, concluímos que $b < k+1$; como $a < k+1$, concluímos que $b > 1$. Ou seja, $2 \leq a \leq k$ e $2 \leq b \leq k$. Pela hipótese de indução, portanto, $a$ e $b$ são primos ou produtos de primos. Portanto $k+1 = a \cdot b$ também é um produto de primos.

**Fim.**

### 5.6.2 Indução completa com vários casos na base

Na demonstração pelo PIC, pode ser conveniente tratar vários valores consecutivos no caso base. Ou seja, para provar "$(\forall n \in \mathbb{N})\, P(n)$", podemos proceder como segue:

1. *Base da indução*: Provar que $P(0), P(1), \ldots, P(p)$ é verdade, para algum $p \in \mathbb{N}$.
2. *Hipótese de indução*: Supor que, para algum inteiro $k \geq p$, $P(0), P(1), \ldots, P(k)$ são verdadeiros.
3. *Passo da indução*: Provar que $P(k+1)$ é verdade.

Observe que, neste caso, na demonstração do passo de indução podemos supor que $k \geq p$.

Esta variante da prova pelo PIC pode ser usada também com base genérica $n_0$ (seção 5.6.1). Nesse caso, provamos primeiro as afirmações $P(n_0), P(n_0+1), \ldots, P(n_0+p)$, para algum $p \in \mathbb{N}$; e na hipótese de indução, supomos que $P(i)$ é verdade para todo $i \in \mathbb{N}$ entre $n_0$ e algum inteiro $k \geq n_0 + p$.

**Exemplo 5.13:** Os *números de Lucas* $A_1, A_2, \ldots$ são definidos pelas seguintes regras: $A_1 = 1$, $A_2 = 3$, e $A_n = A_{n-1} + A_{n-2}$ para todo número inteiro $n$ maior ou igual a 3.

Vamos provar $A_n < (\frac{7}{4})^n$ para todo inteiro $n \geq 1$, por indução completa.

**Prova:**
Seja $P(n)$ a sentença aberta "$A_n < \left(\frac{7}{4}\right)^n$."

- *Base*:
  - $P(1)$ é verdade pois $A_1 = 1 < \frac{7}{4}$.
  - $P(2)$ é verdade pois $A_2 = 3 < \left(\frac{7}{4}\right)^2 = \frac{49}{16}$.
- *Hipótese de indução*: Suponha que, para algum inteiro $k \geq 2$, $P(i)$ é verdade para todo $i \in \mathbb{N}$ com $1 \leq i \leq k$.
- *Passo da indução*: Vamos provar que $P(k+1)$ também é verdade, ou seja $A_{k+1} < (\frac{7}{4})^{k+1}$. Como $k + 1 \geq 3$, pela definição temos que $A_{k+1} = A_k + A_{k-1}$. Então, pela hipótese de indução, temos

$$A_{k+1} < \left(\frac{7}{4}\right)^k + \left(\frac{7}{4}\right)^{k-1} = \left(\frac{7}{4} + 1\right)\left(\frac{7}{4}\right)^{k-1} = \frac{11}{4}\left(\frac{7}{4}\right)^{k-1}$$

Como $\frac{11}{4} < 3 < \left(\frac{7}{4}\right)^2$ temos que,

$$A_{k+1} < \left(\frac{7}{4}\right)^2\left(\frac{7}{4}\right)^{k-1} = \left(\frac{7}{4}\right)^{k+1}$$

.

**Fim.**

Formalmente, numa prova usando o princípio da indução completa, é possível omitir prova da base da indução. Para isso seguimos o roteiro

1. *Hipótese de indução*: Supor que, para algum $k \in \mathbb{N}$, $P(i)$ é verdade para todo inteiro $i$ com $0 \leq i < k$.
2. *Passo da indução*: Provar que $P(k)$ é verdade.

Note que a hipótese de indução diz "$0 \leq i < k$" em vez de "$0 \leq i \leq k$", e o objetivo é provar $P(k)$ em vez de $P(k+1)$ (como na seção 5.3.3). Este roteiro fornece uma prova válida porque, quando $k = 0$, o conjunto dos inteiros $i$ com $0 \leq i < k$ é vazio, portanto a hipótese de indução é verdadeira por vacuidade. Porém, na prova do passo de indução, temos que lembrar que $k$ pode ser zero, o que pode exigir um tratamento especial para esse caso. Ou seja, a demonstração de $P(0)$, que seria tratada na base, passa a ser tratada como um caso particular do passo. Portanto esta alternativa nem sempre é mais simples e fácil do que tratar o caso base separadamente.

### 5.6.3 Formulação do PIC usando conjuntos

O princípio da indução completa também pode ser enunciando usando a linguagem da teoria de conjuntos:

**Teorema 5.6:** Seja $S$ um subconjunto de $\mathbb{N}$ tal que

1. $0 \in S$, e
2. para todo $k \in \mathbb{N}$, $\{0, 1, 2, \ldots, k\} \subseteq S \rightarrow k + 1 \in S$.

Então $S = \mathbb{N}$.

## 5.7 Exercícios

**Exercício 5.21:** Prove que todo inteiro maior ou igual a 5, par ou ímpar, é a soma de números primos ímpares (isto é, primos diferentes de 2). Por exemplo, $6 = 3 + 3$, $7 = 7$, e $10 = 3 + 7$.

**Exercício 5.22:** Prove que todo número natural $m > 0$ pode ser escrito como soma de distintas potências de 2, isto é, existem números inteiros $n_1, n_2, \ldots, n_r$, com $0 \leq n_1 < n_2 < \cdots < n_r$, tais que

$$m = 2^{n_1} + 2^{n_2} + \cdots + 2^{n_r}$$

**Exercício 5.23:** Sejam $m$ moedas, uma das quais é falsa e tem peso diferente das demais (mais leve). Use o exercício anterior para provar, por indução, que bastam $n_r$ pesagens com uma balança de pratos para descobrir a moeda falsa.

**Exercício 5.24:** Os *números de Fibonacci* $F_0, F_1, F_2, \ldots$ são definidos pelas seguintes regras: $F_0 = 0$, $F_1 = 1$, e $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$ para todo número natural $n$ maior ou igual a 2. Prove, por indução, que

a) $(\forall n \in \mathbb{N})\, F_n < (\frac{13}{8})^n$.

c) $(\forall n \in \mathbb{N})\, S_n = F_{n+1} - 1$ onde $S_n$ é o número de somas realizadas ao se calcular $F_n$.

**Exercício 5.25:** Sejam $\alpha$ e $\beta$ as duas soluções da equação $x^2 - x - 1 = 0$, com $\alpha > 0$. Prove que $F_n = (\alpha^n - \beta^n)/(\alpha - \beta)$, para todo $n$ em $\mathbb{N}$.

**Exercício 5.26:** Prove que os números de Fibonacci satisfazem as seguintes identidades:

a) $F_0 + F_1 + F_2 + \cdots + F_n = F_{n+2} - 1$.

b) $F_1 + F_3 + F_5 + \cdots + F_{2n-1} = F_{2n}$.

c) $F_0 + F_2 + F_4 + \cdots + F_{2n} = F_{2n+1} - 1$.

d) $F_0^2 + F_1^2 + F_2^2 + \cdots + F_n^2 = F_n F_{n+1}$.

e) $F_0 + F_3 + F_6 + \cdots + F_{3n} = \frac{1}{2}(F_{3n+2} - 1)$.

a) $F_{3n} = F_{n+1}^3 + F_n^3 - F_{n-1}^3$.

**Exercício 5.27:** Prove que, para quaisquer números naturais $m$ e $n$, $F_m F_n + F_{m+1} F_{n+1} = F_{m+n+1}$. (Dica: fixe um $m$ arbitrário e prove por indução em $n$.)

**Exercício 5.28:** Seja $x$ um número real diferente de zero, tal que $x + \frac{1}{x}$ é um número inteiro. Prove que, para todo número natural $n$, $x^n + \frac{1}{x^n}$ é inteiro.

**Exercício 5.29:** Considere a afirmação (obviamente falsa) $P(n)$: "Para todo número real $a > 0$ e todo natural $n$, $a^n = 1$". Encontre o erro na demonstração por indução abaixo.

**Prova:**

- *Base*: $P(0)$ é obviamente verdadeira uma vez que $a^0 = 1$.

- *Hipótese de indução*: Suponha que, para algum $k \geq 0$, $P(i)$ é verdade para todo $i \in \mathbb{N}$ com $0 \leq i \leq k$. ou seja, $a^i = 1$ para todo $i$ com $0 \leq i \leq k$ .
- *Passo de indução*: Vamos provar que $P(k+1)$ é verdadeira, isto é $a^{k+1} = 1$. Observe que

$$a^{k+1} = a^k \cdot a = a^k \cdot \frac{a^k}{a^{k-1}} = 1 \cdot \frac{1}{1} = 1.$$

  Portanto $P(k+1)$ também é verdadeira.

**Fim.**

## 5.8 Princípio da Boa Ordenação

Uma outra maneira de provar sentenças abertas sobre número naturais é usar uma propriedade dos números naturais conhecida como o *princípio da boa ordenação* (PBO).

Seja $S$ um conjunto de números reais. Um *elemento mínimo* de $S$ é um $y \in S$ tal que para todo $x \in S, y \leq x$. O princípio da boa ordenação diz que

**Teorema 5.7:** Todo subconjunto não vazio $S$ de $\mathbb{N}$ tem um elemento mínimo.

Note que esta afirmação não é válida para subconjuntos de $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{Z}$; isto é, existem subconjuntos de $\mathbb{R}$ e de $\mathbb{Z}$ que não tem elemento mínimo.

Como exemplo de uso do PBO, vamos provar o *Teorema da Divisão de Euclides*:

**Teorema 5.8:** Sejam $a, b \in \mathbb{N}$, com $b \neq 0$. Então existem $q, r \in \mathbb{N}$ tais que $a = bq + r$ com $0 \leq r < b$.

**Prova:**

Sejam $a, b \in \mathbb{N}$, com $b \neq 0$, e seja

$$S = \{\, a - bk : k \in \mathbb{N}, a - bk \geq 0 \,\}.$$

Observe que $S \subseteq \mathbb{N}$ pois $a - bk \geq 0$; e que $S \neq \emptyset$ pois contem $a = a - b0$. Então pelo PBO, o conjunto $S$ tem um elemento mínimo. Seja $r = a - bq$ esse elemento.

Suponha agora que $r \geq b$. Nesse caso $a - b(q+1) = r - b \geq 0$, e portanto $r - b$ está também em $S$. Como $b > 0$, temos $r - b < r$. Isto contraria a escolha de $r$ como o menor elemento de $S$. Portanto $r < b$.

**Fim.**

## 5.9 Formas equivalentes do princípio da indução

Nesta seção vamos provar as equivalências do princípio da indução matemática, do princípio da indução completa e do princípio da boa ordenação (PBO). Mais precisamente, vamos provar que

$PIM \rightarrow PBO \rightarrow PIC \rightarrow PIM$.

### 5.9.1 PIM implica PBO

Vamos supor que o princípio da indução matemática é válido, e provar o princípio da boa ordenação.

**Prova:**

Seja $S$ um subconjunto de $\mathbb{N}$ que não possui elemento mínimo; vamos provar que ele só pode ser o conjunto vazio. Considere a sentença aberta $P(n)$: "todo elemento de $S$ é maior que $n$". Vamos provar $(\forall n \in \mathbb{N})\ P(n)$ por indução matemática.

- *Base*: como $0 \leq x$ para todo $x \in \mathbb{N}$, 0 não pertence a $S$, pois caso contrário seria um elemento mínimo. Logo, $P(0)$ é verdadeira.
- *Hipótese de indução*: Vamos supor que $P(k)$ é verdadeira para algum $k$; isto é, todo elemento de $S$ é maior que $k$.
- *Passo da indução*: Vamos provar que $P(k+1)$ é verdadeira. Todo elemento $x$ de $S$ é maior que $k$, portanto é maior ou igual a $k+1$. Segue daí que o número $k+1$ não pode pertencer a $S$, pois nesse caso seria um elemento mínimo. Portanto, todo elemento de $S$ é maior que $k+1$. Ou seja, $P(k+1)$ é verdadeira. Logo $(\forall n \in \mathbb{N})\ P(n)$ é verdadeira.

Por outro lado, se $x$ é um elemento qualquer de $S$, a afirmação $P(x)$ é falsa. Portanto, a afirmação $(\forall n \in \mathbb{N})\ P(n)$ implica que $S$ é vazio.

**Fim.**

### 5.9.2 PBO implica PIC

Vamos supor agora que o princípio da boa ordenação é válido, e provar o princípio da indução completa.

**Prova:**

Suponha que $P(n)$ é uma sentença aberta que satisfaz as condições do PIC, isto é

1. $P(0)$ é verdade; e
2. para todo $k \in \mathbb{N}$, $((\forall i \in \mathbb{N})\ i \leq k \rightarrow P(i)) \rightarrow P(k+1)$.

Considere o conjunto $S = \{\, n \in \mathbb{N} : P(n) \text{ é falsa } \}$. Se $S$ não for vazio, pelo PBO ele possui um elemento mínimo. Pela condição 1 acima, este elemento é positivo, ou seja é igual a $k+1$ para algum $k \in \mathbb{N}$. Como $k+1$ é mínimo, $P(i)$ deve ser verdadeira para todo natural $i \leq k$. Mas pela condição 2, $P(k+1)$ deve ser verdadeira, ou seja $k+1 \notin S$. Esta contradição significa que $S$ é vazio, ou seja $P(n)$ é verdadeira para todo $n$.

**Fim.**

### 5.9.3 PIC implica PIM

Para concluir, vamos supor que o PIC é verdade, e provar o PIM.

**Prova:**

Seja $P(n)$ uma sentença aberta que satisfaz as condições do PIM, isto é,

1. $P(0)$ é verdade; e
2. para todo $k \in \mathbb{N}$, $P(k) \to P(k+1)$.

A segunda afirmação implica que

2'. para todo $k \in \mathbb{N}$, $((\forall i \leq k)\, P(i)) \to P(k+1)$.

Nesta passagem usamos o fato que $(\forall i \leq k)\, P(i)$ equivale a

$$((\forall i < k)\, P(i)) \wedge P(k)$$

e o teorema da lógica proposicional (exercício 3.28 item b))

$$(p \to q) \to (r \wedge p \to q)$$

onde $p = P(k)$, $q = P(k+1)$, e $r = ((\forall i < k)\, P(i))$ As condições 1 e 2 são as hipóteses do *PIC*, portanto concluímos que $P(n)$ é verdadeira para todo $n$.

**Fim.**

## 5.10 Exercícios adicionais

**Exercício 5.30:** Demonstre a validade das seguintes fórmulas:

1. $(\forall n \in \mathbb{N})\ 1 + 2 + 3 + \cdots + n = \dfrac{n(n+1)}{2}$.
2. $(\forall n \in \mathbb{N})\ 1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2 = \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.
3. $(\forall n \in \mathbb{N} - \{0\})\ 1^2 + 3^2 + 5^2 + \cdots + (2n-1)^2 = \dfrac{n(2n-1)(2n+1)}{3}$.
4. $(\forall n \in \mathbb{N})\ 1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + n^3 = \left[\dfrac{n(n+1)}{2}\right]^2$.
5. $(\forall n \in \mathbb{N})\ 2^0 + 2^1 + 2^2 + \cdots + 2^n = 2^{n+1} - 1$.
6. $(\forall n \in \mathbb{N})\ 1^2 - 2^2 + 3^2 - \cdots + (-1)^{n-1} n^2 = (-1)^{n-1} \dfrac{n(n+1)}{2}$.
7. $(\forall n \in \mathbb{N} - \{0\})\ \frac{1}{1\cdot 3} + \frac{1}{3\cdot 5} + \ldots \dfrac{1}{(2n-1)(2n+1)} = \dfrac{n}{2n+1}$.

8. $(\forall n \in \mathbb{N})\ 1 \cdot 2^0 + 2 \cdot 2^1 + 3 \cdot 2^2 + \cdots + n \cdot 2^{n-1} = 1 + (n-1)2^n$.

**Exercício 5.31:** Prove que as regiões do plano determinadas por $n$ retas, em posição geral, podem ser coloridas utilizando duas cores de modo que regiões adjacentes recebam cores diferentes.

**Exercício 5.32:** Encontre o menor natural $n_0 \in \mathbb{N}$ que torna as seguintes afirmações verdadeiras, e prove-as por indução em $n$:

1. $(\forall n \in \mathbb{N})\ n \geq n_0 \rightarrow 2^n > n^2$.
2. $(\forall n \in \mathbb{N})\ n \geq n_0 \rightarrow n^2 < (\frac{5}{4})^n$.
3. $(\forall n \in \mathbb{N})\ n \geq n_0 \rightarrow n! > 2^n$.
4. $(\forall n \in \mathbb{N})\ n \geq n_0 \rightarrow n! > 4^n$.

**Exercício 5.33:** Seja $C$ um conjunto com $n \geq 2$ elementos. Prove, usando indução em $n$, que $C$ tem $n(n-1)/2$ subconjuntos com exatamente dois elementos.

**Exercício 5.34:** Seja $P$ um polígono no plano. *Triangular* um polígono significa dividir seu interior traçando diagonais que não se cruzam até que todas as regiões obtidas sejam triângulos. Neste caso, dizemos que o polígono $P$ é *triangulado*. Um triângulo $T$ de um polígono triangulado $P$ é *exterior* se dois dos lados de $T$ são lados do polígono $P$. Na figura 5.1, os triângulos $T_1$ e $T_2$ são exteriores.

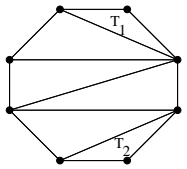



Figura 5.1: Polígono triangulado.

Prove, usando indução matemática, que um polígono triangulado $P$ com quatro ou mais lados possui pelo menos dois triângulos exteriores.

**Exercício 5.35:** Prove que, para todo $n, m \in \mathbb{N}$,

$$1 \cdot 2 \ldots m + 2 \cdot 3 \ldots m(m+1) + \cdots + n(n+1) \ldots (n+m-1) = \frac{n(n+1)\ldots(n+m)}{m+1}$$

Sugestão: Fixe $m$ arbitrário e prove por indução sobre $n$.

**Exercício 5.36:** Para todo inteiro positivo $i$, seja $d_i$ o dígito das unidades de $7^i$. Prove que $d_i = d_{i+4}$ para todo $i$ positivo.

**Exercício 5.37:** Considere o seguinte jogo para duas pessoas. Coloca-se um número qualquer $n \geq 1$ de botões na mesa, e cada jogador, alternadamente, retira no mínimo 1 e no máximo 4 botões da pilha. Quem tira o último botão perde.

Vamos definir $f_n$ como sendo 1 se o jogador da vez consegue ganhar quando há $n$ botões na mesa, se jogar corretamente; e 0 se ele vai sempre perder, não importa como jogue. Por exemplo, $f_1$ é zero, por definição; mas $f_5$ é 1 pois o jogador da vez consegue ganhar (tirando 4 botões).

a) Determine $f_n$ para $n$ entre 1 e 30.

b) Determine uma fórmula eficiente para $f_n$ e prove-a por indução.

# Capítulo 6

# Relações

Funções como seno e logaritmo, e os sinais de comparação '>', '=', etc., são casos particulares de *relações*, um conceito fundamental da matemática.

## 6.1 Conceitos básicos

Uma *relação binária* (ou simplesmente uma *relação*) $\mathcal{R}$ *de* um conjunto $A$ *para* um conjunto $B$ é um sub-conjunto de $A \times B$. Em outras palavras, é um conjunto de pares ordenados $(a, b)$ com $a \in A$ e $b \in B$.

Em geral usa-se a notação $a\mathcal{R}b$ para dizer que $(a, b) \in \mathcal{R}$ e $a\not\mathcal{R}b$ para dizer que $(a, b) \notin \mathcal{R}$. Se $(a, b) \in \mathcal{R}$ dizemos que *a está relacionado com b* pela relação $\mathcal{R}$.

**Exemplo 6.1:** Sejam $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{4, 5\}$. Então $\mathcal{R} = \{(1, 4), (2, 5), (3, 5)\}$ é uma relação de $A$ para $B$. Neste exemplo, temos $2\mathcal{R}5$ e $3\mathcal{R}5$, mas $2\not\mathcal{R}4$ e $5\not\mathcal{R}2$.

Se os conjuntos $A$ e $B$ são finitos e suficientemente pequenos, uma relação pode ser representada por um diagrama, em que cada elemento de $A$ ou $B$ é representado por um ponto, e cada par ordenado $(a, b)$ por uma seta de $a$ para $b$. Veja a figura 6.1.

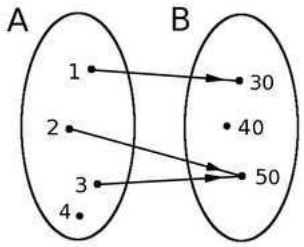



Figura 6.1: Diagrama da relação $\mathcal{R} = \{(1, 30), (2, 50), (3, 50)\}$ do conjunto $A = \{1, 2, 3, 4\}$ para o conjunto $B = \{30, 40, 50\}$.

**Exemplo 6.2:** Sejam $C = \{1, 2, 3, 4\}$ e $D = \{4, 5, 6\}$. Observe que o conjunto de pares $\mathcal{R}$ do exemplo anterior também é uma relação de $C$ para $D$.

**Exemplo 6.3:** O conjunto de pares $\left\{ (x, \sqrt{x}) : x \in \mathbb{N} \right\}$ é um exemplo de uma relação de $\mathbb{N}$ para $\mathbb{R}$.

Se $R$ é uma relação de $A$ para $A$, dizemos que $\mathcal{R}$ é uma relação *em* $A$ ou *sobre* $A$.

Observe que os sinais de comparação da álgebra ("$<$", "$\leq$", etc.) são relações binárias definidas sobre os números reais.

Observe também que "$\in$" é uma relação binária entre o conjunto $\mathcal{U}$ de todos os elementos, e o conjunto $\mathbb{P}(\mathcal{U})$ de todos os conjuntos; e que "$\subseteq$" é uma relação binária definida sobre o conjunto de todos os conjuntos.

### 6.1.1 Domínio e imagem

O *domínio* de uma relação $\mathcal{R}$, denotado por $\mathrm{Dom}(\mathcal{R})$, é o conjunto de todos os primeiros elementos dos pares ordenados que estão em $\mathcal{R}$. Isto é:

$$\mathrm{Dom}(\mathcal{R}) = \{\, a : (\exists b)\, (a, b) \in \mathcal{R} \,\}$$

A *imagem* ou *contra-domínio* de uma relação $\mathcal{R}$, denotado por $\mathrm{Img}(\mathcal{R})$, é o conjunto de todos os segundos elementos dos pares ordenados que estão em $\mathcal{R}$. Isto é:

$$\mathrm{Img}(\mathcal{R}) = \{\, b : (\exists a)\, (a, b) \in \mathcal{R} \,\}$$

Observe que um conjunto de pares ordenados $\mathcal{R}$ é uma relação de $A$ para $B$ se, e somente se, $\mathrm{Dom}(\mathcal{R}) \subseteq A$ e $\mathrm{Img}(\mathcal{R}) \subseteq B$.

**Exemplo 6.4:** Seja $\mathcal{R}$ a relação $\{(1, 4), (2, 5), (3, 5)\}$. Temos que $\mathrm{Dom}(\mathcal{R}) = \{1, 2, 3\}$ e $\mathrm{Img}(\mathcal{R}) = \{4, 5\}$.

**Exemplo 6.5:** Seja $\mathcal{R}$ a relação $\left\{ (x, x^2) : x \in \mathbb{Z} \right\}$. Observe que $\mathrm{Dom}(\mathcal{R})$ é o conjunto de todos os inteiros $\mathbb{Z}$, mas $\mathrm{Img}(\mathcal{R})$ é o conjunto dos quadrados perfeitos $\{0, 1, 4, 9, \ldots\}$.

**Exemplo 6.6:** Seja $A$ o conjunto dos presidentes do Brasil, de 1889 a 2010. Seja $\mathcal{R}$ a relação sobre $A$ tal que $a\mathcal{R}b$ se e somente se o presidente $b$ foi o sucessor de $a$. Assim, por exemplo, temos que 'Figueiredo' $\mathcal{R}$ 'Tancredo' e 'Fernando Henrique' $\mathcal{R}$ 'Lula', mas 'Lula' $\not\mathcal{R}$ 'Fernando Henrique'. Observe que o domínio desta relação são todos os presidentes menos Lula (que terminou o mandato em 2010), e a imagem são todos os presidentes menos Floriano Peixoto.

**Exemplo 6.7:** Seja $A = \{1, 2, 3\}$, e $\mathcal{R}$ o conjunto dos pares $(a, b)$ de $A \times A$ tais que $a < b$. Ou seja, $\mathcal{R} = \{(1, 2), (1, 3), (2, 3)\}$. Neste caso, $\mathrm{Dom}(\mathcal{R}) = \{1, 2\}$ e $\mathrm{Img}(\mathcal{R}) = \{2, 3\}$.

**Exemplo 6.8:** Seja $A$ o conjunto dos números inteiros e $\mathcal{R} = \{\, (a, b) : a\mathcal{R}b \leftrightarrow a = 2b \,\}$. Note que $\mathrm{Dom}(\mathcal{R})$ é o conjunto dos inteiros pares e $\mathrm{Img}(\mathcal{R}) = \mathbb{Z}$.

**Exemplo 6.9:** Seja $A$ o conjunto dos números reais e $\mathcal{R} = \left\{ (a, b) : a^2 + b^2 = 25 \right\}$. Neste caso $\mathrm{Dom}(\mathcal{R}) = \{\, a : -5 \leq a \leq 5 \,\}$ e $\mathrm{Img}(\mathcal{R}) = \{\, b : -5 \leq b \leq 5 \,\}$.

**Exercício 6.1:** Seja $A$ o conjunto de todas as pessoas vivas hoje. Seja $\mathcal{R}$ o conjunto de todos os pares $(p, q) \in A \times A$ tais que a pessoa $p$ é filha ou filho da pessoa $q$. Descreva os conjuntos $\mathrm{Dom}(\mathcal{R})$ e $\mathrm{Img}(\mathcal{R})$, sua intersecção $\mathrm{Dom}(\mathcal{R}) \cap \mathrm{Img}(\mathcal{R})$ e sua união $\mathrm{Dom}(\mathcal{R}) \cup \mathrm{Img}(\mathcal{R})$.

**Exercício 6.2:** Seja $\mathcal{R}$ a relação que consiste de todos os pares $(x, y)$ de números reais tais que $(x^2 - 2)^2 + y^2 = 1$. Determine Dom($\mathcal{R}$) e Img($\mathcal{R}$).

**Exercício 6.3:** Seja $A$ o conjunto dos inteiros entre 0 e 10, inclusive. Seja $\mathcal{R}$ o conjunto de todos os pares da forma $(x, x^2 - 5)$ que estão em $A \times A$. Determine Dom($\mathcal{R}$) e Img($\mathcal{R}$).

**Exercício 6.4:** Prove que, para qualquer relação $\mathcal{R}$, a imagem Img($\mathcal{R}$) é vazia se e somente se o domínio Dom($\mathcal{R}$) é vazio.

### 6.1.2 Restrição de relações

Seja $\mathcal{R}$ uma relação, e sejam $A'$ e $B'$ conjuntos quaiquer. A *restrição de $\mathcal{R}$ a $A'$ e $B'$* é o conjunto de pares de $(a, b) \in \mathcal{R}$ tais que $a \in A'$ e $b \in B'$; ou seja, $\mathcal{R} \cap A' \times B'$. A *restrição de $\mathcal{R}$ a $A'$* é geralmente entendida como $\mathcal{R} \cap A' \times A'$.

**Exemplo 6.10:** Seja $\mathcal{R}$ a relação dos inteiros positivos $\mathbb{N} \setminus \{0\}$ para os inteiros, tal que $x\mathcal{R}y$ se e somente se $x$ é divisor de $y$. A restrição de $\mathcal{R}$ aos conjuntos $U = \{0, 2, 3, 5, 6\}$ e $V = \{0, 1, 2, \ldots, 9\}$ é o conjunto de pares

$$\{(2,0), (2,2), (2,4), (2,6), (2,8), (3,0), (3,6), (3,9), (5,0), (5,5), (6,0), (6,6)\}$$

A restrição de $\mathcal{R}$ ao conjunto $U$ é

$$\{(2,0), (2,2), (2,6), (3,0), (3,3), (3,6), (5,0), (5,5), (6,0), (6,6)\}$$

É comum se usar uma relação $\mathcal{R}$ que foi definida sobre um conjunto $A$ como se fosse uma relação sobre qualquer subconjunto $A' \subset A$, quando na realidade se deveria usar a restrição de $\mathcal{R}$ a $A'$. Por exemplo, a relação '$\leq$' é definida sobre os reais $\mathbb{R}$, mas ela é frequentemente usada como se fosse também uma relação sobre os inteiros $\mathbb{Z}$, os naturais $\mathbb{N}$, ou qualquer outro subconjunto de $\mathbb{R}$. Nestes casos entende-se que a relação desejada é a restrição de '$\leq$' a estes subconjuntos.

### 6.1.3 Relações de identidade

Para qualquer conjunto $A$, a relação *identidade sobre $A$*, denotada por $\mathcal{I}_A$, é definida por

$$\mathcal{I}_A = \{(x, x) : x \in A\}$$

Esta relação nada mais é que a relação de igualdade "=", restrita ao conjunto $A$.

**Exemplo 6.11:** Se $A = \{1, 2, 3\}$ então $\mathcal{I}_A = \{(1, 1), (2, 2), (3, 3)\}$.

### 6.1.4 Relação inversa

Seja $\mathcal{R}$ uma relação do conjunto $A$ para o conjunto $B$. A *relação inversa* denotada por $\mathcal{R}^{-1}$, é a relação do conjunto $B$ para o conjunto $A$ definida da seguinte forma:

$$\mathcal{R}^{-1} = \{\, (x, y) : (y, x) \in \mathcal{R} \,\}$$

Ou seja, $\mathcal{R}^{-1}$ é a relação tal que $a\mathcal{R}^{-1}b$ se e somente se $b\mathcal{R}a$, para quaisquer $a$ e $b$. Observe que Dom($\mathcal{R}^{-1}$) = Img($\mathcal{R}$) e Img($\mathcal{R}^{-1}$) = Dom($\mathcal{R}$).

**Exemplo 6.12:** Seja $A = \{1, 2, 3\}$ e $\mathcal{R}$ a relação sobre $A$ do exemplo 6.7. A relação inversa é $\mathcal{R}^{-1} = \{(a, b) : b\mathcal{R}a\} = \{(a, b) : a \in A \wedge b \in A \wedge b < a\} = \{(2, 1), (3, 1), (3, 2)\}$. Veja que $\text{Dom}(\mathcal{R}^{-1}) = \{2, 3\}$ e $\text{Img}(\mathcal{R}^{-1}) = \{1, 2\}$.

**Exemplo 6.13:** A inversa de "$\in$", denotada por "$\ni$", é uma relação do conjunto $\mathbb{P}(\mathcal{U})$ de todos os conjuntos para o conjunto $\mathcal{U}$ de todos os elementos. A fórmula $A \ni x$ (lê-se "$A$ possui $x$", ou "$A$ tem $x$") significa a mesma coisa que $x \in A$. (Note a diferença entre "$\ni$", "$\supseteq$", e $\supset$.)

**Exercício 6.5:** Seja $\mathcal{R}$ a relação $\{(1, 4), (1, 5), (2, 5), (3, 4), (5, 5)\}$. Escreva a relação inversa $\mathcal{R}^{-1}$.

**Exercício 6.6:** Qual é inversa da relação "$<$"? E da relação "$=$"? E da relação "$\subseteq$"?

### 6.1.5 Imagem e imagem inversa de conjuntos sob uma relação

**Definição 6.1:** Sejam $\mathcal{R}$ uma relação de um conjunto $A$ para um conjunto $B$, e $X$ um conjunto qualquer. A *imagem de $X$* sob $\mathcal{R}$ é o conjunto

$$\{b : (\exists a \in X)\, (a, b) \in \mathcal{R}\}$$

A *imagem inversa* de $X$ sob $\mathcal{R}$ é o conjunto

$$\{a : (\exists b \in X)\, (a, b) \in \mathcal{R}\}$$

Observe que a imagem inversa de $X$ sob $\mathcal{R}$ é a imagem de $X$ sob a relação inversa $\mathcal{R}^{-1}$. A imagem de $X$ sob $\mathcal{R}$ costuma ser indicada por $\mathcal{R}(X)$. A imagem inversa então pode ser indicada por $\mathcal{R}^{-1}(X)$.

## 6.2 Composição de relações

Sejam $\mathcal{R}$ e $\mathcal{S}$ duas relações. A *composição de $\mathcal{R}$ com $\mathcal{S}$* é a relação denotada por $\mathcal{S} \circ \mathcal{R}$, e definida da seguinte forma:

$$\mathcal{S} \circ \mathcal{R} = \{(a, c) : (\exists b)\, (a, b) \in \mathcal{R} \wedge (b, c) \in \mathcal{S}\}$$

**Exemplo 6.14:** Considere as relações

$$\mathcal{R} = \{(1, 1), (1, 4), (2, 3), (3, 1), (3, 4)\}$$

$$\mathcal{S} = \{(1, 0), (2, 0), (3, 1), (3, 2), (4, 1)\}$$

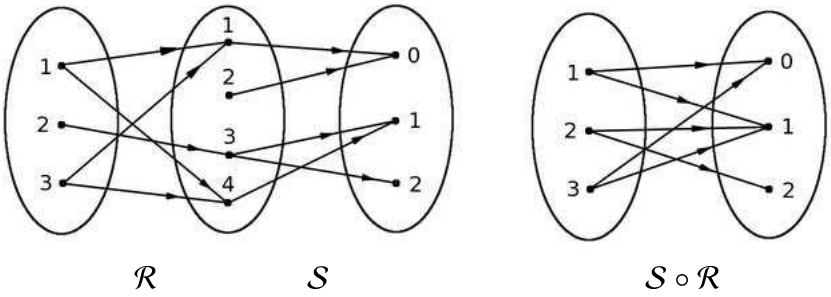
A composição delas é

$$\mathcal{S} \circ \mathcal{R} = \{(1, 0), (1, 1), (2, 1), (2, 2), (3, 0), (3, 1)\}$$

Observe que

- $(1, 0) \in \mathcal{S} \circ \mathcal{R}$ porque $(1, 1) \in \mathcal{R}$ e $(1, 0) \in \mathcal{S}$,
- $(1, 1) \in \mathcal{S} \circ \mathcal{R}$ porque $(1, 4) \in \mathcal{R}$ e $(4, 1) \in \mathcal{S}$,
- $(2, 1) \in \mathcal{S} \circ \mathcal{R}$ porque $(2, 3) \in \mathcal{R}$ e $(3, 1) \in \mathcal{S}$,

- $(2,2) \in \mathcal{S} \circ \mathcal{R}$ porque $(2,3) \in \mathcal{R}$ e $(3,2) \in \mathcal{S}$,
- $(3,0) \in \mathcal{S} \circ \mathcal{R}$ porque $(3,1) \in \mathcal{R}$ e $(1,0) \in \mathcal{S}$,
- $(3,1) \in \mathcal{S} \circ \mathcal{R}$ porque $(3,4) \in \mathcal{R}$ e $(4,1) \in \mathcal{S}$.




$\mathcal{R}$ $\mathcal{S}$ $\mathcal{S} \circ \mathcal{R}$

Figura 6.2: Composição das relações do exemplo 6.14.

**Exemplo 6.15:** Seja $\mathcal{R}$ a relação de $\mathbb{Z}$ para $\mathbb{Z}$ definida por $x\mathcal{R}y \leftrightarrow x = y + 1$. Seja $\mathcal{S}$ a relação de $\mathbb{Z}$ para $\mathbb{Z}$ definida por $y\mathcal{S}z \leftrightarrow y = 2z$. A composição $\mathcal{S} \circ \mathcal{R}$ é a relação de $\mathbb{Z}$ para $\mathbb{Z}$ definida por

$$x(\mathcal{S} \circ \mathcal{R})z \leftrightarrow (\exists y \in \mathbb{Z})\, x = y + 1 \wedge y = 2z$$

Ou seja, $x(\mathcal{S} \circ \mathcal{R})z \leftrightarrow x = 2z + 1$. Observe que $(5,2) \in \mathcal{S} \circ \mathcal{R}$, porque $(5,4) \in \mathcal{R}$ e $(4,2) \in \mathcal{S}$. Observe também que $(6,2) \notin \mathcal{S} \circ \mathcal{R}$, porque o único elemento relacionado com 6 por $\mathcal{R}$ é 5, mas $(5,2) \notin \mathcal{S}$.

**Exemplo 6.16:** Sejam $\mathcal{R}$ e $\mathcal{S}$ as mesmas relações do exemplo 6.15. A composição $\mathcal{R} \circ \mathcal{S}$ é a relação de $\mathbb{Z}$ para $\mathbb{Z}$ definida por

$$x(\mathcal{R} \circ \mathcal{S})z \leftrightarrow (\exists y \in \mathbb{Z})\, x = 2y \wedge y = z + 1$$

Ou seja, $x(\mathcal{R} \circ \mathcal{S})z \leftrightarrow x = 2z + 2$. Observe que $(5,2) \notin \mathcal{R} \circ \mathcal{S}$, mas $(6,2) \in \mathcal{R} \circ \mathcal{S}$.

Os exemplos 6.15 e 6.16 mostram que há casos em que $\mathcal{S} \circ \mathcal{R} \neq \mathcal{R} \circ \mathcal{S}$; isto é, a composição de relações não é comutativa.

Observe que, para quaisquer relações $\mathcal{R}$ e $\mathcal{S}$, temos

$$\text{Dom}(\mathcal{S} \circ \mathcal{R}) \subseteq \text{Dom}(\mathcal{R})$$

e

$$\text{Img}(\mathcal{S} \circ \mathcal{R}) \subseteq \text{Img}(\mathcal{S})$$

**Exercício 6.7:** Seja $\mathcal{R}$ o conjunto de todos os pares $(x, x^2)$ onde $x$ é um número inteiro. Seja $\mathcal{S}$ o conjunto de todos os pares $(3y, y)$ onde $y$ é um número natural. Descreva as relações $\mathcal{R} \circ \mathcal{S}$ e $\mathcal{S} \circ \mathcal{R}$.

**Exercício 6.8:** Sejam $\mathcal{R}, \mathcal{S}, \mathcal{R}$ três relações. Para cada uma das afirmações abaixo, apresente uma prova ou um contra-exemplo.

1. $(\mathcal{R} \circ \mathcal{T}) \setminus (\mathcal{S} \circ \mathcal{T}) \subseteq (\mathcal{R} \setminus \mathcal{S}) \circ \mathcal{T}$.
2. $(\mathcal{R} \setminus \mathcal{S}) \circ \mathcal{T} \subseteq (\mathcal{R} \circ \mathcal{T}) \setminus (\mathcal{S} \circ \mathcal{T})$.
3. $(\mathcal{R} \circ \mathcal{T}) \cap (\mathcal{S} \circ \mathcal{T}) \subseteq (\mathcal{R} \cap \mathcal{S}) \circ \mathcal{T}$.

4. $(\mathcal{R} \cap \mathcal{S}) \circ \mathcal{T} \subseteq (\mathcal{R} \circ \mathcal{T}) \cap (\mathcal{S} \circ \mathcal{T})$.
5. $(\mathcal{R} \circ \mathcal{T}) \cup (\mathcal{S} \circ \mathcal{T}) \subseteq (\mathcal{R} \cup \mathcal{S}) \circ \mathcal{T}$.
6. $(\mathcal{R} \cup \mathcal{S}) \circ \mathcal{T} \subseteq (\mathcal{R} \circ \mathcal{T}) \cup (\mathcal{S} \circ \mathcal{T})$.

**Exercício 6.9:** Seja $n$ um número natural, e $A$ o conjunto dos inteiros entre 1 e $n$, inclusive. Note que o conjunto $A \times A$ tem $n^2$ pares. Encontre duas relações $\mathcal{R}$ e $\mathcal{S}$ sobre $A$, cada uma com no máximo $2n$ pares, tal que $\mathcal{R} \circ \mathcal{S}$ seja o conjunto $A \times A$.

### 6.2.1 Notação alternativa

A notação $\mathcal{S} \circ \mathcal{R}$ para composição de $\mathcal{R}$ com $\mathcal{S}$ é muito comum, especialmente para funções (vide capítulo 8.1). Em algumas áreas da matemática, entretanto, a composição de uma relação $\mathcal{R}$ com uma relação $\mathcal{S}$ é denotada pela justaposição $\mathcal{RS}$. Observe que, nesta notação, a ordem das relações é oposta à da notação tradicional.

### 6.2.2 Composição com identidade

Observe que, para qualquer relação $\mathcal{R}$ de um conjunto $A$ para um conjunto $B$, as composições $\mathcal{I}_B \circ \mathcal{R}$ e $\mathcal{R} \circ \mathcal{I}_A$ são sempre a própria relação $\mathcal{R}$.

**Exemplo 6.17:** Seja $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{10, 20, 30, 40\}$ e $\mathcal{R} = \{(1, 20), (1, 30), (2, 30)\}$. Lembramos que $\mathcal{I}_A = \{(1, 1), (2, 2), (3, 3)\}$ e $\mathcal{I}_B = \{(10, 10), (20, 20), (30, 30), (40, 40)\}$. Pode-se verificar que $\mathcal{R} \circ \mathcal{I}_A = \mathcal{I}_B \circ \mathcal{R} = \{(1, 20), (1, 30), (2, 30)\}$.

### 6.2.3 Composição com a relação inversa

Considere o seguinte exemplo:

**Exemplo 6.18:** Seja $A = \{1, 2, 3\}$ e seja $\mathcal{R} = \{(1, 2), (1, 3), (2, 3)\}$, uma relação sobre $A$. Lembramos que a relação inversa $\mathcal{R}^{-1}$ é $\{(2, 1), (3, 1), (3, 2)\}$, e que $\mathcal{I}_A = \{(1, 1), (2, 2), (3, 3)\}$. Então:

- $\mathcal{R}^{-1} \circ \mathcal{R} = \{(1, 1), (1, 2), (2, 2), (2, 1)\}$.
- $\mathcal{R} \circ \mathcal{R}^{-1} = \{(2, 2), (2, 3), (3, 3), (3, 2)\}$.
- $\mathcal{R} \circ \mathcal{R} = \{(1, 3)\}$.
- $\mathcal{R}^{-1} \circ \mathcal{R}^{-1} = \{(3, 1)\}$.

Observamos que neste exemplo $\mathcal{R} \circ \mathcal{R}^{-1}$ é diferente de $\mathcal{R}^{-1} \circ \mathcal{R}$, e ambas são diferentes da identidade $\mathcal{I}_A$.

**Exercício 6.10:** Prove que, para toda relação $\mathcal{R}$, a composição $\mathcal{R}^{-1} \circ \mathcal{R}$ contém a relação de identidade sobre $\mathrm{Dom}(\mathcal{R})$; e que $\mathcal{R} \circ \mathcal{R}^{-1}$ contém a identidade sobre $\mathrm{Img}(\mathcal{R})$.

### 6.2.4 Inversa da composição

Pode-se verificar que, para quaisquer relações $\mathcal{R}$ e $\mathcal{S}$,

$$(\mathcal{S} \circ \mathcal{R})^{-1} = \mathcal{R}^{-1} \circ \mathcal{S}^{-1}$$

Ou seja, a *inversa da composição é a composição das inversas, na ordem inversa*.

**Exemplo 6.19:** Sejam as relações

$$\mathcal{R} = \{(1,20), (1,30), (2,40), (3,20)\}$$

$$\mathcal{S} = \{(20,200), (20,300), (40,200)\}$$

Observe que

- $\mathcal{S} \circ \mathcal{R} = \{((1,200), (1,300), (2,200), (3,200), (3,300)\}$.
- $\mathcal{R}^{-1} = \{(20,1), (30,1), (40,2), (20,3)\}$.
- $\mathcal{S}^{-1} = \{(200,20), (300,20), (200,40)\}$.
- $\mathcal{R}^{-1} \circ \mathcal{S}^{-1} = \{(200,1), (300,1), (200,3), (200,2), (300,3)\}$.
- $(\mathcal{S} \circ \mathcal{R})^{-1} = \{(200,1), (300,1), (200,3), (300,3), (200,2)\}$.

### 6.2.5 Composição e inclusão

O seguinte teorema decorre imediatamente das definições:

**Teorema 6.1:** Para quaisquer relações $\mathcal{R}_1, \mathcal{R}_2, \mathcal{S}_1, \mathcal{S}_2$, se $\mathcal{R}_1 \subseteq \mathcal{R}_2$ e $\mathcal{S}_1 \subseteq \mathcal{S}_2$, então $\mathcal{R}_1 \circ \mathcal{S}_1 \subseteq \mathcal{R}_2 \circ \mathcal{S}_2$.

### 6.2.6 Potências de uma relação

Seja $\mathcal{R}$ uma relação. A *potência* $\mathcal{R}^n$, $n = 1, 2, \cdots$ é definida como:

$$\begin{aligned} \mathcal{R}^1 &= \mathcal{R} \\ \mathcal{R}^{n+1} &= \mathcal{R}^n \circ \mathcal{R} \end{aligned}$$

**Teorema 6.2:** Para quaisquer relações $\mathcal{R}$ e $\mathcal{S}$, e qualquer inteiro $n \geq 1$, se $\mathcal{R} \subseteq \mathcal{S}$ então $\mathcal{R}^n \subseteq \mathcal{S}^n$.

**Prova:**

Vamos provar este teorema por indução em $n$.

- *Base*: para $n = 1$, o resultado é verdadeiro, pois $\mathcal{R}^1 = \mathcal{R} \subseteq \mathcal{S} = \mathcal{S}^1$.
- *Hipótese de indução*: vamos supor que, para algum $k \geq 1$, $\mathcal{R}^k \subseteq \mathcal{S}^k$.
- *Passo da indução*: vamos provar que $\mathcal{R}^{k+1} \subseteq \mathcal{S}^{k+1}$. Pelo teorema 6.1, concluimos que $\mathcal{R}^k \circ \mathcal{R} \subseteq \mathcal{S}^k \circ \mathcal{S}$. Pela definição de potência, $\mathcal{R}^{k+1} \subseteq \mathcal{S}^{k+1}$.

**Fim.**

**Exercício 6.11:** Demonstre que, se $\mathcal{R}$ é uma relação de $A$ para $B$, então $\mathcal{R} \circ \mathcal{I}_A = \mathcal{I}_B \circ \mathcal{R} = \mathcal{R}$.

**Exercício 6.12:** Demonstre que, para quaisquer relações $\mathcal{R}$ e $\mathcal{S}$, vale $\mathcal{R}^{-1} \circ \mathcal{S}^{-1} = (\mathcal{S} \circ \mathcal{R})^{-1}$.

**Exercício 6.13:** Demonstre que a composição de relações é associativa; isto é, que, para quaisquer três relações $\mathcal{R}$, $\mathcal{S}$ e $\mathcal{T}$, vale $\mathcal{T} \circ (\mathcal{S} \circ \mathcal{R}) = (\mathcal{T} \circ \mathcal{S}) \circ \mathcal{R}$.

**Exercício 6.14:** Demonstre que a composição de relações distribui sobre união de relações; isto é, que, para quaisquer três relações $\mathcal{R}$, $\mathcal{S}$ e $\mathcal{T}$, vale $\mathcal{T} \circ (\mathcal{R} \cup \mathcal{S}) = (\mathcal{T} \circ \mathcal{R}) \cup (\mathcal{T} \circ \mathcal{S})$, e $(\mathcal{R} \cup \mathcal{S}) \circ \mathcal{T} = (\mathcal{R} \circ \mathcal{T}) \cup (\mathcal{S} \circ \mathcal{T})$.

**Exercício 6.15:** Demonstre que para quaisquer três relações $\mathcal{R}$, $\mathcal{S}$ e $\mathcal{T}$, vale $\mathcal{T} \circ (\mathcal{R} \cap \mathcal{S}) \subseteq (\mathcal{T} \circ \mathcal{R}) \cap (\mathcal{T} \circ \mathcal{S})$. Encontre um exemplo em que não vale a igualdade; isto é, $\mathcal{T} \circ (\mathcal{R} \cap \mathcal{S}) \neq (\mathcal{T} \circ \mathcal{R}) \cap (\mathcal{T} \circ \mathcal{S})$.

**Exercício 6.16:** Prove que, para toda relação $\mathcal{R}$ e quaisquer $m$ e $n$ inteiros, $\mathcal{R}^m \circ \mathcal{R}^n = \mathcal{R}^{m+n}$.

### 6.2.7 Potências negativas de uma relação

Se $\mathcal{R}$ é uma relação, e $n$ um inteiro positivo, costuma-se definir $\mathcal{F}^{-n}$ como sendo a potência $n$ da relação inversa $\mathcal{R}^{-1}$. isto é, para todo inteiro $n > 1$, define-se

$$\mathcal{R}^{-(n-1)} = \mathcal{R}^{-n} \circ \mathcal{R}^{-1}$$

## 6.3 Tipos de relações

Nesta seção daremos algumas propriedades de relações que são importantes em muitos contextos. Seja $\mathcal{R}$ uma relação sobre um conjunto $A$. Dizemos que:

- $\mathcal{R}$ é *reflexiva* sobre $A$ se, e somente se, para todo $a \in A$ o par $(a, a)$ está em $\mathcal{R}$.
- $\mathcal{R}$ é *irreflexiva* se, e somente se, ela não possiu nenhum par da forma $(a, a)$.
- $\mathcal{R}$ é *simétrica* se, e somente se, $(\forall a, b \in A)\, a\mathcal{R}b \rightarrow b\mathcal{R}a$. Ou seja, se um par $(a, b)$ está em $\mathcal{R}$ então o par $(b, a)$ também está em $\mathcal{R}$.
- $\mathcal{R}$ é *anti-simétrica* se, e somente se, $(\forall a, b \in A)\, (a\mathcal{R}b) \wedge (b\mathcal{R}a) \rightarrow a = b$. Ou seja, para quaisquer elementos distintos $a$ e $b$ em $A$, no máximo um dos pares $(a, b)$ e $(b, a)$ está em $\mathcal{R}$.
- $\mathcal{R}$ é *transitiva* se, e somente se, $(\forall a, b, c \in A)\, (a\mathcal{R}b) \wedge (b\mathcal{R}c) \rightarrow a\mathcal{R}c$. Ou seja, se dois pares $(a, b)$ e $(b, c)$ estão em $\mathcal{R}$ então o par $(a, c)$ também está em $\mathcal{R}$.

Note que dizer que $\mathcal{R}$ é reflexiva sobre $A$ equivale a dizer que $\mathcal{I}_A \subseteq \mathcal{R}$; e dizer que $\mathcal{R}$ é irreflexiva equivale a dizer que $\mathcal{R} \cap \mathcal{I}_A = \emptyset$. Observe que há relações que não são nem reflexivas e nem irreflexivas, como por exemplo a relação $\mathcal{R}_1 = \{(1,1),(2,1),(1,2)(3,1)\}$ sobre o conjunto $A = \{1,2,3\}$. Porém, se o conjunto $A$ não é vazio, uma relação não pode ser ao mesmo tempo reflexiva sobre $A$ e irreflexiva.

Observe também que os termos simétrica e anti-simétrica não são opostos: qualquer relação de identidade, por exemplo, é ao mesmo tempo simétrica e anti-simétrica. Além disso, há relações que não são nem simétricas nem anti-simétricas. Por exemplo, a relação $\mathcal{R}_1$ acima não é simétrica, pois ela tem o par $(3,1)$ mas não tem o par $(1,3)$; e nem anti-simétrica, pois ela tem os dois pares $(2,1)$ e $(1,2)$.

Finalmente, observe que uma relação pode satisfazer qualquer uma das propriedades acima por vacuidade, se não existirem elementos em $A$ que satisfaçam as condições no lado esquerdo do conectivo '$\rightarrow$'. Por exemplo, a relação $\mathcal{R}_3 = \{(1,2)\}$ é transitiva, porque não existem $a$, $b$ e $c$ tais que $(a\mathcal{R}_3 b) \wedge (b\mathcal{R}_3 c)$.

**Exemplo 6.20:** Considere o conjunto $A = \{1,2,3,4\}$ e as seguintes relações sobre $A$:

- $\mathcal{R}_1 = \{(1,1),(1,2),(2,1),(2,2),(3,3),(3,4),(4,1),(4,4)\}$.
- $\mathcal{R}_2 = \{(1,1),(1,2),(2,1)\}$.
- $\mathcal{R}_3 = \{(1,1),(1,2),(2,1),(2,2),(3,3),(4,1),(1,4),(4,4)\}$.
- $\mathcal{R}_4 = \{(2,1),(3,1),(3,2),(4,1),(4,2),(4,3)\}$.
- $\mathcal{R}_5 = \{(1,1),(1,2),(1,3),(1,4),(2,2),(2,3),(2,4),(3,3),(3,4),(4,4)\}$.
- $\mathcal{R}_6 = \{(3,4)\}$.

- São reflexivas sobre $A$: $\mathcal{R}_1$, $\mathcal{R}_3$ e $\mathcal{R}_5$.
- São irreflexivas sobre $A$: $\mathcal{R}_4$ e $\mathcal{R}_6$.
- São simétricas: $\mathcal{R}_2$ e $\mathcal{R}_3$.
- São anti-simétricas: $\mathcal{R}_4$, $\mathcal{R}_5$ e $\mathcal{R}_6$.
- São transitivas: $\mathcal{R}_4$, $\mathcal{R}_5$ e $\mathcal{R}_6$.

**Exercício 6.17:** Prove que uma relação $\mathcal{R}$ é irreflexiva se, e somente se, ela é disjunta de $\mathcal{I}_A$ onde $A = \text{Dom}(\mathcal{R})$.

**Exercício 6.18:** Prove que uma relação $\mathcal{R}$ é simétrica se, e somente se, ela é igual à sua inversa.

**Exercício 6.19:** Prove que uma relação $\mathcal{R}$ é anti-simétrica se, e somente se, ela é disjunta de sua inversa.

**Exercício 6.20:** Seja Seja $\mathcal{R}$ uma relação simétrica e transitiva sobre $\mathbb{A}$. Prove que se para todo $x \in \mathbb{A}$ existe um $y \in \mathbb{A}$ tal que $x\mathcal{R}y$, então $\mathcal{R}$ é reflexiva.

### 6.3.1 Composição e transitividade

O próximo teorema mostra como a operação de composição se relaciona com a propriedade transitiva de uma relação.

**Teorema 6.3:** Uma relação $\mathcal{R}$ é transitiva se, e somente se $\mathcal{R} \circ \mathcal{R} \subseteq \mathcal{R}$.

**Prova:**

Seja $\mathcal{R}$ uma relação sobre um conjunto $A$. Vamos primeiro provar que, se $\mathcal{R}$ é transitiva, então $\mathcal{R} \circ \mathcal{R} \subseteq \mathcal{R}$. Seja $(a, b) \in \mathcal{R} \circ \mathcal{R}$. Pela definição de composição de relações, temos que $(\exists x)\,(a, x) \in \mathcal{R} \wedge (x, b) \in \mathcal{R}$. Como $\mathcal{R}$ é transitiva, concluimos que $(a, b) \in \mathcal{R}$. Logo $\mathcal{R} \circ \mathcal{R} \subseteq \mathcal{R}$.

Vamos provar agora que, se $\mathcal{R} \circ \mathcal{R} \subseteq \mathcal{R}$, então $\mathcal{R}$ é transitiva. Sejam $a, b, c$ três elementos de $A$. Se $(a, b) \in \mathcal{R}$ e $(b, c) \in \mathcal{R}$, então, pela definição de composição, temos que $(a, c) \in \mathcal{R} \circ \mathcal{R}$. Como $\mathcal{R} \circ \mathcal{R} \subseteq \mathcal{R}$, então $(a, c) \in \mathcal{R}$. Logo $\mathcal{R}$ é transitiva.

**Fim.**

O teorema 6.3 pode ser generalizado:

**Teorema 6.4:** Uma relação $\mathcal{R}$ é transitiva se e somente se $\mathcal{R}^n \subseteq \mathcal{R}$ para todo $n \geq 1$.

**Prova:**

Para provar a parte "somente se", basta tomar $n = 2$ e usar o teorema 6.3. Para provar a segunda parte, vamos supor que $\mathcal{R}$ é uma relação transitiva sobre um conjunto $A$, e provar que $\mathcal{R}^n \subseteq \mathcal{R}$, para todo $n \geq 1$, usando indução em $n$.

- *Base*: Para $n = 1$ a afirmação é verdadeira, pois $\mathcal{R}^1 = \mathcal{R} \subseteq \mathcal{R}$.
- *Hipótese de indução*: Vamos supor que $\mathcal{R}^k \subseteq \mathcal{R}$ para algum $k \geq 1$.
- *Passo*: Vamos demonstrar que $\mathcal{R}^{k+1} \subseteq \mathcal{R}$. Seja $(a, b) \in \mathcal{R}^{k+1}$; pela definição de potência, $(a, b) \in \mathcal{R}^k \circ \mathcal{R}$. Pela definição de composição, temos que $(\exists x \in A)\,(a, x) \in \mathcal{R} \wedge (x, b) \in \mathcal{R}^k$. Pela hipótese de indução, $\mathcal{R}^k \subseteq \mathcal{R}$, portanto $(x, b) \in \mathcal{R}$. Como $\mathcal{R}$ é transitiva, temos que $(a, b) \in \mathcal{R}$.

**Fim.**

O que este teorema nos diz é que as potências de uma relação transitiva são subconjuntos da relação. Portanto se verificarmos que $\mathcal{R}^n \not\subseteq \mathcal{R}$, para algum $n \geq 1$, podemos concluir que a relação não é transitiva.

**Exercício 6.21:** Demonstre a afirmação, ou encontre um contra-exemplo: "Se $\mathcal{R}^4 \subseteq \mathcal{R}$, então $\mathcal{R}$ é transitiva."

## 6.4 Representação de relações usando matrizes

### 6.4.1 Matriz booleana de uma relação

Uma *matriz booleana* é uma matriz cujos elementos são valores lógicos, **F** ou **V**. Ao escrever tais matrizes, é conveniente usar 0 e 1, respectivamente, para indicar esses valores.

Sejam $A = \{a_1, a_2, \cdots, a_m\}$ e $B = \{b_1, b_2, \cdots, b_n\}$ conjuntos finitos com $|A| = m$ , $|B| = n$ e $\mathcal{R}$ uma relação de $A$ para $B$. Uma maneira de representar esta relação é através de uma matriz booleana $M$ de $m$ linhas e $n$ colunas definida da seguinte maneira:

$$M_{i,j} = \begin{cases} 1 & \text{se } a_i \mathcal{R} b_j \\ 0 & \text{se } a_i \not\mathcal{R} b_j \end{cases}$$

Observe que a matriz $M$ depende da escolha dos conjuntos $A$ e $B$, e também da ordem em que listamos seus elementos.

**Exemplo 6.21:** Seja $\mathcal{R}$ a relação $\{(20,20),(30,20),(30,30)\}$. Se escolhermos $A = \{10,20,30,40\}$ e $B = \{10,20,30\}$, listados nessa ordem, a matriz da relação será

$$M = \left(\begin{array}{c|ccc} & 10 & 20 & 30 \\ \hline 10 & 0 & 0 & 0 \\ 20 & 0 & 1 & 0 \\ 30 & 0 & 1 & 1 \\ 40 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

**Composição de relações.** A composição de relações também pode ser entendida em termos de matrizes. Sejam $\mathcal{R}$ uma relação de $A = \{a_1, a_2, \ldots a_m\}$ para $B = \{b_1, b_2, \ldots b_n\}$, e $\mathcal{S}$ uma relação de $B = \{b_1, b_2, \ldots b_n\}$ para $C = \{c_1, c_2, \ldots c_p\}$, com matrizes booleanas $M$ $(m \times n)$ e $N$ $(n \times p)$, respectivamente. Pela definição, a matriz $P$ que representa a composição $\mathcal{S} \circ \mathcal{R}$ é tal que $P_{i,j} = 1$ se e somente se existe um inteiro $k \in \{1, 2, \ldots, n\}$ tal que $M_{i,k} = 1$ e $N_{k,j} = 1$. Ou seja,

$$P_{i,j} = (M_{i,1} \wedge N_{1,j}) \vee (M_{i,2} \wedge N_{2,j}) \vee \cdots \vee (M_{i,n} \wedge N_{n,j})$$

que como veremos na seção 9.8, pode ser escrita mais sucintamente como

$$P_{i,j} = \bigvee_{k=1}^{n} M_{i,k} \wedge N_{k,j}.$$

Note a semelhança entre esta fórmula e a fórmula do produto de duas matrizes ordinárias,

$$P_{i,j} = \sum_{k=1}^{n} M_{i,k} \cdot N_{k,j}.$$

Concluimos que a composição de uma relação $\mathcal{R}$ com uma relação $\mathcal{S}$ corresponde ao produto $MN$ das respectivas matrizes booleanas $M$ e $N$, no sentido da álgebra de matrizes; exceto que o produto "$\cdot$" de dois números é substituído pela conjunção "$\wedge$", e a soma de números "$+$" é substituída pela disjunção "$\vee$". Observe que a ordem em que as matrizes devem ser multiplicadas é oposta à ordem usada na notação $\mathcal{S} \circ \mathcal{R}$.

**Exemplo 6.22:** Sejam $A = \{10, 20, 30, 40\}$, $B = \{20, 40, 60\}$, e $C = \{35, 55, 75, 95\}$. Sejam

$$\mathcal{R} = \{(10, 20), (10, 60), (20, 40), (40, 60)\}$$

$$\mathcal{S} = \{(20, 35), (20, 55), (40, 55), (40, 75), (60, 95)\}$$

As matrizes booleanas que representam $\mathcal{R}$, $\mathcal{S}$ e $\mathcal{S} \circ \mathcal{R}$ são

$$M = \left(\begin{array}{c|ccc} & 20 & 40 & 60 \\ \hline 10 & 1 & 0 & 1 \\ 20 & 0 & 1 & 0 \\ 30 & 0 & 0 & 0 \\ 40 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \quad N = \left(\begin{array}{c|cccc} & 35 & 55 & 75 & 95 \\ \hline 20 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 40 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 60 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \quad MN = \left(\begin{array}{c|cccc} & 35 & 55 & 75 & 95 \\ \hline 10 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 20 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 30 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 40 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

### 6.4.2 Operações com relações usando matrizes

A representação por matrizes também pode ser usada para visualizar operações entre relações.

**União de relações.** Sejam $\mathcal{R}$ e $\mathcal{S}$ duas relações de um conjunto $A$ para um conjunto $B$, com matrizes booleanas $M$ e $N$, respectivamente. A matriz booleana $P$ que representa a união $\mathcal{R} \cup \mathcal{S}$ é tal que $P_{i,j} = 1$ se, e somente se, $M_{i,j} = 1$ ou $N_{i,j} = 1$. Ou seja, $P_{i,j} = M_{i,j} \vee N_{i,j}$. Podemos denotar essa matriz por $M \vee N$.

**Intersecção de relações.** Analogamente, a matriz $Q$ que representa a interseção $\mathcal{R} \cap \mathcal{S}$ é tal que $Q_{i,j} = 1$ se e somente se $M_{i,j} = 1$ e $N_{i,j} = 1$; ou seja $Q_{i,j} = M_{i,j} \wedge N_{i,j}$. Podemos denotar essa matriz por $M \wedge N$.

**Exemplo 6.23:** Sejam $A = \{10, 20, 30, 40\}$ e $B = \{20, 40, 60\}$, e sejam

$$\mathcal{R} = \{(10, 20), (10, 60), (20, 40), (40, 60)\}$$

$$\mathcal{S} = \{(10, 20), (20, 60), (30, 40), (40, 20)\}$$

As matrizes booleanas que representam $\mathcal{R}$, $\mathcal{S}$, $\mathcal{R} \cup \mathcal{S}$ e $\mathcal{R} \cap \mathcal{S}$ são

$$M = \left(\begin{array}{c|ccc} & 20 & 40 & 60 \\ \hline 10 & 1 & 0 & 1 \\ 20 & 0 & 1 & 0 \\ 30 & 0 & 0 & 0 \\ 40 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \quad N = \left(\begin{array}{c|ccc} & 20 & 40 & 60 \\ \hline 10 & 1 & 0 & 0 \\ 20 & 0 & 0 & 1 \\ 30 & 0 & 1 & 0 \\ 40 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$$M \vee N = \left(\begin{array}{c|ccc} & 20 & 40 & 60 \\ \hline 10 & 1 & 0 & 1 \\ 20 & 0 & 1 & 1 \\ 30 & 0 & 1 & 0 \\ 40 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right) \quad M \wedge N = \left(\begin{array}{c|ccc} & 20 & 40 & 60 \\ \hline 10 & 1 & 0 & 0 \\ 20 & 0 & 0 & 0 \\ 30 & 0 & 0 & 0 \\ 40 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

### 6.4.3 Propriedades de relações usando matrizes

Seja $\mathcal{R}$ uma relação sobre um conjunto finito $A$. Se matriz quadrada $M$ que representa essa relação tem a mesma ordem para linhas e colunas, várias propriedades da relação $\mathcal{R}$ podem ser facilmente verificadas na matriz $M$:

1. Uma relação $\mathcal{R}$ é reflexiva sobre $A$ se, e somente se $(\forall i \in \{1, 2, \cdots, n\})\, a_i \mathcal{R} a_i$. Portanto $\mathcal{R}$ é reflexiva sobre $A$ e somente se $(\forall i \in \{1, 2, \cdots, n\})\, M_{i,i} = 1$; isto é, os elementos da diagonal de $M$ são todos 1.

2. Uma relação $\mathcal{R}$ é irrreflexiva sobre $A$ se, e somente se $(\forall i \in \{1, 2, \cdots, n\})\, a_i \not\mathcal{R}\, a_i$. Portanto $\mathcal{R}$ é irrreflexiva sobre $A$ e somente se os elementos da diagonal de $M$ são todos 0.

3. Uma relação $\mathcal{R}$ é simétrica se, e somente se $(\forall i, j \in \{1, 2, \cdots, n\})\, a_i \mathcal{R} a_j \leftrightarrow a_j \mathcal{R} a_i$. Portanto $\mathcal{R}$ é simétrica se, e somente se, a matriz $M$ é simétrica, ou seja, ela é igual à sua transposta.

4. Uma relação $\mathcal{R}$ é anti-simétrica se, e somente se $(\forall i, j \in \{1, 2, \cdots, n\})\, (a_i \mathcal{R} a_j \wedge a_j \mathcal{R} a_i) \rightarrow a_i = a_j$. Portanto $\mathcal{R}$ é anti-simétrica se, e somente se não existem índices $i$ e $j$ com $i \neq j$ tais que $M_{i,j}$ e $M_{j,i}$ são simultaneamente iguais a 1.

Note que, no caso de uma relação anti-simétrica os elementos da diagonal são arbitrários. Note também que esta definição não corresponde ao conceito de "matriz anti-simétrica" da álgebra linear. Essa definição exige $M_{i,j} = -M_{j,i}$ o que implica que a diagonal é nula ($M_{i,i} = 0$).

**Exemplo 6.24:** Seja $\mathcal{R}$ uma relação sobre um conjunto $A = \{a_1, a_2, a_3\}$ cuja matriz é

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Observe que:

- $\mathcal{R}$ é reflexiva sobre $A$ pois $m_{i,i} = 1$ para todo $i$.
- $\mathcal{R}$ é simétrica pois $M$ é simétrica.
- $\mathcal{R}$ não é anti-simétrica pois $m_{1,2} = m_{2,1} = 1$.

## 6.5 Fechos de uma relação

### 6.5.1 Fecho reflexivo

Seja $\mathcal{R}$ uma relação sobre um conjunto $A$. Se $\mathcal{R}$ não é reflexiva sobre $A$, é porque não possui um ou mais pares da forma $(a, a)$ com $a \in A$. Se acrescentarmos todos esses pares a $\mathcal{R}$, obtemos uma relação $\mathcal{S}$ que é reflexiva sobre $A$ e contém $\mathcal{R}$. Essa relação é chamada de *fecho reflexivo de $\mathcal{R}$ sobre $A$*.

**Exemplo 6.25:** Sejam $A = \{a, b, c\}$ e $\mathcal{R} = \{(a, a), (a, b), (b, a), (c, b)\}$. A relação $\mathcal{S} = \{(a, a), (a, b), (b, a), (c, b), (b, b), (c, c)\}$ é o fecho reflexivo de $\mathcal{R}$ sobre $A$.

**Exemplo 6.26:** Seja a relação $\mathcal{R} = \{(a, b) : a, b \in \mathbb{Z} \wedge a < b\}$ sobre o conjunto dos números inteiros $\mathbb{Z}$. O fecho reflexivo $\mathcal{S}$ é obtido incluindo na relação $\mathcal{R}$ todos os pares $\{(a, a) : a \in \mathbb{Z}\}$. Ou seja, o fecho reflexivo de $\mathcal{R}$ sobre $\mathbb{Z}$ é

$$\mathcal{S} = \{(a, b) : a, b \in \mathbb{Z} \wedge a \leq b\}$$

Observe que o fecho reflexivo pode ser escrito como $\mathcal{R} \cup \mathcal{I}_A$. Observe também que qualquer outra relação $\mathcal{T}$ que é reflexiva sobre $A$ e contém $\mathcal{R}$ deve conter $\mathcal{I}_A$, e portanto contém $\mathcal{I}_A \cup \mathcal{R} = \mathcal{S}$.

### 6.5.2 Fecho simétrico

De maneira análoga, se $\mathcal{R}$ é uma relação qualquer, obtemos seu *fecho simétrico* acrescentando a $\mathcal{R}$ todos os pares necessários para torná-la uma relação simétrica; isto é, todo par da forma $(b, a)$ tal que $(a, b) \in \mathcal{R}$.

**Exemplo 6.27:** Sejam $A = \{a, b, c\}$ e $\mathcal{R} = \{(a, a), (a, b), (b, b), (b, c), (c, a), (c, b)\}$. A relação $\mathcal{S} = \{(a, a), (a, b), (b, a), (b, b), (c, a), (a, c), (b, c), (c, b)\}$ é o fecho simétrico de $\mathcal{R}$.

**Exemplo 6.28:** Seja a relação $\mathcal{R} = \{(a, b) : a, b \in \mathbb{Z} \wedge a < b\}$ sobre o conjunto dos números inteiros $\mathbb{Z}$. O fecho simétrico $\mathcal{S}$ é obtido incluindo na relação $\mathcal{R}$ todos os pares

$$\{(b, a) : a, b \in \mathbb{Z} \wedge a > b\}$$

. Ou seja, o fecho simétrico de $\mathcal{R}$ é

$$\mathcal{S} = \{(a, b) : a, b \in \mathbb{Z} \wedge a \neq b\}$$

Observe que o fecho simétrico é simplesmente $\mathcal{R} \cup \mathcal{R}^{-1}$. Observe também que, como no caso do fecho reflexivo, qualquer outra relação simétrica $\mathcal{T}$ que contém $\mathcal{R}$ deve conter $\mathcal{R}^{-1}$, e portanto contém seu fecho simétrico $\mathcal{R} \cup \mathcal{R}^{-1}$.

### 6.5.3 Fecho transitivo

Vamos agora considerar o problema análogo de completar uma relação $\mathcal{R}$, se necessário, de modo a torná-la transitiva. Para isso, precisamos garantir que, para quaisquer pares $(a, b)$ e $(b, c)$ na relação, o par $(a, c)$ também está na relação.

Podemos pensar que basta examinar todos os pares $(a, c)$ e $(b, c)$ que estão na relação dada $\mathcal{R}$. Entretanto, isso não é suficiente. Por exemplo, considere a relação

$$\mathcal{R} = \{(1, 2), (2, 3), (3, 4)\}$$

Esta relação falha a definição de relação transitiva em exatamente dois casos:

$$(1, 2) \in \mathcal{R} \wedge (2, 3) \in \mathcal{R} \quad \text{mas} \quad (1, 3) \notin \mathcal{R}$$
$$(2, 3) \in \mathcal{R} \wedge (3, 4) \in \mathcal{R} \quad \text{mas} \quad (2, 4) \notin \mathcal{R}$$

Se acrescentarmos os pares $(1, 3)$ e $(2, 4)$, obtemos a relação

$$\mathcal{R}' = \{(1, 2), (1, 3), (2, 3), (2, 4), (3, 4)\}$$

Mas esta relação ainda não é transitiva; pois ela possui $(1,3)$ e $(3,4)$ mas não possui $(1,4)$. Observe que esta falha de transitividade foi revelada quando acrescentamos o par $(1,3)$ à relação.

Se acrescentarmos o par que falta, $(1,4)$, obtemos

$$\mathcal{R}'' = \{(1,2),(1,3),(1,4),(2,3),(2,4),(3,4)\}$$

que é transitiva.

Os pares que faltam em $\mathcal{R}$ são da forma $(a,c)$ tais que existe algum $b$ com $(a,b) \in \mathcal{R}$ e $(b,c) \in \mathcal{R}$. Ou seja, são os pares de $\mathcal{R} \circ \mathcal{R} = \mathcal{R}^2$. Portanto, ao acrescentarmos esses pares estamos construindo a relação $\mathcal{R}' = \mathcal{R} \cup \mathcal{R}^2$. Pela mesma razão, os pares que ainda faltam em $\mathcal{R}'$ estão na relação $\mathcal{R}' \circ \mathcal{R}' = (\mathcal{R} \cup \mathcal{R}^2)^2$, que (pelo exercício 6.14) é a relação $\mathcal{R}^2 \cup \mathcal{R}^3 \cup \mathcal{R}^4$. Portanto, acrescentando esses pares obtemos $\mathcal{R}'' = \mathcal{R} \cup \mathcal{R}^2 \cup \mathcal{R}^3 \cup \mathcal{R}^4$. No próximo passo, obtemos $\mathcal{R} \cup \mathcal{R}^2 \cup \cdots \cup \mathcal{R}^7 \cup \mathcal{R}^8$. E assim por diante.

Por estas considerações, o *fecho transitivo* de $\mathcal{R}$, denotado por $\mathcal{R}^*$ é definido como sendo a união de todas as potências de $\mathcal{R}$, isto é

$$\mathcal{R}^* = \mathcal{R} \cup \mathcal{R}^2 \cup \mathcal{R}^3 \cup \cdots \tag{6.1}$$

Como veremos na seção 9.8, esta fórmula pode ser escrita mais sucintamente da seguinte maneira

$$\mathcal{R}^* = \bigcup_{k=1}^{\infty} \mathcal{R}^k \tag{6.2}$$

Ou seja, um par $(a,b)$ está em $\mathcal{R}^*$ se, e somente se, existe um inteiro $k \geq 1$ tal que $(a,b) \in \mathcal{R}^k$.

Se $\mathcal{R}$ é uma relação sobre um conjunto *finito* $A$, a união eventualmente deixa de crescer após um número finito de termos; pois os pares que podem ser acrescentados pertencem ao conjunto $A \times A$, que é finito. Pode-se mostrar que, se $A$ tem $n$ elementos, o processo termina com o termo $\mathcal{R}^n$, no máximo. Nesse caso, a relação $\mathcal{R}^*$ assim obtida é uma relação transitiva, por construção.

No caso de $A$ ser finito, também podemos escrever a fórmula (6.2) em termos das matrizes booleanas. Se $M$ é a matriz de $\mathcal{R}$, a matriz $M^*$ de $\mathcal{R}^*$ é dada pela fórmula

$$M^* = \bigvee_{k=1}^{n} M^k = M \vee M^2 \vee M^3 \vee \cdots \vee M^n \tag{6.3}$$

Caso o conjunto $A$ seja infinito, o processo pode nunca terminar: após cada acréscimo de pares que faltam podem surgir novos casos de falha de transitividade. Nesse caso, a união (6.2) precisa incluir todas as potências de $\mathcal{R}$. Precisamos então provar o seguinte resultado:

**Teorema 6.5:** Para qualquer relação $\mathcal{R}$, a relação $\mathcal{R}^*$ é transitiva.

**Prova:**

Sejam $a, b, c$ elementos tais que $(a,b)$ e $(b,c)$ estão em $\mathcal{R}^*$. Precisamos provar que $(a,c)$ também está em $\mathcal{R}^*$.

Pela definição de $\mathcal{R}^*$, existem inteiros $i \geq 1$ e $j \geq 1$ tais que $(a,b) \in \mathcal{R}^i$ e $(b,c) \in \mathcal{R}^j$. Portanto $(a,c)$ está na composição $\mathcal{R}^j \circ \mathcal{R}^i$, que, pelo exercício 6.16, é igual a $\mathcal{R}^{i+j}$. Portanto o par $(a,c)$ também está em $\mathcal{R}^*$.

**Fim.**

Por outro lado, o teorema a seguir mostra que o fecho transitivo $\mathcal{R}^*$ calculado pela fórmula (6.2) não tem nenhum par supérfluo:

**Teorema 6.6:** Para qualquer relação $\mathcal{R}$, qualquer relação transitiva que contém $\mathcal{R}$ contém o fecho transitivo $\mathcal{R}^*$ de $\mathcal{R}$.

**Prova:**

Seja $\mathcal{R}$ uma relação qualquer, e seja $\mathcal{S}$ uma relação que contém $\mathcal{R}$. Pelo teorema 6.2, para todo $n \geq 1$, temos que $\mathcal{R}^n \subseteq \mathcal{S}^n$. Pelo teorema 6.4, temos que $\mathcal{S}^n = \mathcal{S}$; logo $\mathcal{R}^n \subseteq \mathcal{S}$. Uma vez que todos os termos da fórmula (6.2) estão contidos em $\mathcal{S}$, então a união de todos esses termos $\mathcal{R}^*$ também está.

**Fim.**

Os dois teoremas acima implicam que o fecho transitivo $\mathcal{R}^*$ definido pela fórmula (6.2) é a *única* relação transitiva que contém $\mathcal{R}$ e está contida em qualquer relação transitiva que contém $\mathcal{R}$. Portanto ela é também a menor relação transitiva que contém $\mathcal{R}$.

### 6.5.4 Fecho em geral

De maneira geral, sejam $\mathcal{R}$ uma relação em um conjunto $A$, **P** uma propriedade de relações, e $\mathcal{S}$ uma relação em $A$ com a propriedade **P**. Dizemos que $\mathcal{S}$ é o *fecho* da relação $\mathcal{R}$ com respeito à *propriedade* **P**, se $\mathcal{S}$ contém $\mathcal{R}$ e está contida em toda relação que possui a propriedade $P$ e contém $\mathcal{R}$.

Em outras palavras, $\mathcal{S}$ é o fecho de $\mathcal{R}$ com respeito à propriedade **P** se

- $\mathcal{R} \subseteq \mathcal{S}$.
- $\mathcal{S}$ satisfaz a propriedade **P**.
- Para toda relação $\mathcal{T}$ em $A$, se $\mathcal{R} \subseteq \mathcal{T}$ e $\mathcal{T}$ satisfaz a propriedade **P**, então $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{T}$.

A relação $\mathcal{R}$ pode ter ou não ter a propriedade **P**. Se $\mathcal{R}$ tiver a propriedade **P** então $\mathcal{R} = \mathcal{S}$.

O fecho de uma relação com respeito a uma determinada propriedade pode ou não existir. Veja o exemplo a seguir:

**Exemplo 6.29:** Sejam $A = \{1, 2, 3\}$, $\mathcal{R} = \{(1, 1), (1, 2), (2, 2), (3, 3)\}$ e $\mathbf{P}(\mathcal{R})$ = "$\mathcal{R}$ não é reflexiva sobre $A$". Observe que qualquer relação contendo $\mathcal{R}$ conterá $\{(1, 1), (2, 2), (3, 3)\}$, portanto não existe nenhuma relação, que não seja reflexiva sobre $A$, e contenha $\mathcal{R}$.

Neste exemplo, o fecho não existe porque é impossível completar $\mathcal{R}$ de modo a satisfazer **P**. No exemplo abaixo, o fecho não existe porque há duas ou mais maneiras de fazer isso, mas elas são incompatíveis:

**Exemplo 6.30:** Sejam $A = \{1, 2\}$, $\mathcal{R} = \{(1, 1), (2, 2)\}$ e $\mathbf{P}(\mathcal{R})$ = "$\mathcal{R}$ tem 3 pares". As duas relações $\mathcal{S}_1 = \{(1, 1), (1, 2), (2, 2)\}$ e $\mathcal{S}_2 = \{(1, 1), (2, 1), (2, 2)\}$ são relações que satisfazem a propriedade $\mathbf{P}$ e contém $\mathcal{R}$; porém, a única relação $\mathcal{S}$ que está contida em $\mathcal{S}_1$ e em $\mathcal{S}_2$ e contém $\mathcal{R}$ é a própria relação $\mathcal{R}$, que não satisfaz $\mathbf{P}$.

**Exercício 6.22:** Encontre os fechos reflexivo, simétrico e transitivo das seguintes relações:

- $A = \{a, b, c\}$ e $\mathcal{R} = \{(a, a), (a, b), (b, c), (c, b)\}$.
- $A = \{0, 1, 2, 3\}$ e $\mathcal{R} = \{(0, 1), (1, 1), (1, 2), (2, 0), (2, 2), (3, 0)\}$.

**Exercício 6.23:** Sejam $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ e $\mathcal{R} = \{(1, 3), (2, 4), (3, 1), (3, 5), (4, 3), (5, 1), (5, 2), (5, 4)\}$. Encontre as potências $\mathcal{R}^2$, $\mathcal{R}^3$, $\mathcal{R}^4$, $\mathcal{R}^5$, $\mathcal{R}^6$ e o fecho transitivo $\mathcal{R}^*$.

**Exercício 6.24:** Seja $A = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$. Encontre a menor relação contendo a relação $\mathcal{R} = \{(1, 2), (1, 4), (3, 3), (4, 1)\}$ que é:

- Simétrica e reflexiva sobre $A$.
- Reflexiva sobre $A$ e transitiva.
- Simétrica e transitiva.
- Reflexiva sobre $A$, simétrica e transitiva.

**Exercício 6.25:** Sejam $\mathcal{R}_1$ e $\mathcal{R}_2$ relações sobre o conjunto $A$, tais que $\mathcal{R}_1 \subseteq \mathcal{R}_2$.

- Sejam $\mathcal{S}_1$ e $\mathcal{S}_2$ os fechos reflexivos de $\mathcal{R}_1$ e $\mathcal{R}_2$, respectivamente. Prove que $\mathcal{S}_1 \subseteq \mathcal{S}_2$.
- Enuncie os teoremas análogos para os fechos simétricos e transitivos. Prove esses teoremas, ou encontre contra-exemplos.

**Exercício 6.26:** Sejam $\mathcal{R}_1$ e $\mathcal{R}_2$ relações sobre o conjunto $A$, e $\mathcal{R} = \mathcal{R}_1 \cup \mathcal{R}_2$.

- Sejam $\mathcal{S}_1$, $\mathcal{S}_2$ e $\mathcal{S}$ os fechos reflexivos de $\mathcal{R}_1$, $\mathcal{R}_2$ e $\mathcal{R}$, respectivamente. Prove que $\mathcal{S}_1 \cup \mathcal{S}_2 = \mathcal{S}$.
- Sejam $\mathcal{S}_1$, $\mathcal{S}_2$ e $\mathcal{S}$ os fechos simétricos de $\mathcal{R}_1$, $\mathcal{R}_2$ e $\mathcal{R}$, respectivamente. Prove que $\mathcal{S}_1 \cup \mathcal{S}_2 = \mathcal{S}$.
- Sejam $\mathcal{S}_1$, $\mathcal{S}_2$ e $\mathcal{S}$ os fechos transitivos de $\mathcal{R}_1$, $\mathcal{R}_2$ e $\mathcal{R}$, respectivamente. Prove que $\mathcal{S}_1 \cup \mathcal{S}_2 \subseteq \mathcal{S}$, e encontre um exemplo em que a inclusão é própria.

**Exercício 6.27:** Sejam $\mathcal{R}_1$ e $\mathcal{R}_2$ relações sobre o conjunto $A$, e $\mathcal{R} = \mathcal{R}_1 \cap \mathcal{R}_2$.

- Sejam $\mathcal{S}_1$, $\mathcal{S}_2$ e $\mathcal{S}$ os fechos reflexivos de $\mathcal{R}_1$, $\mathcal{R}_2$ e $\mathcal{R}$, respectivamente. Prove que $\mathcal{S} = \mathcal{S}_1 \cap \mathcal{S}_2$.
- Sejam $\mathcal{S}_1$, $\mathcal{S}_2$ e $\mathcal{S}$ os fechos simétricos de $\mathcal{R}_1$, $\mathcal{R}_2$ e $\mathcal{R}$, respectivamente. Prove que $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{S}_1 \cap \mathcal{S}_2$, e mostre com um exemplo que a inclusão pode ser própria.
- Sejam $\mathcal{S}_1$, $\mathcal{S}_2$ e $\mathcal{S}$ os fechos transitivos de $\mathcal{R}_1$, $\mathcal{R}_2$ e $\mathcal{R}$, respectivamente. Prove que $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{S}_1 \cap \mathcal{S}_2$, e mostre com um exemplo que a inclusão pode ser própria.

**Exercício 6.28:** Seja $\mathcal{R}$ a relação sobre o conjunto dos números inteiros positivos tal que $a\mathcal{R}b$ se e somente se existe um número primo $p$ tal que $a = pb$. Qual é o fecho reflexivo de $\mathcal{R}$? Qual é o fecho transitivo de $\mathcal{R}$? Qual é o fecho transitivo e reflexivo?

## 6.6 Relações $n$-árias

### 6.6.1 Definição

Sejam $A_1, A_2, A_3, \ldots, A_n$, conjuntos. Uma *relação n-ária entre* estes conjuntos é um sub-conjunto $\mathcal{R}$ de $A_1 \times A_2 \times A_3 \times \cdots \times A_n$. Isto é, um elemento de $\mathcal{R}$ é uma $n$-upla $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$, tal que $a_i \in A_i$ para cada $i$.

O inteiro $n$ é chamado de *grau* ou *ordem* da relação. Para $n \geq 2$ usam-se os nome *binária*, *ternária*, *quaternária.*, etc. O *i-ésimo domínio* da relação é o conjunto $\mathrm{Dom}_i(\mathcal{R})$ de todos os elementos de $A_i$ que ocorrem na posição $i$ das suas $n$-uplas. Ou seja, um elemento $x$ pertence a $\mathrm{Dom}_i(\mathcal{R})$ se, e somente se, existe uma $n$-upla $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ em $\mathcal{R}$ com $a_i = x$.

**Exemplo 6.31:** Seja $\mathcal{R}$ a relação em $\mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ definida pelo conjunto das triplas $(a, b, c)$ tais que $a = b = c$. Observe que a tripla $(2, 2, 2) \in \mathcal{R}$, mas a tripla $(-2, 3, 3) \notin \mathcal{R}$. Os dominios $\mathrm{Dom}_1(\mathcal{R})$, $\mathrm{Dom}_2(\mathcal{R})$ e $\mathrm{Dom}_3(\mathcal{R})$ são o conjunto dos números reais, e o grau de $\mathcal{R}$ é 3.

**Exemplo 6.32:** Seja $\mathcal{R}$ a relação em $\mathbb{N} \times \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ definida pelo conjunto das triplas $(a, b, c)$ tais que $a^2 + b^2 = c^2$, $a > 0$ e $b > 0$. Observe que a tripla $(3, 4, 5) \in \mathcal{R}$ mas a tripla $(2, 2, 3) \notin \mathcal{R}$. Pode-se verificar que $\mathrm{Dom}_1(\mathcal{R}) = \mathrm{Dom}_2(\mathcal{R}) = \mathbb{N} \setminus \{1, 2\}$, e que os menores elementos de $\mathrm{Dom}_3(\mathcal{R})$ são $\{5, 10, 13, 17, 20, 25, 26, 29, \ldots\}$.

**Exemplo 6.33:** Seja $\mathcal{R}$ a relação em $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ definida pelo conjunto das quádruplas $(a, b, q, r)$ tais que $a = b * q + r$. Observe que a quádrupla $(7, 3, 2, 1)$ está em $\mathcal{R}$ mas a quádrupla $(3, 7, 2, 1)$ não está.

### 6.6.2 Projeção

Seja $\mathcal{R}$ uma relação $n$-ária e sejam $i_1, i_2, \ldots, i_m$ inteiros distintos entre 1 e $n$. A *projeção de $\mathcal{R}$ sobre as componentes* $i_1, i_2, \ldots, i_m$ é a relação $m$-ária $\mathcal{S}$ tal que uma $m$-upla $(b_1, b_2, \ldots, b_m)$ está em $\mathcal{S}$ se e somente se existe uma $n$-upla $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ em $\mathcal{R}$ tal que $b_1 = a_{i_1}$, $b_2 = a_{i_2}$, $\ldots$, $b_m = a_{i_m}$.

**Exemplo 6.34:** Seja $\mathcal{R} \subseteq \mathbb{N} \times \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ a relação ternária formada pelas triplas

$$\{(1, 10, 200), (1, 20, 200), (2, 20, 200), (2, 30, 100), (3, 30, 300)\}.$$

Eis algumas projeções dessa relação sobre diversas listas de componentes:

- Sobre 2 e 3: $\{(10, 200), (20, 200), (30, 100), (30, 300)\}$
- Sobre 1 e 3: $\{(1, 200), (2, 200), (2, 100), (3, 300)\}$
- Sobre 1 e 2: $\{(1, 10), (1, 20), (2, 20), (2, 30), (3, 30)\}$
- Sobre 2 e 1: $\{(10, 1), (20, 1), (20, 2), (30, 2), (30, 3)\}$
- Sobre 1, 2 e 3: $\{(1, 10, 200), (1, 20, 200), (2, 20, 200), (2, 30, 100), (3, 30, 300)\} = \mathcal{R}$

**Exemplo 6.35:** Seja $\mathcal{R} \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ a relação ternária que consiste de todas as triplas $(a, b, c)$ tais que $a^2 + b^2 + c^2 = 1$ — isto é, todos os pontos da superfície da esfera de raio 1 e centro na origem do $\mathbb{R}^3$. A projeção de $\mathcal{R}$ sobre as componentes 1 e 3 é o conjunto $\mathcal{S}$ de todos os pares $(a, c) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ tais que $(\exists b \in \mathbb{R})\, a^2 + b^2 + c^2 = 1$. Pode-se verificar que $\mathcal{S} = \left\{ (a, c) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} : a^2 + c^2 \leq 1 \right\}$, ou seja, o disco de raio 1 e centro na origem do plano $\mathbb{R}^2$.

Observe que a ordem dos índices $i_1, i_2, \ldots, i_m$ é importante. Observe também que, se $m = n$ e os índices forem $1, 2, \ldots, n$, a operação não tem efeito — o resultado é a própria relação $\mathcal{R}$.

Um caso muito comum é a eliminação de uma determinada componente $j$ mantendo a ordem das demais, como no exemplo 6.35. Nesse caso, $m = n - 1$ e os índices $i_1, i_2, \ldots, i_m$ são $1, 2, \ldots, j-1, j+1, \ldots, n$.

### 6.6.3 Permutação de componentes

Para relações binárias temos o conceito de relação inversa em que é trocada a ordem das duas componentes de cada par. Sua generalização para relaçoes $n$-árias é a operação de *permutação de componentes*, que rearranja a ordem das componentes de todas as $n$-uplas, da mesma maneira.

Mais precisamente, dada uma relação $n$-ária $\mathcal{R}$ e uma permutação $i_1, i_2, \ldots, i_n$ dos inteiros $1, 2, \ldots, n$, esta operação produz a relação $n$-ária $\mathcal{S}$ que consiste de todas as $n$-uplas $(a_{i_1}, a_{i_2}, \ldots, a_{i_n})$ tais que $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ está em $\mathcal{R}$.

Por exemplo, dada a relação ternária $\{(1, 20, 350), (2, 20, 300), (4, 40, 400)\}$, podemos formar a relação ternária $\{(20, 350, 1), (20, 300, 2), (40, 400, 4)\}$ substituindo cada tripla $(a_1, a_2, a_3)$ pela tripla rearranjada $(a_2, a_3, a_1)$.

Note que esta operação é um caso particular da projeção generalizada com índices $i_1, i_2, \ldots, i_m$, em que $m = n$ e os índices são uma permutação dos inteiros $1, 2, \ldots, n$. Note também que cada $n$-upla de $\mathcal{R}$ corresponde a uma única $n$-upla de $\mathcal{S}$, e vice-versa.

### 6.6.4 Restrição

Sejam $\mathcal{R}$ uma relação $n$-ária, e $X_1, X_2, \ldots, X_n$ conjuntos arbitrários. Da mesma forma que para relações binárias, definimos a *restrição de $\mathcal{R}$ a esses conjuntos* como a relação $\mathcal{S}$ das $n$-uplas $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ de $\mathcal{R}$ que tem $a_j \in X_j$, para cada $j$; ou seja

$$\mathcal{S} = \mathcal{R} \cap (X_1 \times X_2 \times \cdots\cdots \times X_n)$$

**Exemplo 6.36:** Considere a relação

$$\mathcal{R} = \{(1, 10, 200), (1, 20, 200), (2, 20, 200), (2, 30, 100), (3, 30, 100), (3, 30, 300)\} .$$

Observe que esta é uma relação entre os conjuntos $A_1 = \{1, 2, 3\}$, $A_2 = \{10, 20, 30\}$, e $A_3 = \{100, 200, 300\}$.

Sejam $X_1 = \{1, 2, 3, 4\}$, $X_2 = \{20, 30, 40\}$, e $X_3 = \{200, 300\}$. A restrição de $\mathcal{R}$ a $X_1$, $X_2$ e $X_3$ é

$$\mathcal{S} = \{(1, 20, 200), (2, 20, 200), (3, 30, 300)\}$$

### 6.6.5 Junção

As tabelas abaixo descrevem duas relações $\mathcal{R}$(quaternária) e $\mathcal{S}$(ternárias). A relação $\mathcal{R}$ é uma relação que associa empregados, salas, funções e chefe imediato. A segunda relação associa salas,

departamentos e ramais de telefone.

| $\mathcal{R}$ | | | |
|---|---|---|---|
| Nome | Função | Chefe | Sala |
| José | Secretário | Aníbal | S.102 |
| José | Digitação | Aníbal | S.103 |
| Maria | Digitação | Sônia | S.103 |
| Maria | Secretária | Sônia | S.202 |
| Pedro | Assistente | José | S.102 |
| Luiz | Despacho | Carlos | S.301 |
| Luiz | Motorista | Carlos | S.307 |

| $\mathcal{S}$ | | |
|---|---|---|
| Sala | Ramal | Setor |
| S.101 | 8233 | Vigilância |
| S.102 | 8247 | Financeiro |
| S.102 | 8250 | Patrimônio |
| S.103 | 8288 | Vendas |
| S.103 | 8289 | Vendas |
| S.104 | 8300 | Pessoal |
| S.301 | 8380 | Compras |
| S.303 | 8350 | Contabilidade |
| S.307 | 8380 | Transporte |

Note que há empregados que trabalham em várias salas, salas com vários empregados, salas com mais de um ramal, ramais que servem mais de uma sala, etc. Cruzando estes dados, podemos obter outras relações entre essas entidades. Por exemplo, casando o número da sala nas duas relações, podemos construir a relação $\mathcal{T}$ abaixo:

| $\mathcal{T}$ | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| Nome | Função | Chefe | sala | Ramal | Setor |
| José | Secretário | Aníbal | S.102 | 8247 | Financeiro |
| José | Secretário | Aníbal | S.102 | 8250 | Patrimônio |
| José | Digitação | Aníbal | S.103 | 8288 | Vendas |
| José | Digitação | Aníbal | S.103 | 8289 | Vendas |
| Maria | Digitação | Sônia | S.103 | 8288 | Vendas |
| Maria | Digitação | Sônia | S.103 | 8289 | Vendas |
| Pedro | Assistente | José | S.102 | 8247 | Financeiro |
| Pedro | Assistente | José | S.102 | 8250 | Patrimônio |
| Luiz | Despacho | Carlos | S.301 | 8380 | Compras |
| Luiz | Motorista | Carlos | S.307 | 8380 | Transporte |

Note que, por exemplo, a linha "(José, Digitação, Aníbal, 8289, Vendas)" foi incluída na relação $\mathcal{T}$ porque existe a quádrupla "(José, Digitação, Aníbal, S.103)" na relação $\mathcal{R}$, e a tripla "(S.103, 8288, Vendas)" — com o mesmo número de sala — na relação $\mathcal{S}$. A construção da tabela acima é um exemplo de *junção* de duas relações $n$-árias para produzir uma terceira relação $n$-árias.

Mais formalmente, seja $\mathcal{R}$ uma relação $m$-ária e $\mathcal{S}$ uma relação $n$-ária. Define-se a *junção* das relações $\mathcal{R}$ e $\mathcal{R}$ como sendo a relação $(m + n - 1)$-ária $\mathcal{T}$ consistindo de todas as tuplas $(a_1, a_2, \ldots, a_{m-1}, c, b_1, b_2, \ldots, b_{n-1})$, tais que $(a_1, a_2, \ldots, a_{m-1}, c) \in \mathcal{R}$ e $(c, b_1, b_2, \ldots, b_{n-1}) \in \mathcal{S}$.

Podemos generalizar ainda mais esta operação casando dois ou mais campos ao mesmo tempo. Seja $\mathcal{R}$ uma relação $m$-ária, $\mathcal{S}$ uma relação $n$-ária, e $p$ um inteiro positivo menor que $m$ e $n$. A *junção em p campos* das relações $\mathcal{R}$ e $\mathcal{S}$ é a relação $(m + n - p)$-ária $\mathcal{T}$ consistindo de todas as tuplas $(a_1, a_2, \ldots, a_{m-p}, c_1, c_2, \ldots, c_p, b_1, b_2, \ldots, b_{n-p})$, tais que $(a_1, a_2, \ldots, a_{m-p}, c_1, c_2, \ldots, c_p) \in \mathcal{R}$, e $(c_1, c_2, \ldots, c_p, b_1, b_2, \ldots, b_{n-p}) \in \mathcal{S}$.

Observe que a junção, tal como definida acima, pode ser combinada com operações de permutação e projeção para casar quaisquer campos de duas relações (e não apenas os últimos campos de $\mathcal{R}$ com os primeiros de $\mathcal{S}$), e eliminar campos desnecessários no resultado.

Relações $n$-árias e as operações vistas acima são conceitos fundamentais em bancos de dados, especificamente nos *bancos de dados relacionais*.

**Exercício 6.29:** Prove que a composição $\mathcal{S} \circ \mathcal{R}$ de duas relações binárias $\mathcal{R}$ e $\mathcal{S}$ pode ser obtida por uma junção seguida de uma projeção.

# Capítulo 7

# Relações de ordem e equivalência

## 7.1 Relações de ordem

**Definição 7.1:** Uma relação $\mathcal{R}$ sobre um conjunto $A$ é uma *relação de ordem* se ela é reflexiva sobre $A$, anti-simétrica e transitiva.

**Exemplo 7.1:** Sejam $A = \mathbb{R}$ e $\mathcal{R} = \{ (x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}, : x \leq y \}$.

- $\mathcal{R}$ é reflexiva sobre $A$ pois $(\forall x \in \mathbb{R})\, x \leq x$ logo $(\forall x \in \mathbb{R})\, x\mathcal{R}x$.
- $\mathcal{R}$ é transitiva pois $(\forall x, y, z \in \mathbb{R})\, ((x \leq y \wedge y \leq z) \rightarrow x \leq z)$. Portanto
$$(\forall x, y, z \in \mathbb{R})\, (x\mathcal{R}y \wedge y\mathcal{R}z) \rightarrow x\mathcal{R}z$$
.
- $\mathcal{R}$ é anti-simétrica pois $(\forall x, y \in \mathbb{R})\, (x \leq y \wedge y \leq x) \rightarrow x = y$. Portanto
$$(\forall x, y \in \mathbb{R})\, (x\mathcal{R}y \wedge y\mathcal{R}x) \rightarrow x = y$$
.

**Exemplo 7.2:** Sejam $\mathbb{P}(A)$ o conjunto potência de um conjunto $A$ e
$$\mathcal{S} = \{ (X, Y) \in \mathbb{P}(A) \times \mathbb{P}(A) : X \subseteq Y \}$$
.

- $\mathcal{R}$ é reflexiva sobre $\mathbb{P}(A)$ pois $(\forall X \in \mathbb{P}(A))\, X \subseteq X$ logo $(\forall X \in \mathbb{P}(A))\, X\mathcal{R}X$.
- $\mathcal{R}$ é transitiva pois $(\forall X, Y, Z \in \mathbb{P}(A))\, (X \subseteq Y \wedge Y \subseteq Z) \rightarrow X \subseteq Z)$. Portanto $(\forall X, Y, Z \in \mathbb{P}(A))\, (X\mathcal{R}Y \wedge Y\mathcal{R}Z) \rightarrow X\mathcal{R}Z)$.
- $\mathcal{R}$ é anti-simétrica pois $(\forall X, Y \in \mathbb{P}(A))\, (X \subseteq Y \wedge Y \subseteq X) \rightarrow X = Y)$. Portanto $(\forall X, Y \in \mathbb{P}(A))\, (X\mathcal{R}Y \wedge Y\mathcal{R}X) \rightarrow X = Y$.

Observe que se $\mathcal{R}$ é uma relação de ordem sobre um conjunto $A$, e $A' \subseteq A$, a restrição de $\mathcal{R}$ a $A'$ é uma relação de ordem sobre $A'$. (Veja o exercício 7.4.)

Se $\mathcal{R}$ é uma relação de ordem sobre um conjunto $A$, o par $(A, \mathcal{R})$ é chamado um *conjunto ordenado*. Por exemplo, $(\mathbb{N}, \leq)$ é um conjunto ordenado (entendendo-se que '$\leq$' aqui é a restrição da relação "menor ou igual" aos números naturais). Outro exemplo de conjunto ordenado é $(\mathbb{P}(A), \subseteq)$, para qualquer conjunto $A$.

**Exercício 7.1:** Seja $\mathcal{R}$ a relação sobre o conjunto dos números inteiros positivos tal que $a\mathcal{R}b$ se e somente se existe um inteiro positivo $k$ tal que $a = kb$. Prove que $\mathcal{R}$ é uma relação de ordem.

**Exercício 7.2:** Seja $A$ o conjunto dos inteiros de 0 a 9, e $\mathcal{R}$ a relação sobre $A$ tal que $a\mathcal{R}b$ se e somente se $a$ é par e $b$ é ímpar, ou ambos são pares e $a \leq b$, ou ambos são ímpares e $a \geq b$. Esta é uma relação de ordem?

**Exercício 7.3:** Considere a relação $\mathcal{R}$ sobre os pares ordenados de inteiros $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ tal que

$$(a, b)\mathcal{R}(c, d) \leftrightarrow (a \leq c) \vee (b \leq d)$$

para quaisquer inteiros $a$, $b$, $c$ e $d$. Esta é uma relação de ordem?

**Exercício 7.4:** Seja $\mathcal{R}$ uma relação de ordem sobre um conjunto $A$, Prove que, para todo subconjunto $A'$ de $A$, a restrição $\mathcal{R}'$ de $\mathcal{R}$ a $A'$ é uma relação de ordem sobre $A'$.

**Exercício 7.5:** Para quaisquer relações de ordem $\mathcal{R}$ e $\mathcal{S}$ sobre um conjunto $A$, a relação $\mathcal{R} \cup \mathcal{S}$ é sempre uma relação de ordem sobre $A$? E a relação $\mathcal{R} \cap \mathcal{S}$? Prove suas respostas.

**Exercício 7.6:** Seja $S$ o conjunto de todos os arquivos em um sistema de arquivos, e $\mathcal{R}$ a relação sobre $S$ tal que $a\mathcal{R}b$ se e somente se o arquivo $a$ contém uma cópia do conteúdo do arquivo $b$, possivelmente com informações adicionais antes do início de $b$ ou depois do fim. A relação $\mathcal{R}$ é uma relação de ordem?

### 7.1.1 Relações de ordem estrita

**Definição 7.2:** Uma relação $\mathcal{R}$ sobre um conjunto $A$ é uma *relação de ordem estrita* se ela é irrreflexiva sobre $A$, anti-simétrica e transitiva.

**Exemplo 7.3:** Sejam $A = \mathbb{R}$ e $\mathcal{R} = \{ (x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}, : x < y \}$.

- $\mathcal{R}$ é irreflexiva sobre $A$ pois $(\forall x \in \mathbb{R})\, \neg(x < x)$ logo $(\forall x \in \mathbb{R})\, x \not\mathcal{R} x$.
- $\mathcal{R}$ é transitiva pois $(\forall x, y, z \in \mathbb{R})\, ((x < y \wedge y < z) \rightarrow x < z)$. Portanto

$$(\forall x, y, z \in \mathbb{R})\, (x\mathcal{R}y \wedge y\mathcal{R}z) \rightarrow x\mathcal{R}z.$$

- $\mathcal{R}$ é anti-simétrica, pois $(\forall x, y \in \mathbb{R})\, \neg((x < y \wedge y < x)$. Portanto, por vacuidade,

$$(\forall x, y \in \mathbb{R})\, (x\mathcal{R}y \wedge y\mathcal{R}x) \rightarrow x = y.$$

Note que uma relação de ordem estrita não é um tipo particular de relação de ordem. Porém, toda relação de ordem estrita $\mathcal{R}$ pode ser obtida de uma relação de ordem $\mathcal{S}$ excluindo-se todos os pares da forma $(a, a)$. Reciprocamente, toda relação de ordem $\mathcal{S}$ sobre um conjunto $A$ é a união $\mathcal{R} \cup \mathcal{I}_A$ onde $\mathcal{R}$ é uma relação de ordem estrita sobre $A$. Note que, para quaisquer $a, b \in A$

$$a\mathcal{R}b \leftrightarrow (a\mathcal{S}b \wedge a \neq b)$$

$$a\mathcal{S}b \leftrightarrow (a\mathcal{R}b \vee a = b)$$

Dizemos que $\mathcal{R}$ é a *ordem estrita associada à ordem* $\mathcal{S}$, e vice-versa.

**Exercício 7.7:** Seja $A$ um conjunto de caixas, e $\mathcal{R}$ a relação sobre $A$ tal que $a\mathcal{R}b$ se e somente se a caixa $a$ cabe dentro da caixa $b$. Prove que esta é uma relação de ordem estrita.

### 7.1.2 Ordem total

Dizemos que dois elementos $a, b$ são *comparáveis por* uma relação $\mathcal{R}$ se $a\mathcal{R}b$ ou $b\mathcal{R}a$.

> **Definição 7.3:** Uma relação $\mathcal{R}$ é uma *ordem total* sobre um conjunto $A$ (ou *ordem linear*) se, e somente se $\mathcal{R}$ é uma relação de ordem sobre $A$ e quaisquer dois elementos de $A$ são comparáveis por $\mathcal{R}$.

Portanto uma relação de ordem $\mathcal{R}$ é total se, quaisquer que sejam $a$ e $b$ em $A$, $(a, b) \in \mathcal{R}$ ou $(b, a) \in \mathcal{R}$. Se $\mathcal{R}$ é uma relação de ordem total sobre $A$, o par $(A, \mathcal{R})$ é chamado de *conjunto totalmente ordenado*.

Observe que a relação $\leq$ (exemplo 7.1) é uma ordem total sobre $\mathbb{R}$, pois $(\forall a, b \in \mathbb{R})\, a \leq b \vee b \leq a$. Por outro lado, a relação $\subseteq$ (exemplo 7.2) não é uma ordem total quando $A$ tem pelo menos dois elementos, pois nesse caso existem subconjuntos distintos $X$ e $Y$ em $\mathbb{P}(A)$ tais que nem $X \subseteq Y$ nem $Y \subseteq X$. Por exemplo, se $A = \{1, 2\}$, podemos tomar $X = \{1\}$ e $Y = \{2\}$.

Analogamente, dizemos que uma ordem estrita $\mathcal{R}$ sobre um conjunto $A$ é *total* se e somente se quaisquer dois elementos *distintos* de $A$ são comparáveis por $\mathcal{R}$.

> **Exercício 7.8:** A ordem estrita sobre um conjunto de caixas definida no exercício 7.7 é uma ordem total?

> **Exercício 7.9:** Seja $\mathcal{R}$ uma relação de ordem total sobre um conjunto $A$, Prove que, para todo subconjunto $B$ de $A$, a restrição $\mathcal{R}$ a $B$ também é uma relação de ordem total. (Veja o exercício 7.4.)

> **Exercício 7.10:** Seja $\mathcal{R}$ uma relação sobre um conjunto $A$, e seja $\mathcal{S}$ a relação complementar, $(A \times A) \setminus \mathcal{R}$. Prove que $\mathcal{R}$ é uma relação de ordem sobre $A$ se e somente se $\mathcal{S}$ é uma relação de ordem estrita sobre $A$. Prove que $\mathcal{R}$ é total se e somente se $\mathcal{S}$ é total.

### 7.1.3 Ordem lexicográfica

Uma ordem muito importante no dia a dia, e em computação, é a *ordem alfabética* definida sobre palavras, nomes, etc.. Por exemplo, nesta ordem "`hoje`" vem antes de "`ontem`", "`biscoito`" vem antes de "`bolacha`", "`porco`" vem antes de `porta`", e "`sol`" vem antes de "`soldado`".

Observe que esta ordem é baseada na ordem tradicional das letras do alfabeto: `a`, `b`, `c`, ..., `z`. A regra é: para decidir se uma palavra vem antes da outra, compara-se a primeira letra de uma com a primeira letra da outra. Se forem diferentes, a ordem das palavras é a mesma das letras. Se as palavras começam com a mesma letra, compara-se a segunda letra de uma com a segunda da outra. Se persistir o empate, consideram-se as terceiras letras, as quartas letras, e assim por diante — até haver um desempate (letras diferentes na mesma posição das duas palavras), ou uma das palavras terminar. Neste último caso (como no exemplo de "`sol`" e "`soldado`"), convenciona-se que a palavra que termina primeiro vem antes da outra.

Uma idéia semelhante pode ser utilizada para ordenar pares de reais. Seja a relação $\leq_2$ definida sobre os pares $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$, pela fórmula

$$(a_1, a_2) \leq_2 (b_1, b_2) \leftrightarrow (a_1 < b_1) \vee (a_1 = b_1 \wedge a_2 \leq b_2)$$

Note a semelhança entre a relação $\leq_2$ e a ordem alfabética de palavras.

Este conceito pode ser generalizado para sequências de "letras" arbitrárias e ordenações arbitrárias dessas "letras". Seja $\mathcal{R}$ uma relação de ordem sobre um conjunto $A$. Vamos denotar por $A^*$ o conjunto de todas as sequências de elementos de $A$, e () a sequência vazia. Considere a relação $\mathcal{R}^*$ definida recursivamente sobre $A^*$, da seguinte maneira:

1. () $\mathcal{R}^*$ $b$ para qualquer sequência $b \in A^*$.

2. $b$ $\not\mathcal{R}^*$ () para qualquer sequência não vazia $a$ em $A^*$.

3. Se $a$ e $b$ são sequências não vazias em $A^*$, sejam $a_1$ e $b_1$ os elementos iniciais de $a$ e $b$, e $a', b'$ o que resta de $a$ e $b$ retirando-se estes elementos iniciais. Então temos que $a$ $\mathcal{R}^*$ $b$ se, e somente se,
$$(a_1 \neq b_1 \wedge a_1 \mathcal{R} b_1) \vee (a_1 = b_1 \wedge a' \ \mathcal{R}^* \ b')$$

Observe que esta definição recursiva permite determinar, em um número finito de passos, se qualquer par $(a, b)$ de sequências de $A^*$ está na relação $\mathcal{R}^*$ ou não. Prova-se (veja exercícios 7.11, 7.12 e 7.13) que a relação $\mathcal{R}^*$ definida desta forma é uma relação de ordem. Prova-se também que $\mathcal{R}^*$ é uma ordem total se e somente se $\mathcal{R}$ é total (veja exercício 7.14).

A relação $\mathcal{R}^*$ acima é chamada de *ordem lexicográfica induzida por* $\mathcal{R}$.

**Exercício 7.11:** Prove que a relação $\mathcal{R}^*$ definida acima é reflexiva. (Dica: use indução no número $n$ de elementos da mais curta entre as duas sequências.)

**Exercício 7.12:** Prove que a relação $\mathcal{R}^*$ definida acima é anti-simétrica.

**Exercício 7.13:** Prove que a relação $\mathcal{R}^*$ definida acima é transitiva.

**Exercício 7.14:** Prove que a relação de ordem $\mathcal{R}^*$ definida acima é total se e somente se $\mathcal{R}$ é total.

### 7.1.4 Ordens "parciais"

Fora de contextos matemáticos, a palavra "parcial" geralmente significa "incompleto", e portanto o oposto de "total". Em matemática, entretanto, muitos autores usam "relação de ordem parcial" como sinônimo de "relação de ordem". Para esses autores, as ordens totais são casos particulares de ordens parciais.

Esses autores também se referem a um conjunto ordenado $(A, \mathcal{R})$ como "conjunto parcialmente ordenado", (em inglês, *partially ordered set* ou *poset*) — mesmo que a relação $\mathcal{R}$ seja uma ordem total.

Para outros autores, entretanto, "ordem parcial" pode significar uma ordem que não é total. O leitor deve ficar atento para esses dois sentidos da palavra "parcial". Para evitar ambiguidades, sugerimos evitar essa palavra, usando "relação de ordem" para o caso geral, e "ordem total" ou "ordem não total" para os dois tipos.

### 7.1.5 Diagrama de Hasse

Podemos representar graficamente um conjunto ordenado $(A, \mathcal{R})$, onde $A$ é finito e não muito grande, por um diagrama de pontos e linhas, chamado *diagrama de Hasse* (em homenagem ao matemático alemão Helmut Hasse, 1898–1979).

Neste diagrama, cada elemento de $A$ é representado por um ponto do plano, com posição arbitrária, exceto pela regra de que, para todo par $(a, b) \in \mathcal{R}$ com $a, b \in A$ e $a \neq b$, o ponto que representa $a$ deve estar abaixo do ponto que representa $b$. Cada um desses pares é representado por uma linha reta ligando $a$ com $b$, exceto que pares que podem ser deduzidos por transitividade não são desenhados.

Para ilustrar a construção deste diagrama, vamos usar o conjunto $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$, e a seguinte relação sobre $A$:

$$\begin{aligned}\mathcal{R} = \{\ & (1,1),\ (1,2),\ (1,3),\ (1,4),\ (1,5),\ (1,7),\\ & (2,2),\ (2,3),\ (2,4),\ (2,5),\\ & (3,3),\ (3,4),\ (3,5),\\ & (4,4),\ (4,5),\\ & (5,5),\\ & (6,6),\ (6,9),\ (6,5),\\ & (7,7),\ (7,4),\ (7,5),\\ & (8,8),\ (8,7),\ (8,4),\ (8,5),\\ & (9,9),\ (9,5)\end{aligned}$$

Podemos representar o conjunto $A$ e os pares de $\mathcal{R}$ pelo diagrama de pontos e setas da figura 7.1 (à esquerda). Observe que, da maneira como os pontos foram dispostos, todas as setas apontam de baixo para cima; portanto não é necessário indicar sua direção. Sabendo que $\mathcal{R}$ é uma relação de ordem, podemos também omitir todos os laços, e todas as linhas que podem ser deduzidas pela transitividade; como $(1, 3)$, por exemplo, que pode ser deduzida pelos pares $(1, 2)$ e $(2, 3)$. O resultado dessas simplificações é o diagrama de Hasse (à direita).

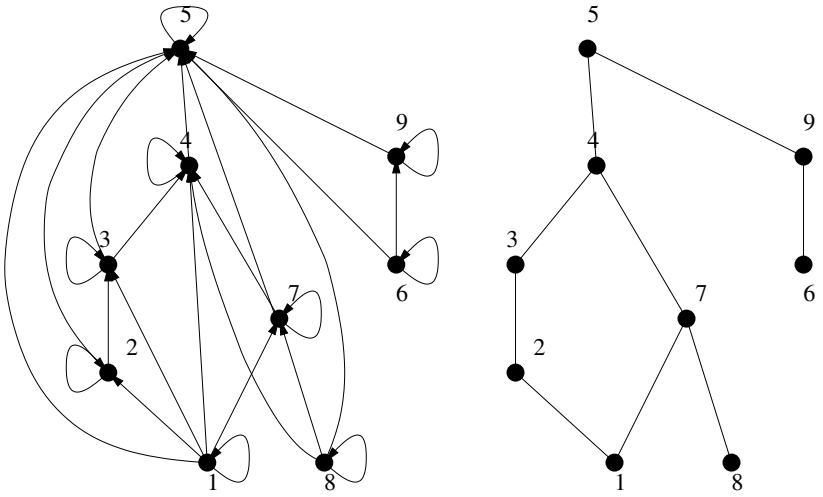



Figura 7.1: Diagrama de pontos e setas do conjunto ordenado $(A, \mathcal{R})$ (à esquerda) e o diagrama de Hasse (à direita).

Observe que o diagrama de Hasse contém toda a informação necessária para determinar exatamente a relação de ordem $\mathcal{R}$.

O diagrama de Hasse pode ser construído também a partir de uma ordem estrita, e é igual ao diagrama da relação de ordem associada.

**Exercício 7.15:** Seja $A$ o conjunto dos inteiros entre 1 e 20, inclusive. Seja $\mathcal{R}$ a relação sobre $A$ tal que $x\mathcal{R}y$ se, e somente se, $x$ divide $y$. Construa o diagrama de Hasse de $\mathcal{R}$.

**Exercício 7.16:** Uma *sub-palavra* de uma palavra $x$ é uma sequência de letras que aparecem em posições consecutivas em $x$, na mesma ordem. Por exemplo, '`nan`' é uma sub-palavra de '`banana`', mas '`bn`' e '`nab`' não são. Seja $A$ o conjuto de todas as sub-palavras de '`banana`', e '$\sqsubset$' a relação sobre $A$ tal que $x \sqsubset y$ se e somente se, $x$ é sub-palavra de $y$.

a) Prove que '$\sqsubset$' é uma relação de ordem.

b) Construa o diagrama de Hasse de '$\sqsubset$'.

**Exercício 7.17:** Descreva o diagrama de Hasse de uma ordem total sobre um conjunto finito $A$.

### 7.1.6 Elementos mínimos e máximos

Seja $\mathcal{R}$ uma relação de ordem sobre um conjunto $X$, e $A$ um subconjunto de $X$. Um *elemento mínimo de $A$ sob $\mathcal{R}$* é um elemento $m \in A$ se $(m, a) \in \mathcal{R}$ para todo $a \in A$.

**Exemplo 7.4:** Seja $A = \{2, 4, 6, 8\} \subseteq \mathbb{Z}$, e seja $\mathcal{R}$ a relação '$\leq$' ("menor ou igual") sobre $\mathbb{Z}$. O inteiro 2 é um mínimo de $A$ sob $\mathcal{R}$, pois $(2, a) \in \mathcal{R}$ (ou seja $2 \leq a$) para todo $a \in A$.

**Exemplo 7.5:** Considere o conjunto de conjuntos

$$A = \{\{1, 2, 4\}, \{2, 4\}, \{2, 3, 4\}, \{2, 4, 5\}, \{2, 3, 4, 6\}\}$$

e seja $\mathcal{R}$ a relação "$\subseteq$" entre conjuntos. O elemento $\{2, 4\}$ de $A$ é mínimo sob $\mathcal{R}$, pois $\{2, 4\} \subseteq b$ para todo conjunto $b \in A$.

O conceito de *elemento máximo de $A$ sob $\mathcal{R}$* é inteiramente simétrico. Ou seja, um elemento $m$ de $A$ é máximo sob uma relação $\mathcal{R}$ se $(a, m) \in \mathcal{R}$ para todo $a \in A$.

No diagrama de Hasse de $\mathcal{R}$, o elemento mínimo existe se há um único ponto no diagrama a partir do qual é possível alcançar qualquer outro ponto por uma sequência de linhas, todas elas percorridas no sentido de baixo para cima. O elemento máximo, se existe, pode ser identificado de maneira análoga, isto é, se a partir dele podemos alcançar qualquer outro ponto percorrendo uma sequência de linhas no sentido descendente.

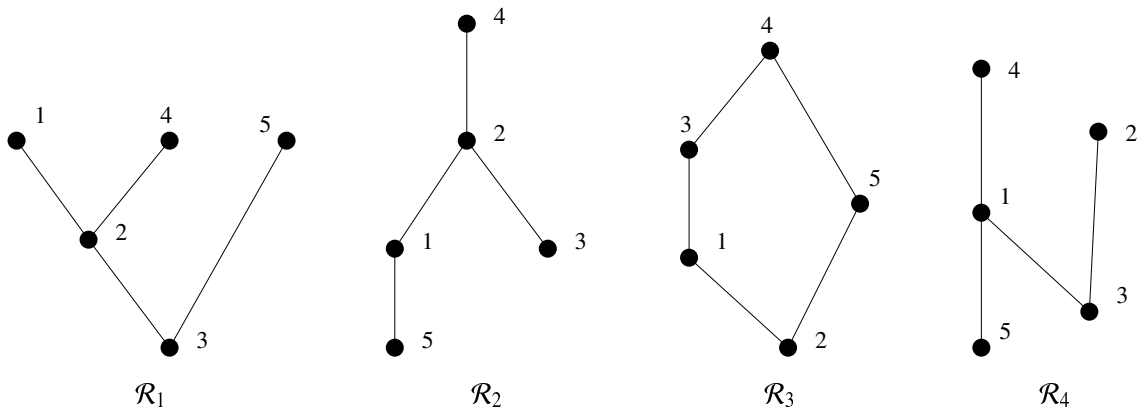



Figura 7.2: Diagramas de Hasse de quatro relações de ordem sobre o conjunto $\{1, 2, 3, 4, 5\}$. Na relação $\mathcal{R}_1$, o elemento 3 é mínimo e não existe elemento máximo. Na relação $\mathcal{R}_2$, o elemento 4 é máximo, e não há elemento mínimo. Na relação $\mathcal{R}_3$, o elemento 2 é mínimo e 4 é maximo. Na relação $\mathcal{R}_4$ não existe nem mínimo nem máximo.

Se $\mathcal{R}$ é uma relação de ordem total, e o conjunto $A$ é finito, sempre existe um elemento mínimo. Se $\mathcal{R}$ não é uma ordem total, ou se $A$ é infinito, o mínimo pode existir ou não. Em qualquer caso, se existe um elemento mínimo, ele é único. As mesmas observações são válidas para o máximo.

**Exemplo 7.6:** Seja $A$ o conjunto dos inteiros pares, e $\mathcal{R}$ a relação "$\leq$" (menor ou igual) sobre $\mathbb{Z}$. Não existe nenhum elemento mínimo de $A$ sob $\mathcal{R}$, pois para qualquer inteiro $m \in A$ o par $(m-2, m)$, por exemplo, está em $\mathcal{R}$.

É importante observar que o fato de um elemento ser mínimo depende tanto do conjunto $A$ quanto da relação $\mathcal{R}$. Um elemento que é mínimo sob $\mathcal{R}$ pode não ser mínimo sob outra relação $\mathcal{S}$. Em particular, um elemento mínimo sob $\mathcal{R}$ é um elemento máximo sob $\mathcal{R}^{-1}$, e vice-versa.

Este fato pode gerar confusões se existe uma ordem "usual" para os elementos de $A$, distinta da ordem $\mathcal{R}$. Por exemplo, no conjunto $A$ acima do exemplo 7.4, o elemento 8 é mínimo, e 2 é máximo, sob a ordem "$\geq$".

**Exercício 7.18:** Seja $A$ o conjunto das palavras de 3 letras da língua portuguesa, e $\mathcal{R}$ a relação tal que $a\mathcal{R}b$ se e somente se a palavra $a$ vem antes da palavra $b$ no dicionário. Quais são os elementos mínimo e máximo de $A$ sob $\mathcal{R}$?

**Exercício 7.19:** Seja $A$ o conjunto das sequências de 4 bits (algarismos 0 ou 1), e $\mathcal{R}$ a relação tal que $a\mathcal{R}b$ se e somente se cada bit de $a$ é menor ou igual ao bit correspondente de $b$. Assim, por exemplo, `0100`$\mathcal{R}$`1100`, mas `1001`$\not\mathcal{R}$`0101`. Quais são os elementos mínimo e máximo de $A$ sob $\mathcal{R}$?

**Exercício 7.20:** Prove que todo conjunto ordenado tem no máximo um elemento mínimo e um elemento máximo.

**Exercício 7.21:** Prove que um conjunto finito não vazio totalmente ordenado tem exatamente um elemento mínimo e um elemento máximo.

### 7.1.7 Elementos minimais e maximais

Seja $\mathcal{R}$ uma relação de ordem sobre um conjunto $X$, e $A$ um subconjunto de $X$. Um *elemento minimal de $A$ sob $\mathcal{R}$* é um elemento $m \in A$ tal que não existe nenhum $a \in A$, diferente de $m$, com $(a, m) \in \mathcal{R}$.

**Exemplo 7.7:** Seja $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ e

$$\mathcal{R} = \{(1,1), (1,3), (2,2), (2,3), (3,3), (1,4), (4,4), (2,4), (3,4), (5,5), (5,6), (6,6)\}\,.$$

O inteiro 2, por exemplo, é um elemento minimal de $A$ sob $\mathcal{R}$, pois não existe nenhum par $(a, 2)$ na relação. Os elementos minimais de $A$ sob $\mathcal{R}$ são 1, 2, e 5.

**Exemplo 7.8:** Seja $A = \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$ e $\mathcal{R}$ a relação "é divisor próprio de"; isto é,

$$\mathcal{R} = \{\,(x, y) : x \in A \wedge y \in A \wedge x < y \wedge (\exists k \in \mathbb{N})\; y = kx\,\}\,.$$

O número 21 não é minimal sob $\mathcal{R}$ pois existem pares $(a, 21)$ em $\mathcal{R}$, por exemplo $(3, 21)$. O número 17 é minimal sob $\mathcal{R}$ pois não existe nenhum par $(a, 17)$ em $\mathcal{R}$. Note que os elementos minimais de $A$ sob $\mathcal{R}$ são os números primos.

Como estes exemplos mostram, uma relação pode não ter elementos minimais, ou pode ter mais de um elemento minimal. É fácil mostrar que um elemento mínimo de $A$ sob $\mathcal{R}$, se existir, é também um elemento minimal (e o único elemento minimal em $A$). O contrário não é verdadeiro: um elemento minimal pode não ser mínimo.

Da mesma forma definimos um *elemento maximal de $A$ sob $\mathcal{R}$* como um elemento $m$ de $A$ tal que não existe nenhum $a$ em $A$, diferente de $m$, tal que $(m, a) \in \mathcal{R}$.

No diagrama de Hasse de $\mathcal{R}$, um elemento minimal é qualquer ponto do qual não sai nenhuma linha descendente. Um elemento maximal é um elemento do qual não sai nenhuma linha ascendente. Veja a figura 7.3

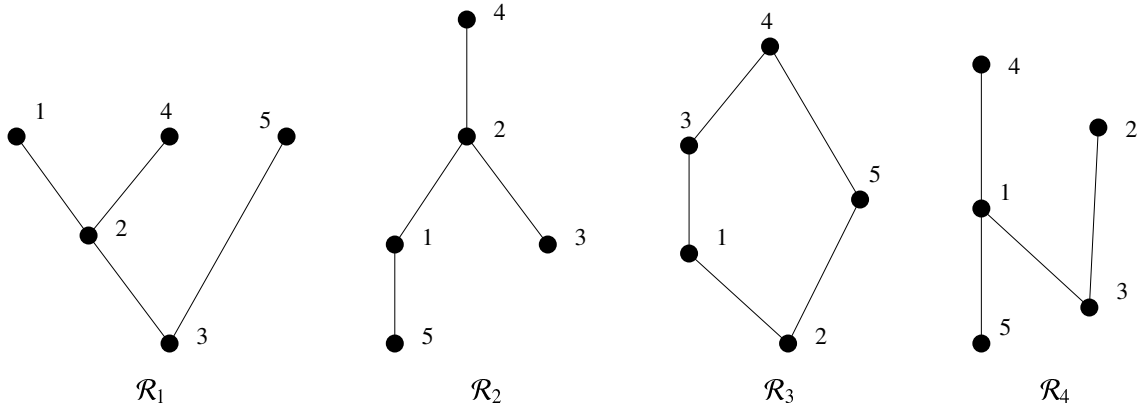



Figura 7.3: Diagramas de Hasse de quatro relações de ordem sobre o conjunto $\{1, 2, 3, 4, 5\}$. Na relação $\mathcal{R}_1$, o único elemento minimal é 3, e os elementos maximais são 1, 4 e 5. Na relação $\mathcal{R}_2$, os elementos minimais são 3 e 5, e o único maximal é 4. Na relação $\mathcal{R}_3$, o único minimal é 2 e o único maximal é 4. Na relação $\mathcal{R}_4$ os minimais são 3 e 5, e os maximais são 2 e 4.

Os conceitos de minimal e maximal são muito usados quando $A$ é um conjunto de conjuntos, e $\mathcal{R}$ é a relação '$\subseteq$'. Neste caso, um elemento minimal de $A$ é um conjunto que não contém propriamente nenhum outro elemento de $A$. Por exemplo, seja

$$A = \{\{2\}, \{1,2\}, \{1,3\}, \{1,2,4\}, \{3,4,5\}\}$$

Neste conjunto, o elemento $\{1,2,4\}$ não é minimal, pois ele contém propriamente o conjunto $\{1,2\}$ que também está em $A$. Por outro lado, $\{2\}$, $\{1,3\}$, e $\{3,4,5\}$ são minimais sob a relação '$\subseteq$'. Analogamente o elemento $\{2\}$ não é maximal pois $\{2\} \subseteq \{1,2,4\}$. Os elementos maximais de $A$ sob $\subseteq$ são $\{1,3\}$, $\{1,2,4\}$ e $\{3,4,5\}$.

**Exercício 7.22:** Encontre os elementos minimais e maximais em cada uma das relações da figura 7.2.

**Exercício 7.23:** Encontre um conjunto $A$ e uma relação de ordem $\mathcal{R}$ sobre $A$ tal que existe um único elemento minimal em $A$ sob $\mathcal{R}$, mas que não é mínimo.

**Exercício 7.24:** Prove que um conjunto finito ordenado tem pelo menos um elemento minimal e um elemento maximal.

**Exercício 7.25:** Seja $A = \{3, 6, 9, \ldots\}$ o conjunto dos múltiplos positivos de 3, e $\mathcal{R}$ a relação sobre $A$ tal que $(x, y)$ está em $\mathcal{R}$ se e somente se todos os algarismos decimais de $x$ aparecem em $y$, na mesma sequência. Assim, por exemplo, $(\mathbf{262}, 1\mathbf{26}8\mathbf{2})$ está em $\mathcal{R}$, mas $(262, 12268)$ não está. Determine os elementos minimais de $A$ sob $\mathcal{R}$.

**Exercício 7.26:** Seja $A = \{\, X \subseteq \mathbb{N} : X \neq \emptyset \wedge |X| \text{ é par} \,\}$. Note que $A$ não é um conjunto de inteiros, mas sim um conjunto de conjuntos: $\{1,2,3,4\}$ e $\{10,20\}$ são elementos de $A$, enquanto que 20 e $\{20,40,60\}$ não são. Seja $\mathcal{R}$ a relação "$\subseteq$" de continência de conjuntos. Encontre os elementos minimais de $A$ sob $\mathcal{R}$. Existe algum elemento maximal de $A$ sob $\mathcal{R}$?

**Exercício 7.27:** Seja $\mathcal{R} = \{(x, y) \in N - \{0\} \times N - \{0\} \;:\; x \text{ divide } y\}$.

1. Prove que $\mathcal{R}$ é uma relação de ordem definida sobre $N - \{0\}$.
2. A relação de ordem $\mathcal{R}$ é total? Prove ou dê um contra-exemplo.
3. Quais são os elementos minimais de $N - \{0\}$ sob $R$?
4. O conjunto $N - \{0\}$ tem um elemento mínimo sob $R$?

**Exercício 7.28:** Seja $A$ o conjunto das sequências de 4 bits (algarismos 0 ou 1), exceto a sequência `0000`; e seja $\mathcal{R}$ a relação tal que $a\mathcal{R}b$ se e somente se cada bit de $a$ é menor ou igual ao bit correspondente de $b$. Assim, por exemplo, `0100`$\mathcal{R}$`1100`, mas `1001`$\not\mathcal{R}$`0101`. Quais são os elementos mínimos, maximos, minimais e maximais de $A$ sob $\mathcal{R}$?

## 7.2 Relações de equivalência

**Definição 7.4:** Uma *relação de equivalência sobre* um conjunto $A$ é uma relação $\mathcal{R}$ sobre $A$ que é reflexiva sobre $A$, simétrica e transitiva.

**Exemplo 7.9:** Seja $A$ o conjunto de todas as retas do plano, e seja $\mathcal{R}$ a relação $X\mathcal{R}Y$ se, e somente se, $X = Y$ ou $X \cap Y = \emptyset$. Esta relação é simplesmente a relação de paralelismo da geometria plana. Claramente a relação é reflexiva sobre $A$, simétrica e transitiva, logo é uma relação de equivalência.

**Exemplo 7.10:** Sejam $\mathbb{Z}$ o conjunto dos números inteiros. A relação

$$\mathcal{R} = \{(a,b) : a \in \mathbb{Z} \wedge b \in \mathbb{Z} \wedge (a-b) \text{é múltiplo de } 5\}$$

é uma relação de equivalência. Verificando:

- $\mathcal{R}$ é reflexiva sobre $\mathbb{Z}$: para todo $a \in \mathbb{Z}$, temos $(a,a) \in \mathcal{R}$, pois $a - a = 0 \cdot 5$.
- $\mathcal{R}$ é simétrica: para todo $(a,b) \in \mathcal{R}$, temos $a - b = 5r$ para algum $r \in \mathbb{Z}$; logo $b - a = 5(-r)$, portanto $(b,a) \in \mathcal{R}$.
- $\mathcal{R}$ é transitiva: para todo $(a,b) \in \mathcal{R}$ e todo $(b,c) \in \mathcal{R}$, temos $a - b = 5r$ para algum $r \in \mathbb{Z}$, e $b - c = 5s$ para algum $s \in \mathbb{Z}$; logo $c = b - 5s$, $a - c = a - b + 5s = 5r + 5s = 5(r+s)$; portanto $(a,c) \in \mathcal{R}$.

No exemplo 7.10 o número 5 pode ser substituido por qualquer inteiro $m$. Esta relação é denominada *congruência módulo m*.

**Exemplo 7.11:** Para todo conjunto $A$, a relação de identidade $\mathcal{I}_A$ é uma relação de equivalência sobre $A$.

**Exemplo 7.12:** Para todo conjunto $A$, o produto cartesiano $A \times A$ é uma relação de equivalência sobre $A$ (onde quaisquer dois elementos estão relacionados entre si).

**Exemplo 7.13:** Seja $A$ um conjunto não vazio. A relação $\subseteq$ entre os conjuntos de $\mathbb{P}(A)$ é reflexiva sobre $\mathbb{P}(A)$ e transitiva, mas não é uma relação de equivalência sobre $\mathbb{P}(A)$, pois ela não é simétrica (por exemplo, $\emptyset \subseteq A$ mas $A \not\subseteq \emptyset$.)

Se $\mathcal{R}$ é uma relação de equivalência, a notação $a\mathcal{R}b$ também pode ser lida "*a é equivalente a b módulo* $\mathcal{R}$," e denotada por $a \equiv b \bmod \mathcal{R}$. Analogamente, $a\not\mathcal{R}b$ pode ser lida "*a não é equivalente a b módulo* $\mathcal{R}$," e denotada por $a \not\equiv b \bmod \mathcal{R}$.

### 7.2.1 Classes de equivalência

Seja $\mathcal{R}$ uma relação de equivalência sobre um conjunto $A$. Para todo elemento $a \in A$, o conjunto

$$[a]_{\mathcal{R}} = \{x \in A : x\mathcal{R}a\}$$

é denominado a *classe de equivalência* do elemento $a$ na relação $\mathcal{R}$.

**Exemplo 7.14:** Vamos construir as classes de equivalência da relação $\mathcal{R}$ de congruência módulo 5 (exemplo 7.10). A classe de equivalência de um inteiro $i$ na relação $\mathcal{R}$, é o conjunto

$$[i]_{\mathcal{R}} = \{x \in \mathbb{Z} : (\exists s \in \mathbb{Z})\, x - i = 5s\}$$

Ou seja, $x \in [i]_{\mathcal{R}}$ se e somente se $x = 5k + i$ para algum $r \in \mathbb{Z}$; isto é, se e somente se $x$ tem o mesmo resto que $i$ quando dividido por 5. Portanto existem apenas 5 classes de equivalência, que correspondem aos possíveis restos da divisão por 5:

- $[0]_{\mathcal{R}} = \{\cdots, -10, -5, 0, 5, 10, \cdots\}$.
- $[1]_{\mathcal{R}} = \{\cdots, -9, -4, 1, 6, 11 \cdots\}$.
- $[2]_{\mathcal{R}} = \{\cdots, -8, -3, 2, 7, 12 \cdots\}$.
- $[3]_{\mathcal{R}} = \{\cdots, -7, -2, 3, 8, 13, \cdots\}$.
- $[4]_{\mathcal{R}} = \{\cdots, -6, -1, 4, 9, 14, \cdots\}$.

**Teorema 7.1:** Seja $\mathcal{R}$ uma relação de equivalência sobre um conjunto $A$. As seguintes afirmações são equivalentes.

- $a\mathcal{R}b$.
- $[a]_{\mathcal{R}} = [b]_{\mathcal{R}}$.
- $[a]_{\mathcal{R}} \cap [b]_{\mathcal{R}} \neq \emptyset$

**Prova:**

- Vamos provar que $a\mathcal{R}b \rightarrow [a]_{\mathcal{R}} = [b]_{\mathcal{R}}$. Seja $c$ um elemento qualquer de $[a]_{\mathcal{R}}$. Por definição, $c\mathcal{R}a$. Como $\mathcal{R}$ é uma relação de equivalência, se $a\mathcal{R}b$ então $c\mathcal{R}b$ (por transitividade), e portanto $c \in [b]_{\mathcal{R}}$. Concluímos assim que $\in [a]_{\mathcal{R}} \subseteq [b]_{\mathcal{R}}$. Analogamente prova-se que $[b]_{\mathcal{R}} \subseteq [a]_{\mathcal{R}}$. Portanto $[a]_{\mathcal{R}} = [b]_{\mathcal{R}}$.
- Vamos provar que $[a]_{\mathcal{R}} = [b]_{\mathcal{R}} \rightarrow [a]_{\mathcal{R}} \cap [b]_{\mathcal{R}} \neq \emptyset$. Se $[a]_{\mathcal{R}} = [b]_{\mathcal{R}}$, então $[a]_{\mathcal{R}} \cap [b]_{\mathcal{R}} = [a]_{\mathcal{R}} \cap [a]_{\mathcal{R}} = [a]_{\mathcal{R}}$. Como $\mathcal{R}$ é reflexiva sobre $A$, temos $a \in [a]_{\mathcal{R}}$, logo $[a]_{\mathcal{R}} \neq \emptyset$. Concluímos que $[a]_{\mathcal{R}} \cap [b]_{\mathcal{R}} \neq \emptyset$.
- Vamos provar que $[a]_{\mathcal{R}} \cap [b]_{\mathcal{R}} \neq \emptyset \rightarrow a\mathcal{R}b$. Como $[a]_{\mathcal{R}} \cap [b]_{\mathcal{R}} \neq \emptyset$ então existe um $c \in A$ tal que $c \in [a]_{\mathcal{R}}$ e $c \in [b]_{\mathcal{R}}$. Por definição, $c\mathcal{R}a$ e $c\mathcal{R}b$. Por simetria e transitividade de $\mathcal{R}$, concluímos que $a\mathcal{R}b$.

**Fim.**

Cada elemento de uma classe de equivalência é chamado de um *representante* dessa classe.

### 7.2.2 Relações de equivalência e partições

O que o teorema 7.1 nos mostra é as que classes de uma relação de equivalência $\mathcal{R}$ sobre um conjunto $A$ são duas a duas disjuntas. Como todo elemento de $A$ está em alguma classe, a união de todas as classes é o conjunto $A$. Isto significa que as classes de equivalência de $\mathcal{R}$ formam uma partição do conjunto $A$. (Veja a seção 2.9.)

Vamos mostrar agora que toda partição de um conjunto pode ser usada para construir uma relação de equivalência sobre esse conjunto. Dizemos que dois elementos estão relacionados se e somente se eles estão no mesmo bloco da partição. Mais precisamente:

**Teorema 7.2:** Sejam $P$ uma partição do conjunto $A$, e $\mathcal{S}_P$ a relação

$$\mathcal{S}_P = \{(x, y) : (\exists C \in P)\, x \in C \wedge y \in C\}.$$

Então $\mathcal{S}_P$ é uma relação de equivalência, e suas classes são os blocos da partição $P$.

**Prova:**

Para mostrar que $\mathcal{S}_P$ é uma relação de equivalência, precisamos mostrar que ela é reflexiva sobre $A$, simétrica e transitiva.

- A relação é reflexiva sobre $A$: para todo $a \in A$, temos $a\mathcal{S}_P a$; pois, pela definição de partição, todo elemento de $A$ pertence a algum bloco $C$ da partição $P$.
- A relação é simétrica: para todo $(a, b) \in \mathcal{S}_P$, por definição $a$ e $b$ pertencem a algum sub-conjunto $C \in P$; logo $b\mathcal{S}_P a$.
- A relação é transitiva: para quaisquer $(a, b)$ e $(b, c)$ em $\mathcal{S}_P$, existem blocos $C$ e $D$ de $P$ tais que $a, b \in C$ e $b, c \in D$; logo $b \in C \cap D$. Como os blocos de uma partição são disjuntos dois a dois, concluímos que $C$ e $D$ são o mesmo bloco. Portanto $a$ e $c$ pertencem ao mesmo bloco, logo $a\mathcal{S}_P c$.

**Fim.**

**Exercício 7.29:** Seja $\mathcal{S} = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} : x - y \in \mathbb{Q}\}$. Prove que $\mathcal{S}$ é uma relação de equivalência.

**Exercício 7.30:** Seja $\mathcal{R}$ uma relação sobre o conjunto dos pares ordenados de inteiros positivos definida por $((a, b)\mathcal{R}\,(c, d))$ se, e somente se, $ad = bc$.

1. Prove que $\mathcal{R}$ é uma relação de equivalência.
2. Descreva a classe de equivalência de $(1, 2)$ segundo a relação $\mathcal{R}$.

**Exercício 7.31:** Seja $\mathcal{R}$ uma relação sobre o conjunto dos pares ordenados de inteiros positivos definida por $((a, b)\mathcal{R}\,(c, d))$ se, e somente se, $a + d = b + c$.

1. Prove que $\mathcal{R}$ é uma relação de equivalência.
2. Descreva a classe de equivalência de $(3, 1)$ segundo a relação $\mathcal{R}$.
3. Descreva as classes de equivalência de $\mathcal{R}$.

**Exercício 7.32:** Prove que que as relações descritas a seguir são relações de equivalência. Descreva as classes de equivalência de cada uma das relações.

1. Seja $\mathcal{R}$ a relação sobre $\mathbb{Z}$ definida por $m\mathcal{R}n$ se, e somente se, 2 divide $m - n$.

2. Seja $\mathcal{S}$ a relação sobre $\mathbb{R}$ definida por $x\mathcal{R}y$ se, e somente se, $|x| = |y|$.
3. Seja $\mathcal{F}$ a relação sobre inteiros positivos definida por $x\mathcal{F}y$ se, e somente se, todo número primo que divide $x$ divide $y$, e vice-versa.

**Exercício 7.33:** Seja $\mathbb{A}$ o conjunto de todas as proposições nas variáveis $x$, $y$ e $z$. Seja $\mathcal{L}$ uma relação sobre $\mathbb{A}$ definida por $P\mathcal{L}Q$ se, e somente se, $P$ e $Q$ tem a mesma tabela verdade. Prove que $\mathcal{L}$ é uma relação de equivalência.

**Exercício 7.34:** Seja $\varepsilon$ um número real positivo, e considere a relação $\approx_\varepsilon$ sobre $\mathbb{R}$ tal que

$$x \approx_\varepsilon y \;\leftrightarrow\; |x - y| \leq \varepsilon$$

para quaisquer $x$ e $y$ en $\mathbb{R}$. Esta é uma relação de equivalência? Em caso afirmativo, descreva suas classes de equivalência.

**Exercício 7.35:** Considere a relação $\mathcal{R}$ sobre os pares ordenados de inteiros $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ tal que

$$(a, b)\mathcal{R}(c, d) \;\leftrightarrow\; ((a = c) \wedge (b = d)) \vee ((a = d) \wedge (b = c))$$

para quaisquer inteiros $a$, $b$, $c$ e $d$. Esta é uma relação de equivalência? Em caso afirmativo, descreva suas classes de equivalência.

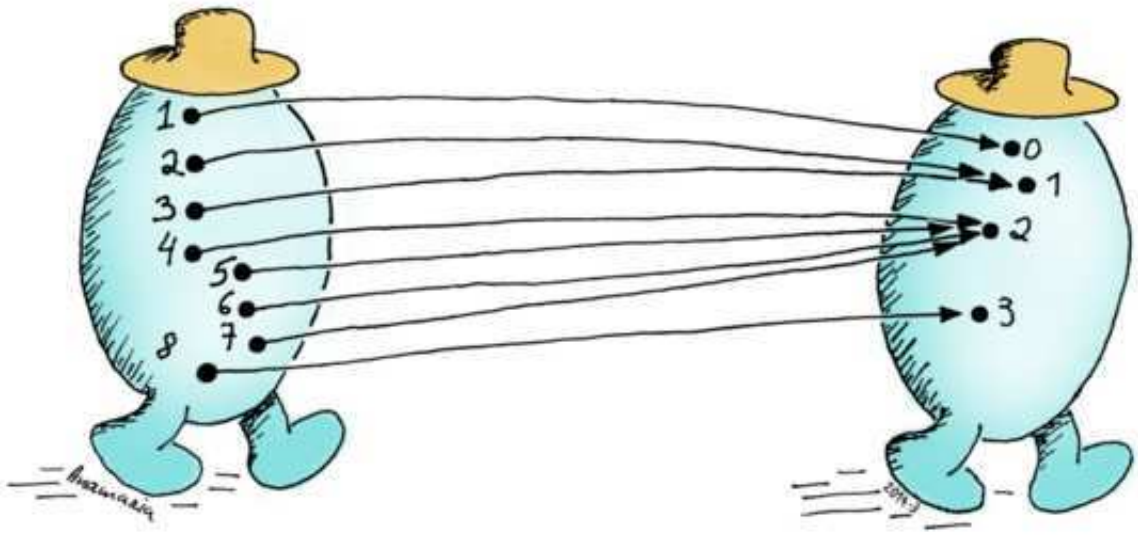
**Exercício 7.36:**

a) Prove que, se $\mathcal{R}$ é uma relação simétrica, então $\mathcal{R}^k$ é simétrica para qualquer inteiro positivo $k$.

b) Seja $\mathcal{R}$ uma relação qualquer sobre um conjunto $A$, e $\mathcal{I}_A$ a identidade sobre $A$. Seja $\mathcal{S}$ a relação $\mathcal{R} \cup \mathcal{R}^- \cup \mathcal{I}_A$. Prove que o fecho transitivo $\mathcal{T}$ de $\mathcal{S}$ é uma relação de equivalência sobre $A$.

# Capítulo 8

# Funções




## 8.1 Conceito

Dizemos que uma relação $\mathcal{F}$ de $A$ para $B$ é uma *função de $A$ para $B$* se, e somente se, para todo $a \in A$ existe exatamente um $b \in B$ tal que $(a, b) \in \mathcal{F}$.

Pelo fato de ser uma relação, uma função $\mathcal{F}$ de $A$ para $B$ é um subconjunto do produto cartesiano $A \times B$, ou seja um conjunto de pares $(a, b)$ com $a \in A$ e $b \in B$, com a propriedade acima. (Veja seção 6.1).

Para indicar que $\mathcal{F}$ é uma função de $A$ para $B$, usa-se geralmente a notação $\mathcal{F} : A \to B$. Para cada elemento $a$ de $A$, é costume indicar por $\mathcal{F}(a)$ o *valor de $\mathcal{F}$ em $a$*, isto é, o único elemento $b$ de $B$ tal que $(a, b) \in \mathcal{F}$. Observe que esta notação só tem sentido para funções, e não para relações em geral.

**Exemplo 8.1:** A relação $\mathcal{F} = \{(1, 40), (2, 30), (3, 30)\}$ é uma função do conjunto $X = \{1, 2, 3\}$ para o conjunto $Y = \{20, 30, 40\}$, isto é $\mathcal{F} : X \to Y$.

**Exemplo 8.2:** A relação $\mathcal{F} = \{(1, 40), (3, 30)\}$ *não* é uma função de $X = \{1, 2, 3\}$ para $Y = \{20, 30, 40\}$, pois para $a = 2 \in X$ *não* existe um $b \in Y$ tal que $(a, b) \in \mathcal{F}$.

**Exemplo 8.3:** A relação $\mathcal{F} = \{(1, 40), (2, 20), (2, 30), (3, 30)\}$ *não* é uma função de $X = \{1, 2, 3\}$ para $Y = \{20, 30, 40\}$, pois para $a = 2 \in X$ existem *dois* valores distintos $b' = 20 \in Y$ e $b'' = 30 \in Y$ tais que $(a, b') \in \mathcal{F}$ e $(a, b'') \in \mathcal{F}$.

**Exemplo 8.4:** A relação $\mathcal{F} = \left\{(x, x^2) : x \in \mathbb{Z}\right\}$ é uma função do conjunto $\mathbb{Z}$ para o conjunto $\mathbb{N}$, isto é $\mathcal{F} : \mathbb{Z} \to \mathbb{N}$.

**Exemplo 8.5:** A relação $\mathcal{F} = \left\{(x^2, x) : x \in \mathbb{Z}\right\}$ *não* é uma função do conjunto $\mathbb{N}$ para o conjunto $\mathbb{Z}$, pois há elementos $a \in \mathbb{N}$ (como $a = 5$) para os quais não existe par $(a, b) \in \mathcal{F}$, e há elementos $a \in \mathbb{N}$ (como $a = 4$) para os quais existem dois pares $(a, b) \in \mathcal{F}$ (no caso, $(4, 2)$ e $(4, -2)$).

Em geral, usaremos letras minúsculas, como $f$, $g$, etc., para relações que são funções.

### 8.1.1 Domínio e imagem de uma função

Uma vez que funções são um tipo particular de relações, todos os conceitos introduzidos para relações (como domínio, composição, inversa, etc.) valem também para funções. Se $f$ é uma função de $A$ para $B$, então, de acordo com a definição, o domínio $\mathrm{Dom}(f)$ de $f$ é sempre o conjunto $A$.

A imagem ou contra-domínio $\mathrm{Img}(f)$ de $f$ é o conjunto

$$Img(f) = \{f(a) : a \in A\} = \{b \in B : (\exists a \in A)\, b = f(a)\}$$

Observe que a imagem está contida no conjunto $B$, mas nem sempre é igual a $B$.

Podemos portanto dizer que duas funções $f : A \to B$ e $g : C \to D$ são a mesma função se, e somente se, $A = C$ e $(\forall a \in A)\, f(a) = g(a)$.

Como observamos no caso de relações em geral, se $f$ é uma função de $A$ para $B$ e $B \subseteq C$, então $f$ também é uma função de $A$ para $C$. Por exemplo, a função *seno* é uma função do conjunto dos números reais $\mathbb{R}$ para o intervalo $B = [-1, +1]$. Como $B$ é um subconjunto de $\mathbb{R}$, então seno também é uma função de $\mathbb{R}$ para $\mathbb{R}$.

Porém, precisamos observar que alguns autores consideram que o conjunto $B$ é parte da definição da função. Nesta abordagem, se $f$ for definida como função de $A$ para $B$, e $C$ for um conjunto diferente de $B$, então $f$ *não* é uma função de $A$ para $C$. Para esses autores, por exemplo, seno pode ser definida como função de $\mathbb{R}$ para $\mathbb{R}$, ou de $\mathbb{R}$ para $[-1, +1]$; mas estas duas escolhas resultam em funções distintas. Neste livro não seguimos essa abordagem: para nós, uma função, assim como uma relação, é apenas o conjunto dos seus pares.

**Exercício 8.1:** Seja $f$ uma função e $\mathcal{R}$ uma relaçao sobre $\mathrm{Dom}(f)$ tal que para todo $x$ e $y$ $x\mathcal{R}y \leftrightarrow f(x) = f(y)$ para todo $x, y \in \mathrm{Dom}(f)$.

- Prove que $\mathcal{R}$ é uma relação de equivalência.
- Encontre as classes de equivalência de $\mathcal{R}$.

## 8.2 Inversa de função

A inversa de uma função $f$ é definida como na seção 6.1.4, ou seja, é a relação

$$f^{-1} = \{ (y, x) : (x, y) \in f \}$$

Note que a inversa de uma função nem sempre é uma função.

**Exemplo 8.6:** Seja $f$ a função de $\mathbb{R}$ para $\mathbb{R}$ tal que $f(x) = x^2$. Sua inversa é a relação

$$f^{-1} = \left\{ (x^2, x) : x \in \mathbb{R} \right\}$$

que associa a cada número real $y \geq 0$ suas duas raízes quadradas $-\sqrt{y}$ e $+\sqrt{y}$.

**Exercício 8.2:** Para cada uma das seguintes funções de $\mathbb{R}$ para $\mathbb{R}$, determine se a inversa é uma função:

1. $f_1(x) = x^3$.
2. $f_2(x) = e^x$.
3. $f_3(x) = \sin x$.
4. $f_4(x) = x^5 + x$.
5. $f_5(x) = x^5 - x$.

## 8.3 Imagem e imagem inversa de um conjunto

Para qualquer função $f$ e qualquer conjunto $X$, verifica-se que a imagem de $X$ sob $f$, definida na seção 6.1.5, é

$$f(X) = \{ f(x) : x \in (X \cap \mathrm{Dom}(f)) \} = \{ y \in \mathrm{Img}(f) : (\exists x \in X)\ f(x) = y \}$$

Note que os elementos de $X$ que não estão em $\mathrm{Dom}(f)$ não contribuem para a imagem. Este conceito é geralmente usado quando $X \subseteq \mathrm{Dom}(f)$. A imagem inversa de um conjunto $Y$ qualquer sob $f$, também definida na seção 6.1.5, é a imagem de $Y$ sob a relação inversa $f^{-1}$, ou seja

$$f^{-1}(Y) = \{ x \in \mathrm{Dom}(f) : f(x) \in Y \} = \{ x \in \mathrm{Dom}(f) : (\exists y \in Y)\ (x, y) \in f \}$$

Observe que a relação $f^{-1}$ pode não ser uma função. Isto não é um problema uma vez que os conceitos de imagem e imagem inversa são definidos para relações em geral.

## 8.4 Restrição

O conceito de restrição de relações pode ser aplicado também a funções. Se $f$ é uma função e $X$ é um conjunto, a notação $f|X$ ou $f|_X$ é frequentemente usada para indicar a restrição de $f$ (vista como relação) aos conjuntos $X$ e $\mathrm{Img}(f)$. Isto é,

$$f|X = f \cap (X \times \mathrm{Img}(f)) = \{ (x, y) : (x, y) \in f \ \wedge\ x \in X \}$$

Este conceito também é geralmente usado quando $X$ é um subconjunto de $\mathrm{Dom}(f)$.

**Exercício 8.3:** Sejam $f$ uma função, $A$, $B$ subconjuntos de $\mathrm{Dom}(f)$ e $U$, $V$ subconjuntos de $\mathrm{Img}(f)$. Prove ou encontre contra-exemplos para cada uma destas afirmações:

- $f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$.
- $f(A \setminus B) = f(A) \setminus f(B)$.
- $B \subseteq A \leftrightarrow f(B) \subseteq f(A)$.
- $f^{-1}(U \cap V) = f^{-1}(U) \cap f^{-1}(V)$.
- $f^{-1}(U \cup V) = f^{-1}(U) \cup f^{-1}(V)$.
- $f^{-1}(U \setminus V) = f^{-1}(U) \setminus f^{-1}(V)$.
- $U \subseteq V \leftrightarrow f^{-1}(U) \subseteq f^{-1}(V)$.
- $f^{-1}(f(A)) = A$.
- $f(f^{-1}(U)) = U$.

**Exercício 8.4:** Seja $f$ uma função de um conjunto $A$ para um conjunto $B$. Considere a relação $\mathcal{R}$ sobre $A$ tal que

$$a\mathcal{R}b \;\leftrightarrow\; f(a) = f(b)$$

para quaisquer elementos $a$ e $b$ de $A$. Esta é uma relação de equivalência? Em caso afirmativo, descreva suas classes de equivalência.

## 8.5 Composição de funções

Uma vez que funções são relações, a composição de duas funções $f$ e $g$ é definida da mesma forma que para relaçoes, ou seja, é a relação

$$g \circ f = \{\, (a, c) : (\exists b)\, (a, b) \in f \wedge (b, c) \in g \,\}$$

Em particular, se $f : A \to B$ e $g : B \to C$, então verifica-se que $g \circ f$ é uma função de $A$ para $C$, e para todo $a \in A$ o valor de $g \circ f$ em $a$ é definido pela fórmula:

$$(g \circ f)(a) = g(f(a))$$

Por exemplo, sejam $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ com $f(x) = 2x + 3$, e $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ com $g(x) = 3x + 2$. Então $(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(2x + 3) = 3(2x + 3) + 2 = 6x + 11$ e $(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(3x + 2) = 2(3x + 2) + 3 = 6x + 7$. Este exemplo mostra que a composição de funções não é comutativa.

Na verdade, demonstra-se que a composição de duas funções quaisquer é sempre uma função. Como vimos na seção 6.2 é também verdade que

$$\mathrm{Dom}(g \circ f) \subseteq \mathrm{Dom}(f)$$

e

$$\mathrm{Img}(g \circ f) \subseteq \mathrm{Img}(g)$$

Além disso, no caso de funções, temos que

$$\mathrm{Img}(f) \subseteq \mathrm{Dom}(g) \Leftrightarrow \mathrm{Dom}(g \circ f) = \mathrm{Dom}(f)$$

e

$$\mathrm{Dom}(g) \subseteq \mathrm{Img}(f) \Leftrightarrow \mathrm{Img}(g \circ f) = \mathrm{Img}(g)$$

As potências de uma função $f$ são definidas da mesma forma que as potências de uma relação. Isto é, $f^1 = f$, e, para todo inteiro $n > 1$,

$$\begin{aligned} f^{n+1} &= f^n \circ f \\ f^{-(n+1)} &= f^{-n} \circ f^{-1} \end{aligned}$$

Todas as potências positivas são funções, com mesmo domínio que $f$. Se a inversa $f^{-1}$ é uma função, então todas as potências negativas são funções, com mesmo domínio que $f^{-1}$.

**Exemplo 8.7:** Seja $f$ a função logaritmo, $f(x) = \log x$, $g$ a função raiz quadrada, $g(y) = \sqrt{y}$. Seja $\mathbb{R}^+$ o conjunto de todo os reais não negativos.

$$\begin{aligned} \mathrm{Dom}(f) &= \mathbb{R}^+ \setminus \{0\} & \qquad \mathrm{Dom}(g) &= \mathcal{R}^+ \\ \mathrm{Img}(f) &= \mathbb{R} & \qquad \mathrm{Img}(g) &= \mathcal{R}^+ \end{aligned}$$

Observe que a imagem de $f$ não está contida no domínio de $g$. A composição $g \circ f$ é a raiz quadrada do logaritmo, $(g \circ f)(x) = \sqrt{\log x}$. O domínio desta função não é $\mathrm{Dom}(f)$, mas o conjunto dos números reais maiores ou iguais a 1, que é subconjunto próprio de $\mathrm{Dom}(f)$. Por outro lado, a imagem de $g \circ f$ é $\mathbb{R}^+$, que neste exemplo é igual a $\mathrm{Img}(g)$.

**Exemplo 8.8:** Sejam $f$ e $g$ as funções logaritmo e raiz quadrada, como no exemplo 8.7. A composição $f \circ g$ é o logaritmo da raiz quadrada, $(f \circ g)(y) = \log \sqrt{y}$; como $\mathrm{Img}(g) \subseteq \mathrm{Dom}(f)$, então $\mathrm{Dom}(f \circ g) = \mathrm{Dom}(g) = \mathbb{R}^+$; e como $\mathrm{Dom}(g) \subseteq \mathrm{Img}(f)$, $\mathrm{Img}(f \circ g) = \mathrm{Img}(f) = \mathbb{R}$.

### 8.5.1 Função idempotente

Uma função $f$ é dita *idempotente* se a composição $f \circ f$ é igual a $f$. Ou seja, se $f(f(x)) = f(x)$ para todo $x \in \mathrm{Dom}(f)$. Esta condição também equivale a dizer que $f$ restrita a $\mathrm{Img}(f)$ é a função identidade sobre $\mathrm{Img}(f)$. Um exemplo é a função $f$ com domínio $\mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$ tal que $f(z)$ é o menor fator primo de $z$.

**Exercício 8.5:** Prove, ou encontre um contra-exemplo, que a composição de duas funções idempotentes é uma função idempotente.

Em álgebra linear, uma transformação linear idempotente é chamada de *projeção*.

## 8.6 Tipos de funções

### 8.6.1 Função injetora

Uma função $f$ de $A$ para $B$ é *injetora* se, e somente se, $(\forall x, y \in A)\,(f(x) = f(y) \rightarrow (x = y)$. Ou seja, se e somente se ela atribui um valor diferente para cada elemento do domínio.

Uma função injetora *preserva informação*, pois o valor de $f(x)$ determina univocamente o valor de $x$. Funções injetoras também são chamadas de funções *um para um*.

**Exercício 8.6:** Sejam $f$ e $g$ duas funções. Prove que se $g \circ f$ não é injetora então pelo menos uma dentre $f$ e $g$ não é injetora.

**Exercício 8.7:** Seja $f$ uma função. Prove que a relação inversa $f^{-1}$ também é uma função se e somente se $f$ é injetora.

**Exercício 8.8:** Sejam $f : A \to C$ e $g : B \to D$ duas funções injetoras. Considere a função $h : A \times B \to C \times D$ tal que

$$h(a, b) = (f(a), g(b))$$

Prove que $h$ é uma função injetora.

**Exercício 8.9:** Sejam $f$ uma função e $A$, $B$ subconjuntos de $\text{Dom}(f)$. Prove que $f(A \cap B) \subseteq f(A) \cap f(B)$. Mais ainda, se $f$ é injetora então $f(A \cap B) = f(A) \cap f(B)$.

**Exercício 8.10:** Sejam $f : A \to B$, $g : B \to C$. Prove que se $f$ e $g$ são injetoras então $g \circ f$ é injetora.

**Exercício 8.11:** Seja $\mathcal{R}$ uma relação de $A$ para $B$. Escreva expressões lógicas formais (sem palavras, apenas variáveis e símbolos), com todos os quantificadores necessários, que expresse as afirmações

a) "A relação $\mathcal{R}$ é transitiva."

b) "A relação $\mathcal{R}$ é uma função injetora."

### 8.6.2 Função sobrejetora

Dizemos que uma função $f$ de $A$ para $B$ é *sobrejetora em $B$* (ou é uma função de $A$ *sobre* $B$) se, e somente se, $(\forall b \in B)\,(\exists a \in A)\, f(a) = b$. Ou seja, $f$ é uma função sobre $B$ se e somente se $B = Img(f)$. Note que não tem sentido dizer que uma função "é sobrejetora" sem especificar em qual conjunto. Por exemplo, a função $f$ com domínio $\mathbb{Z}$ tal que $f(x) = |x|$ é tanto uma função de $\mathbb{Z}$ para $\mathbb{Z}$ quanto de $\mathbb{Z}$ para $\mathbb{N}$; ela é sobrejetora em $\mathbb{N}$, mas não em $\mathbb{Z}$.

**Exercício 8.12:** Sejam $f : A \to B$, $g : B \to C$. Prove que se $f$ é sobrejetora em $B$, e $g$ é sobrejetora em $C$, então $g \circ f$ é sobrejetora em $C$.

### 8.6.3 Função bijetora

**Definição 8.1:** Uma função $f$ de $A$ para $B$ é *bijetora de $A$ para $B$* (ou é uma *bijeção de $A$ para $B$*) se, e somente se, $f$ é injetora e sobrejetora em $B$.

Dito de outra forma, uma relação $f$ é uma bijeção de $A$ para $B$ se, e somente se, $(\forall a \in A)(\exists! b \in B)\,(f(a) = b)$ (isto é, $f$ é uma função de $A$ para $B$ e $(\forall b \in B)(\exists! x \in A)\,(f(x) = b)$). Observe que a inversa de uma bijeção de $A$ para $B$ também é uma bijeção de $B$ para $A$.

Se $f$ é uma bijeção do conjunto $A$ para o conjunto $B$, então verifica-se que a inversa $f^{-1}$ também é uma bijeção do conjunto $B$ para o conjunto $A$. Nesse caso, para todo $a$ em $A$ e todo $b$ em $B$ temos $(f^{-1}(b) = a) \leftrightarrow (f(a) = b)$. Portanto,

$$(\forall a \in A)\, f^{-1}(f(a) = a$$

e

$$(\forall b \in B)\, f(f^{-1}(b) = b$$

Por outro lado, se estas propriedades valem, então $f$ é uma bijeção de $A$ para $B$. Ou seja, $f$ é uma bijeção de $A$ para $B$ se, e somente se, $f^{-1} \circ f = \mathcal{I}_A$ e $f \circ f^{-1} = \mathcal{I}_B$.

Funções bijetoras são muito importantes em matemática e computação. Entre outras coisas, elas permitem definir o "tamanho" de conjuntos infinitos, como veremos no capítulo 14.

**Exercício 8.13:** Sejam $A$ e $B$ dois conjuntos não vazios. Considere a função $p : A \times B \to A$ onde $p((a,b)) = a$. Prove as afirmações abaixo ou dê um contra-exemplo.

1. A funcão $p$ é uma função sobrejetora.
2. A funcão $p$ é uma função bijetora.

## 8.7 Função permutação

Uma *função permutação* de um conjunto $A$, ou uma *permutação* de $A$, é uma função bijetora de $A$ para $A$. Observe que a relação de identidade sobre $A$ é uma permutação (trivial) de $A$.

**Exemplo 8.9:** A função

$$f = \{(10,10),\ (11,12),\ (12,13),\ (13,11),\ (14,15),\ (15,14)\}$$

é uma permutação do conjunto $A = \{10, 11, 12, 13, 14, 15\}$.

**Exemplo 8.10:** Sejam $m, n$ inteiros positivos quaisquer, e seja $A = \{\, x \in \mathbb{N} : x < n \,\}$. Seja $f : A \to A$ tal que $f(x)$ é o resto da divisão de $x + m$ por $n$. Verifica-se que $f$ é uma permutação de $A$

**Exercício 8.14:** Liste todas as permutações do conjunto $A = \{10, 20, 30\}$.

**Exercício 8.15:** Liste todas as permutações do conjunto $A = \{10, 20, 30, 40\}$.

Por ser bijetora, toda permutação de um conjunto $A$ tem uma inversa, que também é uma permutação de $A$. A composição de duas permutações de $A$ é uma permutação de $A$.

Uma permutação $f$ de um conjunto $A$ pode ser interpretada como uma maneira de colocar os elementos de $A$ em um conjunto de caixas, cada uma rotulada com um elemento de $A$. Ou seja, a permutação $f$ está dizendo que o elemento $x$ de $A$ está na caixa de rótulo $f(x)$. Ou, alternativamente, que a caixa de rótulo $x$ contém o elemento $f(x)$.

Uma permutação $f$ também pode ser entendida como uma maneira de trocar o conteúdo de uma coleção de caixas rotuladas com elementos de $A$. Nesse caso, para cada $x$ em $A$, o elemento na caixa de rótulo $x$ deve ser transferido para a caixa de rótulo $f(x)$. Ou então, a caixa de rótulo $x$ deve receber o conteúdo da caixa de rótulo $f(x)$. Nas duas intepretações, entende-se que todas as trocas são realizadas simultaneamente.

Permutações são muito importantes em computação. Por exemplo, a ordenação dos elementos de uma lista de $n$ elementos, ou dos $n$ registros de um arquivo, pode ser vista como a aplicação de uma permutação dos índices $\{0..\, n-1\}$.

Um *elemento fixo* de uma função $f : A \to A$ é um elemento $x \in \mathrm{Dom}(f)$ tal que $f(x) = x$. No exemplo 8.9 o inteiro 10 é um elemento fixo de $f$. Em uma função identidade, todos os elementos do domínio são fixos. Uma permutação que não é a identidade ainda pode ter um ou mais elementos fixos. Os nomes *permutação caótica* ou *desarranjo* são usados para permutações que não tem nenhum elemento fixo.

**Exercício 8.16:** Considere uma caixa quadrada de papelão com tampa. Suponha que os lados da caixa e da tampa são rotulados em ordem anti-horária com inteiros de 0 a 3. Cada maneira de fechar a caixa com a tampa corresponde a uma permutação $f$ do conjunto $A = \{0, 1, 2, 3\}$, tal que $f(k)$ é o lado da tampa que é encaixado sobre o lado $k$ da caixa, para cada $k$ em $A$. Escreva as permutações de $A$ que correspondem a todos os jeitos possíveis de tampar a caixa.

**Exercício 8.17:** Um dado de jogar tem as faces numeradas de 1 a 6, de tal modo tal que faces opostas somam 7. Suponha que o dado é rolado de modo que ele termina na mesma posição onde começou, exceto que algumas faces podem ficar trocadas entre si. A rotação pode ser descrita por uma permutação $f$ do conjunto $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, tal que a face $k$ termina onde estava a face $f(k)$.

1. Liste todas as permutações de $A$ que podem ser obtidas desta forma.
2. Se $f$ e $g$ são duas dessas permutações, qual é o significado da composição $f \circ g$? Ela também é uma dessas permutações?

Se $f$ é função permutação de $A$, todas as potências de $f$, positivas e negativas, são permutações de $A$. Nesse caso define-se também a potência nula $f^0$ de $f$ como sendo a identidade sobre o domínio $A$.

Seja $f$ uma função permutação sobre $A$ e $a$ um elemento de $A$. A *órbita* ou *ciclo de a sob* $f$ é o subconjunto de $A$ obtido por aplicações repetidas de $f$ ou $f^{-1}$ a esse elemento, ou seja, $\{ f^n(a) : n \in \mathbb{Z} \}$. No exemplo 8.9, o ciclo do elemento 11 é $\{11, 12, 13\}$, que também é o ciclo de 13. O ciclo do elemento 10 é $\{10\}$ e o ciclo de 14 é $\{14, 15\}$.

**Exercício 8.18:** Seja $f$ uma permutação de um conjunto finito $A$, e sejam $x, y$ dois elementos de $A$. Prove que os ciclos de $x$ e de $y$ sob $f$ ou são o mesmo conjunto, ou são conjuntos disjuntos.

**Exercício 8.19:** Prove que o fecho transitivo e o fecho reflexivo de uma permutação, sobre um conjunto finito, é uma relação de equivalência. Quem são as classes de equivalência?

Uma *involução* de um conjunto $A$ é uma permutação $f$ sobre $A$ que é sua própria inversa, ou seja $f^{-1} = f$.

**Exercício 8.20:** Seja $f$ uma permutação sobre um conjunto $A$. Prove que as seguintes afirmações são equivalentes:

1. $f$ é uma involução.
2. $f^2 = \mathcal{I}_A$.
3. Todo ciclo de $f$ tem 1 ou 2 elementos.

## 8.8 Funções piso e teto

Em álgebra e cálculo diferencial e integral são estudados muitos exemplos de funções, como raiz quadrada, seno, cosseno, logaritmo, etc. A seguir veremos duas funções que são especialmente importantes em computação.

**Definição 8.2:** A *função piso* (também chamada de *chão* ou *solo*) associa a cada número real $x$ o maior inteiro que é menor ou igual a $x$. Este inteiro é denotado por $\lfloor x \rfloor$.

Observe que $\lfloor 1/3 \rfloor = \lfloor 2/3 \rfloor = 0$, $\lfloor -1/3 \rfloor = \lfloor -2/3 \rfloor = -1$ e $\lfloor 5 \rfloor = 5$.

**Definição 8.3:** A *função teto* associa a cada número real $x$ o menor inteiro que é maior ou igual a $x$. Este inteiro é denotado por $\lceil x \rceil$.

Observe que $\lceil 5/4 \rceil = \lceil 7/4 \rceil = 2$, $\lceil -1/4 \rceil = \lceil -3/4 \rceil = 0$ e $\lceil 4 \rceil = 4$

Tanto o piso quanto o teto são funções do conjunto $\mathbb{R}$ para o conjunto $\mathbb{Z}$. Essas funções tem algumas propriedades importantes:

- $\lfloor x \rfloor = n$ se, e somente se, $n \leq x < n + 1$.
- $\lfloor x \rfloor = n$ se, e somente se, $x - 1 < n \leq x$.
- $\lceil x \rceil = n$ se, e somente se, $n - 1 < x \leq n$.
- $\lceil x \rceil = n$ se, e somente se, $x \leq n < x + 1$.
- $x - 1 < \lfloor x \rfloor \leq x \leq \lceil x \rceil < x + 1$.
- $\lfloor -x \rfloor = -\lceil x \rceil$.
- $\lceil -x \rceil = -\lfloor x \rfloor$.

**Exercício 8.21:** Prove que $\lceil x + n \rceil = \lceil x \rceil + n$ e $\lfloor x + n \rfloor = \lfloor x \rfloor + n$ para todo $x \in \mathbb{R}$ e todo $n \in \mathbb{N}$

**Exercício 8.22:** Prove que as funções piso e teto são idempotentes.

**Exercício 8.23:** Prove, ou dê um contra exemplo, que $\lceil x + y \rceil = \lceil x \rceil + y$ e $\lfloor x + y \rfloor = \lfloor x \rfloor + y$.

**Exercício 8.24:** Seja $\varepsilon$ um número real positivo. Considere a relação $\sim_\varepsilon$ sobre $\mathbb{R}$ tal que

$$x \sim_\varepsilon y \;\leftrightarrow\; \left\lfloor \frac{x}{\varepsilon} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{y}{\varepsilon} \right\rfloor$$

para quaisquer $x$ e $y$ em $\mathbb{R}$. Esta é uma relação de equivalência? Em caso afirmativo, descreva suas classes de equivalência.

**Exercício 8.25:** O dia da semana do dia primeiro de janeiro de um ano $n \geq 1582$ pode ser determinado pela fórmula:

$$\left( n + \left\lfloor \frac{n-1}{4} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{n-1}{100} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{n-1}{400} \right\rfloor \right) \mod 7$$

Se o resultadp for 0, o dia primeiro de janeiro cai num domingo, se for 1 numa segunda-feira, etc..

- Use essa fórmula para encontrar o dia da semana de primeiro de janeiro do ano de seu aniversário.
- Justifique esta fórmula.

**Exercício 8.26:** Prove que um inteiro positivo $d$ divide um inteiro $n$ se, e somente se, $n = d \lfloor n/d \rfloor$.

## 8.9 Fatorial e função gama

Uma função importante em computação é o *fatorial* de um número natural $n$, denotado por $n!$ e definido como o produto

$$n! = \prod_{k=1}^{n} k = 1 \cdot 2 \cdot 3cdot \cdots \cdot (n-1) \cdot n \tag{8.1}$$

Por exemplo, $1! = 1$, $2! = 1 \cdot 2 = 2$, $5! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 = 120$, etc.. Note que quando $n$ é zero a produtória acima é vazia, portanto $0! = 1$.

A *função gama*, denotada por $\Gamma$, é uma variante do fatorial; mais precisamente,

$$\Gamma(n) = (n-1)! \tag{8.2}$$

para todo inteiro *positivo* $n$. Portanto,

$$n! = \Gamma(n+1) \tag{8.3}$$

para todo número natural $n$. Por exemplo, $\Gamma(1) = 1$, $\Gamma(2) = 1$, $\Gamma(5) = 24$, etc.. Observe que $\Gamma(0)$ não é definido.

A função gama é na verdade definida para qualquer número real (ou complexo), exceto 0 e inteiros negativos, pela fórmula

$$\Gamma(z) = \int_0^\infty t^{z-1} e^{-t}\, dt \tag{8.4}$$

Por exemplo, $\Gamma(1/2)$ é definido como $\sqrt{\pi}$. A função gama é muito usada em análise combinatória, na teoria da probabilidade e na estatística.

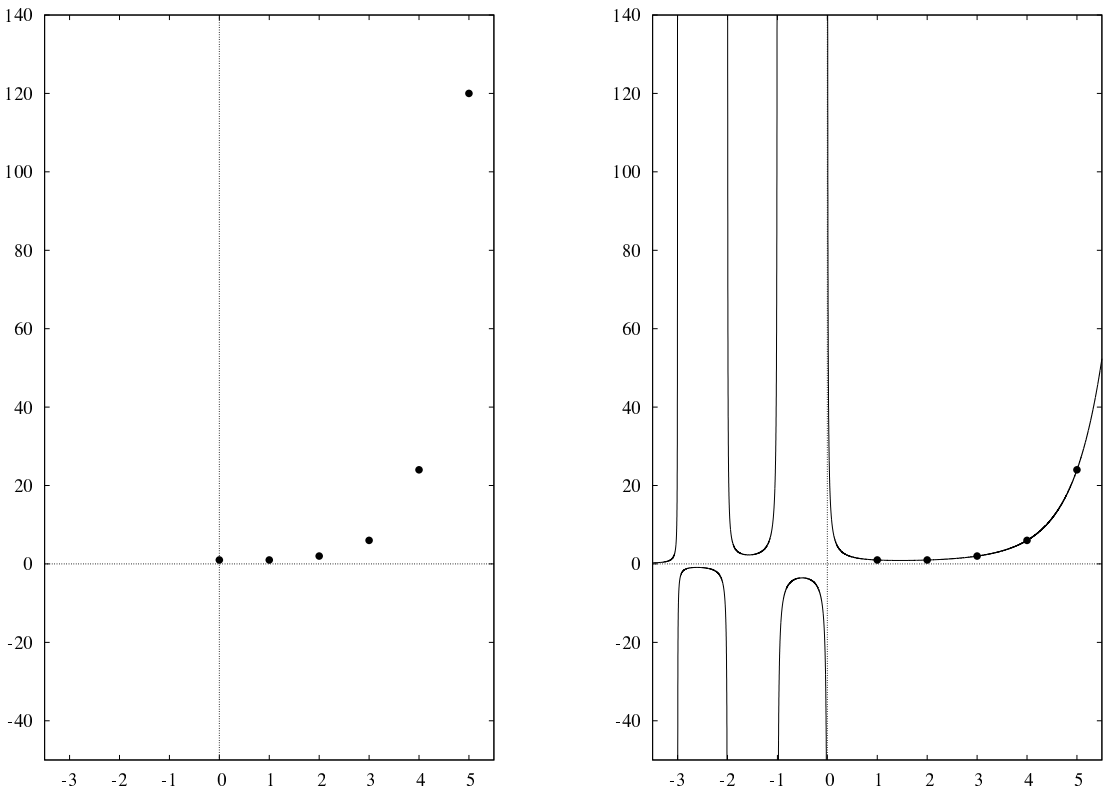



Figura 8.1: À esquerda, um gráfico da função fatorial, que dado $n$ devolve $n!$, para $n \in \{0, 1, \ldots, 5\}$. À direita, um gráfico da função $\Gamma$ (linha contínua) e de $(n-1)!$ (pontos).

## 8.10 Função característica

A *função característica* de uma conjunto $A$ qualquer é uma função $f$ cujo domínio é o conjunto universal $\mathcal{U}$, e tal que, para qualquer elemento $z$, $f(z)$ é um valor lógico, **V** se $z$ pertence a $A$, e **F** caso contrário. Denotaremos esta função por $\chi_A$.

Ou seja $\chi_A(z)$ tem o mesmo valor lógico que a fórmula "$z \in A$". Podemos ver a função $\chi_A$ como uma representação do conjunto $A$.

Em alguns contextos é mais conveniente definir a função característica como tendo valores 1 e 0, em vez de **V** e **F**, respetivamente. Além disso, se todos os conjuntos de interesse são subconjuntos de um conjunto principal $V$, pode ser preferível usar $V$ como domínio das funções caraterísticas, em vez de $\mathcal{U}$.

**Exercício 8.27:** Qual é a função característica do conjunto vazio?

## 8.11 Multiconjunto

Em certos contextos é desejável trabalhar com uma coleção de elementos onde pode haver elementos repetidos; sendo que a ordem dos elementos não importa, mas importa o número de vezes que cada elemento ocorre.

Por exemplo, considere um polinômio $p$ cujo monômio de grau mais alto tem coeficiente 1; ou seja, $p(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} + \cdots + a_1x + a_0$, onde cada $a_i$ é um número complexo. Um teorema fundamental da álgebra diz que tal polinômio pode ser escrito como o produto de $n$ fatores lineares

$$p(x) = (x - z_1)(x - z_2) \cdots (x - z_n) \tag{8.5}$$

Portanto o poliômio $p$ é determinado unicamente pela coleção de suas raízes $z_1, z_2, \ldots, z_n$. Observe que a ordem destas raízes não importa, mas a mesma raiz pode ocorrer mais de uma vez no produto acima, e o número de vezes é importante. Por exemplo, o polinômio com raízes 1, 2, 2, 3 é

$$(x - 1)(x - 2)(x - 2)(x - 3) = x^4 - 8x^3 + 23x^2 - 28x + 12 \tag{8.6}$$

enquanto que o polinômio com raízes 1, 1, 2, 3 é

$$(x - 1)(x - 1)(x - 2)(x - 3) = x^4 - 7x^3 + 17x^2 - 17x + 6 \tag{8.7}$$

Este conceito é comumente chamado *multiconjunto* (ou, mais raramente, *conjunto com multiplicidade*, *conjunto com repetição*, ou *coleção*). O número de vezes que um elemento $z$ ocorre em um multiconjunto $A$ é a *multiplicidade de $z$ em $A$*, que denotaremos por $\mu_A(z)$.

Podemos entender um multiconjunto $A$ considerando a multiplicidade $\mu_A$ como uma generalização do conceito de função característica, cujo valor para cada elemento $z$ de $\mathcal{U}$ pode ser um número natural, em vez de apenas 0 ou 1.

## 8.12 Sequências finitas

Uma *sequência finita* é uma função $x$ cujo domínio é um intervalo de inteiros $\{n \in \mathbb{Z} : r \le n \le s\}$, onde $r$ e $s$ são inteiros; que pode ser abreviado para $\{r..s\}$. Se os valores de $x$ pertencem a um conjunto $A$, dizemos que $x$ é uma sequência finita *sobre* $A$. Em algumas áreas da matemática e da computação, sequências finita também são chamadas de *listas*, *palavras*, *cadeias* ou *ênuplas* (vide seção 2.10.2).

A imagem de um inteiro $n$ por uma sequência $x$ é habitualmente denotada por $x_n$ (em vez de $x(n)$). Os pares $(n, x_n)$ são os *termos* ou *elementos* da sequência; o inteiro $n$ é o *índice* do termo, e $x_n$ é seu *valor*. Os inteiros $r$ e $s$ são o *índice inicial* e o *índice final* da sequência.

> **Exemplo 8.11:** Seja $x : \{2..6\} \to \mathbb{R}$ cujos termos são $\{(2, 4), (3, 9), (4, 16), (5, 25), (6, 36)\}$. Podemos então escrever que $x_2 = 4$, $x_3 = 9$, e $x_n = n^2$ para todo $n \in \{2..6\}$.

Note que uma sequência especifica não apenas os valores dos termos mas também sua ordem e seus índices. Note também que uma sequência pode ter mais de um termo com o mesmo valor. Duas sequências são iguais se, e somente se, elas tem exatamente os mesmos termos — mesmos índices e mesmos valores.

### 8.12.1 Notação para sequências finitas

Quando o índice inicial $r$ é especificado pelo contexto, uma sequência finita é geralmente denotada colocando-se os valores dos termos entre parênteses e separados por vírgulas. Por exemplo, se

convencionamos que os índices começam com zero, a notação $(1, 2, 2, 5)$ representa a sequência $\{(0, 1), (1, 2), (2, 2), (3, 5)\}$.

Como observamos na seção 2.10.2, a sequência $(2)$ não é a mesma coisa que o inteiro 2. Além disso, pela definição acima, a sequência $(2, 3)$ não é a mesma coisa que o par ordenado $(2, 3)$. Devido a esta confusão, alguns autores (e algumas linguagens de programação) usam outros símbolos, como colchetes angulares $\langle \ldots \rangle$, ou colchetes comuns $[\ldots]$, no lugar de parênteses para denotar sequências.

Note que há também uma diferença entre a sequência $(2, 3)$ e o conjunto $\{2, 3\}$.

### 8.12.2 Índice inicial padrão

Em matemática (e em algumas linguagens de programação, como `FORTRAN`), o índice inicial de uma sequência é geralmente 1 por convenção. Uma vantagem desta escolha é que o $n$-ésimo elemento de uma sequência $x$ é $x_n$.

Alguns autores, entretanto, preferem numerar os termos a partir de 0. Note que, neste caso, em uma sequência com $n$ termos os índices variam de 0 a $n - 1$. Além disso, o elemento de índice $k$ (ou seja $x_k$) é o $k + 1$-ésimo elemento da sequência. Mesmo assim, a numeração a partir de 0 tem certas vantagens em computação e é o padrão de várias linguagens de programação modernas, como `C`, `Java` e `Python`.

### 8.12.3 Comprimento

O *comprimento* de uma sequência finita é o número de termos, geralmente denotado por $|x|$.

> **Exercício 8.28:** Se uma sequência tem índice inicial $r$ e índice final $s$, qual é o seu comprimento? Se ela tem índice inicial 0 e comprimento $n$, qual é o índice final? E se ela tem índice inicial 1 e comprimento $n$?

Há uma única sequência de comprimento zero, a *sequência vazia*, denotada por $()$, que tem domínio vazio e portanto não tem nenhum termo. Neste caso os índices inicial e final não são definidos. Note que o intervalo $\{r .. s\}$ é vazio para quaisquer $r$ e $s$ com $r > s$.

### 8.12.4 Concatenação

Informalmente, a *concatenação* de duas sequências finitas $x$ e $y$ é uma sequência finita que tem todos os termos de $x$, seguidos de todos os termos de $y$. Por exemplo, a concatenação de $(10, 20, 30)$ e $(40, 50)$ é $(10, 20, 30, 40, 50)$.

Esta operação pode ser indicada de muitas maneiras, por exemplo com um ponto $x \cdot y$, com uma barra $x|y$ ou com a mera justaposição $xy$. Obviamente, o comprimento da concatenação é a soma dos comprimentos das duas sequências.

Para definir precisamente este conceito é preciso estabelecer um índice inicial para a sequência resultante. Por exemplo, se convencionarmos que todas as sequências tem índice inicial zero, a concatenação é a sequência $z$ tal que

$$z_n = \begin{cases} x_n, & \text{se } 0 \le n < p \\ y_{n-p}, & \text{se } p \le n < p + q \end{cases} \tag{8.8}$$

onde $p = |x|$ e $q = |y|$.

**Exercício 8.29:** Adapte a fórmula da concatenação (8.8) para a convenção em que todas as sequências tem índice inicial 1.

**Exercício 8.30:** Escreva a fórmula geral da concatenação (8.8) para o caso em que os domínios de $x$ e $y$ são $\{r'..s'\}$ e $\{r''..s''\}$, respectivamente, e o índice inicial do resultado é $r$.

Observe que, se o índice inicial é fixo, a concatenação com a sequência vazia não tem efeito nenhum: $x \cdot () = () \cdot x = x$ para qualquer sequência finita $x$.

### 8.12.5 Subsequências e subcadeias

Segundo alguns autores, uma *subsequência* de uma sequência $x$ é simplesmente uma restrição $y$ de $x$ a um subconjunto $R$ de seu domínio. Por exemplo, segundo esta definição, a função $y = \{(3,30),(5,20)\}$ é a subsequência de $x = \{(2,20),(3,30),(4,30),(5,20)\}$ determinada pelo conjunto $R = \{3,5\}$.

Uma desvantagem desta definição é que a subsequência nem sempre é uma sequência, pois o novo domínio $R$ nem sempre é um intervalo de inteiros consecutivos. Por esse motivo, alguns autores especificam que os termos da subsequência devem ter seus índices alterados para inteiros consecutivos a partir de um início convencional. Com esta definição, e com índice inicial 0, a função $y = \{(0,30),(1,20)\}$ é a subsequência de $x = \{(0,20),(1,30),(2,30),(3,20)\}$ determinada pelo conjunto $R = \{1,3\}$.

Alguns autores usam a palavra *subcadeia* para indicar que o conjunto $R$ é um intervalo de inteiros. Muitas linguagens de programação incluem funções para extrair subcadeias de cadeias dadas.

# Capítulo 9

# Somatórias e produtórias

## 9.1 Introdução

Muitas quantidades importantes em matemática são definidas como a soma de uma quantidade variável de parcelas também variáveis, por exemplo a soma $2^1 + 2^2 + \cdots + 2^n$, para algum inteiro $n$. Para estas situações, uma notação muito prática é a *somatória* (também chamada *somatório* ou *notação sigma*), introduzida por Joseph Fourier em 1820. Nesta notação, a soma acima é escrita

$$\sum_{k=1}^{n} 2^k \qquad \text{ou} \qquad \sum\nolimits_{k=1}^{n} 2^k$$

Em geral, a notação sigma tem a forma

$$\sum_{k=m}^{n} f(k) \qquad \text{ou} \qquad \sum\nolimits_{k=m}^{n} f(k)$$

onde $k$ é uma variável arbitrária (o *índice* ou a *variável indexadora*), $f(k)$ é uma fórmula qualquer que depende de $k$ (o *termo geral* da somatória), e $m, n$ são inteiros que não dependem de $k$. Esta notação nos diz para incluirmos na soma precisamente aqueles termos $f(k)$ onde $k$ é um inteiro maior ou igual a $m$ e menor ou igual a $n$, ou seja $m \le k \le n$. Esta soma também pode ser escrita

$$\sum_{\substack{k \\ m \le k \le n}} f(k)$$

Costuma-se simplificar esta notação para

$$\sum_{m \le k \le n} f(k)$$

quando a variável índice $k$ é óbvia pelo contexto. Observe que se $f(k)$ tem o mesmo valor para dois (ou mais) índices $k$ diferentes entre $m$ e $n$, esse valor deve ser somado duas (ou mais) vezes. Por exemplo, na somatória $\sum_{k=1}^{4} k(5-k)$, as parcelas são 4, 6, 6, 4; portanto a soma é 20.

Uma variante mais geral da notação $\Sigma$ é

$$\sum_{\substack{k \\ P(k)}} f(k)$$

onde $k$ é a variável índice, e $P$ é algum predicado sobre inteiros. Ela representa a soma de todos os valores $f(k)$ para todos os inteiros $k$ tais que $P(k)$ é verdadeiro. Esta forma é mais comum quando temos restrições mais complicadas sobre os índices, como por exemplo

$$\sum_{\substack{1 \le k \le 10 \\ k \text{ ímpar}}} k^2 = 1^2 + 3^2 + 5^2 + 7^2 + 9^2 \tag{9.1}$$

$$\sum_{\substack{p \text{ primo} \\ p \text{ divide } 140}} \frac{1}{p} = \frac{1}{2} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} \tag{9.2}$$

Outra variante similar desta notação é

$$\sum_{k \in K} f(k)$$

onde $K$ é um conjunto qualquer. Esta notação significa a soma dos valores de $f(k)$ para todos os elementos de $K$, sendo cada elemento considerado exatamente uma vez. Por exemplo, se $K = 1, 2, 7, 8$,

$$\sum_{k \in K} k(9-k) = 1 \cdot 8 + 2 \cdot 7 + 7 \cdot 2 + 8 \cdot 1 = 44 \tag{9.3}$$

Em qualquer caso, chamaremos de *domínio* da somatória o conjunto dos índices dos seus termos.

Observe que se o domínio é vazio, o valor da somatória é zero, por definição. Em particular, a somatória $\sum_{k=m}^{n} f(k)$ é zero sempre que $m > n$.

## 9.2 Somatórias básicas

Algumas somatórias simples tem fórmulas explícitas. Por exemplo:

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n} 1 &= n \\
\sum_{k=1}^{n} k &= \frac{n(n+1)}{2} = \binom{n+1}{2} \\
\sum_{k=1}^{n} k^2 &= \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \\
\sum_{k=1}^{n} k^3 &= \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2 \\
\sum_{k=0}^{n-1} 2^k &= 2^n - 1
\end{aligned}$$

Estas fórmulas podem ser demonstradas facilmente por indução sobre o valor de $n$ (veja exercício 5.30).

## 9.3 Manipulação de somatórias

A notação $\Sigma$ pode ser manipulada de várias maneiras. Em primeiro lugar, observe que a variável índice $k$ pode ser substituída por qualquer outra letra $i, j, l, \ldots$ que não tenha significado definido no contexto. Podemos também trocar a variável indexadora $k$ por uma variável relacionada a ela de maneira biunívoca, com o intervalo de variação devidamente ajustado.

**Exemplo 9.1:** Trocando a variável $k$ pela variável $i = k - 1$, temos

$$\sum_{k=1}^{n} 2^k = \sum_{i=0}^{n-1} 2^{i+1}$$

Note que para identificar o intervalo da variável $i$ usamos a equação $i = k - 1$, enquanto que para modificar o termo usamos a equação equivalente $k = i + 1$.

**Exemplo 9.2:** Podemos simplificar a somatória (9.1) trocando a variável $k$ por $2i + 1$, resultando em

$$\sum_{i=0}^{\lfloor (n-1)/2 \rfloor} (2i+1)^2$$

Note que a equação (9.2) não pode ser simplificada desta maneira, pois não se conhece uma fórmula explícita para os números primos.

Damos a seguir mais algumas regras básicas. Nestas somatórias, o domínio $K$ é um conjunto qualquer de inteiros, e $f, g$ são funções de inteiros para números reais.

- *Distributividade*: Para qualquer número $c$

$$\sum_{k\in K} cf(k) = c\left(\sum_{k\in K} f(k)\right)$$

  Esta propriedade nos permite mover fatores constantes (que não dependem do índice) para dentro ou para fora da somatória.

- *Associatividade*:

$$\sum_{k\in K}(f(k)+g(k)) = \sum_{k\in K} f(k) + \sum_{k\in K} g(k)$$

  A associatividade nos permite substituir uma somatória de somas pela soma de somatórias sobre os mesmos índices, ou vice-versa.

- *Decomposição do domínio*: Se $\{K_1, K_2\}$ é uma partição de $K$, então

$$\sum_{k\in K} f(k) = \left(\sum_{k\in K_1} f(k)\right) + \left(\sum_{k\in K_2} f(k)\right)$$

  Esta regra diz que podemos quebrar uma somatória em duas somatórias parciais, desde que cada valor do índice apareça no domínio de uma, e apenas uma, dessas duas partes. Esta regra pode ser generalizada para partições do domínio $K$ em qualquer número de partes.

- *Comutatividade*: Se $p$ é uma permutação qualquer de $K$,

$$\sum_{k\in K} f(k) = \sum_{k\in K} f(p(k))$$

  A comutatividade nos diz que podemos colocar os termos em qualquer ordem. Uma versão mais geral desta regra é:

- *Troca de domínio*: Se $p$ é uma função bijetora qualquer de $K$ para um conjunto $J \subseteq \mathbb{Z}$,

$$\sum_{k\in K} f(p(k)) = \sum_{j\in J} f(j)$$

  Note que troca de variável indexadora, como as dos exemplos 9.1 e 9.2, são casos particulares desta regra.

**Exemplo 9.3:** Seja $x$ uma sequência qualquer de números reais, e considere a somatória $\sum_{k=1}^{n}(x_{k+1} - x_k)$. Usando as regras acima, podemos reescrever a somatória como segue:

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n}(x_{k+1} - x_k) &= \sum_{k=1}^{n} x_{k+1} - \sum_{k=1}^{n} x_k \\
&= \sum_{i=2}^{n+1} x_i - \sum_{k=1}^{n} x_k \\
&= \sum_{i=2}^{n} x_i + x_{n+1} - x_1 - \sum_{k=2}^{n} x_k \\
&= x_{n+1} - x_1
\end{aligned}$$

A identidade do exemplo 9.3 é conhecida como *somatória telescópica* porque uma parte de cada parcela "está encaixada em" (isto é, cancela) uma parte da parcela anterior, como ocorre com as peças de uma luneta. Podemos usar esta identidade para provar as fórmulas das somatórias de quadrados e cubos da seção 9.2.

**Exemplo 9.4:** Para calcular a somatória $\sum_{k=1}^{n} k^2$, observamos que $(k+1)^3 = k^3 + 3k^2 + 3k + 1$, portanto $(k+1)^3 - k^3 = 3k^2 + 3k + 1$. Temos então que

$$\sum_{k=1}^{n}((k+1)^3 - k^3) = \sum_{k=1}^{n}(3k^2 + 3k + 1)$$

O lado esquerdo é uma soma telescópica, portanto temos

$$(n+1)^3 - 1 = 3\sum_{k=1}^{n} k^2 + 3\sum_{k=1}^{n} k + \sum_{k=1}^{n} 1$$

ou seja

$$\begin{aligned} 3\sum_{k=1}^{n} k^2 &= (n+1)^3 - 1 - 3\sum_{k=1}^{n} k - \sum_{k=1}^{n} 1 \\ &= (n+1)^3 - 1 - 3n(n+1)/2 - n \\ &= (2n^3 + 3n^2 + n)/2 \end{aligned}$$

Logo

$$\sum_{k=1}^{n} k^2 = (n(n+1)(2n+1))/6$$

**Exemplo 9.5:** Calcular a soma $\sum_{k=1}^{n} k(k+1)$.

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{n} k(k+1) &= \sum_{k=1}^{n} k^2 + \sum_{k=1}^{n} k \\ &= (1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2) + (1 + 2 + 3 + \cdots + n) \\ &= n(n+1)(2n+1)/6 + n(n+1)/2 \\ &= n(n+1)(n+2)/3 \end{aligned}$$

**Exemplo 9.6:** Calcular a somatória $\sum_{k=0}^{n-1} 2^k$. Observe que $2^k = 2^{k+1} - 2^k$.

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{n-1} 2^k &= \sum_{k=0}^{n-1}(2^{k+1} - 2^k) \\ &= 2^n - 2^0 \\ &= 2^n - 1 \end{aligned}$$

**Exemplo 9.7:** Calcular a somatória $\sum_{k=1}^{n} k2^{k-1}$. Observe que $2^{k-1} = 2^k - 2^{k-1}$.

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n} k2^{k-1} &= \sum_{k=1}^{n} k(2^k - 2^{k-1}) \\
&= \sum_{k=1}^{n} k2^k - \sum_{k=1}^{n} k2^{k-1} \\
&= \sum_{k=1}^{n} k2^k - \sum_{k=0}^{n-1} (k+1)2^k \\
&= \sum_{k=1}^{n} k2^k - \sum_{k=0}^{n-1} k2^k - \sum_{k=0}^{n-1} 2^k \\
&= n2^n - \sum_{k=0}^{n-1} 2^k \\
&= n2^n - (2^n - 1) \\
&= 2^n(n-1) + 1
\end{aligned}$$

**Exercício 9.1:**[Soma de PA] Calcule a somatória $\sum_{k=0}^{n-1}(a + rk)$, cujas $n$ parcelas são parte de uma progressão aritmética com termo inicial $a$ e passo $r$ arbitrários.

**Exercício 9.2:** Calcule a somatória $\sum_{k=0}^{n-1} b^k$ para um número real $b$ arbitrário diferente de 1 e 0. Observe que $b^k = (b^{k+1} - b^k)/(b-1)$.

**Exercício 9.3:**[Soma de PG] Calcule a somatória $\sum_{k=0}^{n-1} ar^k$, cujas $n$ parcelas são parte de uma progressão geométrica com termo inicial $a$ e razão $r$ arbitrários.

**Exercício 9.4:** Calcule a somatória $\sum_{k=1}^{n} 1/k(k+1)$.

**Exercício 9.5:** Prove, por indução em $n$, que

$$\sum_{k=1}^{n} \operatorname{sin} k\alpha = \frac{\left(\operatorname{sin} \frac{n}{2}\alpha\right)\left(\operatorname{sin} \frac{n+1}{2}\alpha\right)}{\operatorname{sin} \frac{1}{2}\alpha}$$

para todo $n \in \mathbb{N}$, e todo ângulo $\alpha$ que não é um múltiplo inteiro de $2\pi$.

**Exercício 9.6:** Sejam $F_0$, $F_1$, $F_2$, ... os números de Fibonacci, definidos recursivamente por $F_0 = 0$, $F_1 = 1$, e $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$ para todo número natural $n$. Prove, por indução em $n$, que

1. $(\forall n \in \mathbb{N})\ \sum_{i=1}^{n} F_i = F_{n+2} - 1$
2. $(\forall n \in \mathbb{N})\ \sum_{i=1}^{n} F_i^2 = F_n F_{n+1}$

**Exercício 9.7:** Sejam $a$ e $b$ número reais distintos. Prove que, para todo $n$ em $\mathbb{N}$, vale a igualdade:

$$\sum_{i=0}^{n} a^i b^{n-i} = \frac{b^{n+1} - a^{n+1}}{b - a}$$

## 9.4 Somatórias múltiplas

Os termos de uma somatória podem ser especificados por dois ou mais índices, como no exemplo abaixo:

$$\sum_{\substack{j,k \\ 1\le j\le 3 \\ 2\le k\le 4}} f(j,k) = \begin{array}{l} f(1,2)+f(1,3)+f(1,4)+ \\ f(2,2)+f(2,3)+f(2,4)+ \\ f(3,2)+f(3,3)+f(3,4) \end{array} \tag{9.4}$$

Este mesmo exemplo pode ser também escrito usando duas vezes a notação Σ, isto é, como uma somatória de somatórias:

$$\sum_{\substack{j,k \\ 1\le j\le 3 \\ 2\le k\le 4}} f(j,k) = \sum_{1\le j\le 3} \sum_{2\le k\le 4} f(j,k) = \begin{array}{l} (f(1,2)+f(1,3)+f(1,4))+ \\ (f(2,2)+f(2,3)+f(3,4))+ \\ (f(3,2)+f(3,3)+f(3,4)) \end{array} \tag{9.5}$$

ou então

$$\sum_{\substack{j,k \\ 1\le j\le 3 \\ 2\le k\le 4}} f(j,k) = \sum_{2\le k\le 4} \sum_{1\le j\le 3} f(j,k) = \begin{array}{l} (f(1,2)+f(2,2)+f(3,2))+ \\ (f(1,3)+f(2,3)+f(3,3))+ \\ (f(1,4)+f(3,4)+f(3,4)) \end{array} \tag{9.6}$$

Podemos entender as fórmulas (9.5) e (9.6) como duas maneiras de somar todos os elementos de uma matriz: coluna por coluna ou linha por linha.

### 9.4.1 Mudança de ordem de somatórias

As fórmulas (9.5) e (9.6) dizem que podemos trocar a ordem de duas somatórias, quando o domínio de cada variável é independente da outra variável:

$$\sum_{j\in J}\sum_{k\in K} f(j,k) = \sum_{\substack{j\in J \\ k\in K}} f(j,k) = \sum_{k\in K}\sum_{j\in J} f(j,k).$$

Quando o domínio da soma interna depende da variável índice da somatória externa, a troca exige mais cuidado. Por exemplo,

$$\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=j}^{n} a_{j,k} = \sum_{1\le j\le k\le n} a_{j,k} = \sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{k} a_{j,k}.$$

Para entender esta transformação, veja a figura 9.1. Os pontos representam todos os pares $(j,k)$ considerados na somatória central. As setas sólidas indicam a ordem descrita pela somatória dupla da esquerda (por linhas), e as setas tracejadas indicam a da direita (por colunas).

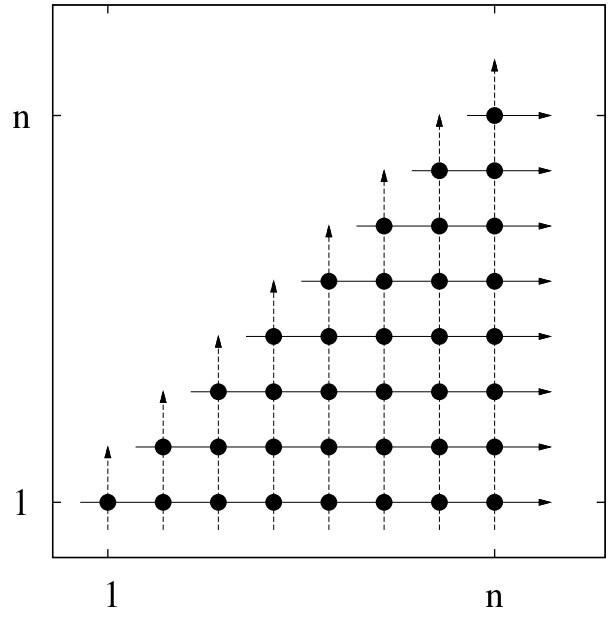



Figura 9.1: Duas maneiras de calcular uma soma dupla. O eixo horizontal é a variável $k$, o eixo vertical é a variável $j$.

**Exercício 9.8:** Para todo número inteiro positivo $n$, o $n$-ésimo número hamônico é

$$H_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} \ldots \frac{1}{n}.$$

Prove que, para todo inteiro $n$ maior ou igual a 2,

$$\sum_{k=1}^{n} H_k = (n+1)H_n - n.$$

### 9.4.2 Distributividade generalizada

Outra regra importante para somatórias duplas é a da *distributividade generalizada*, que permite trocar o produto de duas somatórias por uma somatória dupla. Para quaisquer conjuntos $J, K \subseteq \mathbb{Z}$, e quaisquer funções $f : J \to \mathbb{R}$, $g : K \to \mathbb{R}$

$$\left(\sum_{j\in J} f(j)\right)\left(\sum_{k\in K} g(k)\right) = \sum_{\substack{j\in J \\ k\in K}} f(j)g(k) = \sum_{j\in J}\sum_{k\in K} f(j)g(k) \tag{9.7}$$

Note que esta regra também permite trocar uma somatória dupla por um produto de duas somatórias. Para isso basta que o domínio da somatória interna não dependa do índice da soma externa, e que o termo geral possa ser fatorado no produto de duas fórmulas, cada uma delas dependendo de um dos dois índices apenas.

## 9.5 Majoração de somatórias

Muitas vezes não precisamos saber o valor exato de uma somatória, basta saber um limitante superior ou inferior.

### 9.5.1 Majoração dos termos

Algumas vezes um bom limitante para o valor de uma somatória pode ser obtido limitando cada um de seus termos pelo termo de maior valor. Por exemplo:

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n} \frac{k+1}{k} &= \frac{2}{1} + \frac{3}{2} + \cdots + \frac{n}{n-1} \\ &\leq \sum_{k=1}^{n} 2 \\ &= 2n.\end{aligned}$$

Também podemos majorar cada termo da somatória por alguma outra fórmula cuja somatória é conhecida. Por exemplo, observe que, para todo $k \in \mathbb{N}$, temos

$$\frac{k}{k+1} 2^k < 2^k$$

Podemos então concluir que

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n} \frac{k}{k+1} 2^k &< \sum_{k=0}^{n} 2^k \\ &= 2^{n+1} - 1.\end{aligned}$$

**Exercício 9.9:** Prove que, para todo $n \in \mathbb{N}$,

$$H_{2^n} \geq 1 + \frac{n}{2}.$$

### 9.5.2 Majoração por indução matemática

No capítulo 5 discutimos a técnica de prova por indução matemática e vimos como usá-la para verificar uma fórmula explícita exata para o resultado de uma somatória. Esta técnica pode ser usada também para provar um limitante superior ou inferior para uma somatória.

**Exemplo 9.8:** Prove que existe uma constante $c > 0$ tal que

$$\sum_{i=0}^{n} 3^i \leq c3^n$$

para todo $n \in \mathbb{N}$.

Embora esta somatória tenha uma fórmula conhecida (soma de progressão geométrica), vamos tentar mostrar a desigualdade sem usar essa fórmula.

**Prova:**

A tese a ser provada tem a forma $(\exists c > 0)(\forall n \in \mathbb{N})\, P(n)$, portanto somente pode ser provada por indução se escolhermos um valor adequado para $c$. Para isso, podemos escrever um rascunho da demonstração da parte $(\forall n \in \mathbb{N})\, P(n)$, por indução em $n$, deixando o valor de $c$ em aberto; e depois escolher um valor de $c$ que torna todas as partes dessa demonstração válidas.

- *Base*: para $n = 0$, a afirmação $P(n)$ é

$$\sum_{i=0}^{0} 3^i = 3^0 = 1 \leq c \cdot 1$$

  Esta desigualdade será válida se $c$ for maior ou igual a 1.

- *Hipótese de indução*: suponhamos que a desigualdade é verdadeira para algum $k$, ou seja

$$\sum_{i=0}^{k} 3^i \leq c3^k$$

- *Passo de indução*: temos de provar que a desigualdade é verdadeira para $k+1$, isto é temos que mostrar que:

$$\sum_{i=0}^{k+1} 3^i \leq c3^{k+1}$$

  Temos que

$$\sum_{i=0}^{k+1} 3^i = \sum_{i=0}^{k} 3^i + 3^{k+1}$$

  Usando a hipótese de indução, temos

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^{k+1} 3^i &\leq c3^k + 3^{k+1} \\ &= \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{c}\right) c3^{k+1} \end{aligned}$$

  Precisamos agora concluir que

$$\left(\frac{1}{3} + \frac{1}{c}\right) c3^{k+1} \leq c3^{k+1}$$

  Isto é verdade se $c \geq 3/2$.

Portanto se escolhermos $c = 3/2$, tanto a base quanto o passo da indução estarão corretos, e a afirmação $(\forall n \in \mathbb{N})\, P(n)$ ficará provada.

**Fim.**

### 9.5.3 Majoração por integrais

Uma somatória pode ser vista como uma versão discreta de uma integral. Algumas propriedades são de fato comuns aos dois conceitos: por exemplo, se $f$ é um polinômio de grau $g$, tanto a somatória $\sum_{k=0}^{n} f(k)$ quanto a integral $\int_0^n f(x)\,dx$ são polinômios (diferentes) de grau $g+1$ na variável $n$. Se $f$ é uma função exponencial, $f(x) = Ar^x$, tanto a somatória quanto a integral são funções exponenciais $ABr^n + C$ (com valores diferentes de $B$ e $C$). Muitas das regras para manipulação de somatórias (troca de variável, decomposição do domínio, associatividade, etc.) correspondem a regras para manipulação de integrais.

Embora não exista uma relação simples entre a integral de uma função e sua somatória, a primeira pode fornecer um limitante superior para a segunda. Suponha que $f$ é uma função crescente de $\mathbb{R}$ para $\mathbb{R}$. Considere a função

$$f^*(x) = f(\lfloor x \rfloor)$$

A figura 9.2 ilustra a relação entre $f$ e $f^*$.

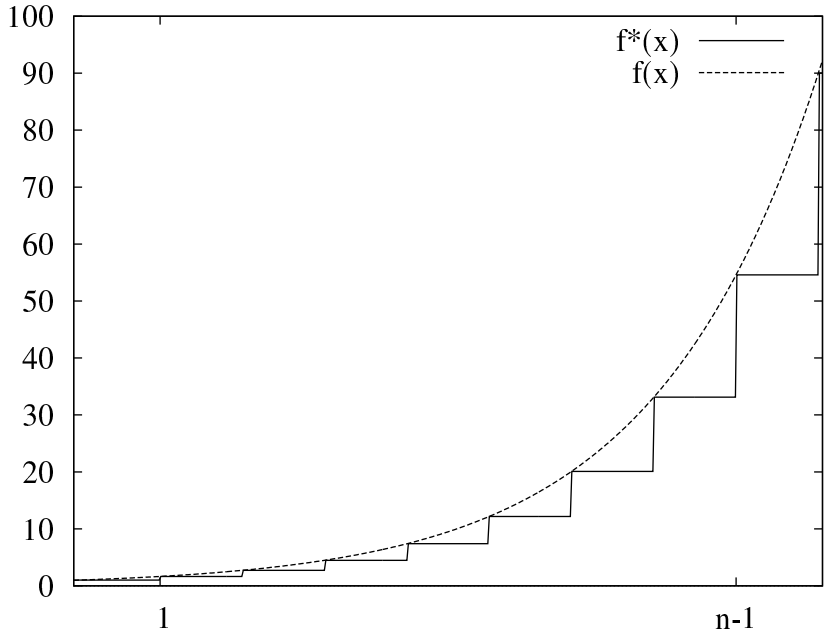



Figura 9.2: Limitante superior por integral.

Observe que o gráfico da função $f^*$ é uma escada, pois ela é constante em cada intervalo entre inteiros consecutivos. Portanto a integral de $f^*$ entre dois inteiros quaisquer pode ser decomposta na soma de áreas de retângulos de largura 1. Mais exatamente, $f^*(x) = f(k)$ para todo inteiro $k$ e todo $x$ entre $k$ (inclusive) e $k+1$ (exclusive); portanto, $\int_k^{k+1} f^*(x)\,dx = f(k)$, e

$$\int_m^n f^*(x)\,dx = \sum_{k=m}^{n-1} f(k)$$

Por outro lado, como $\lfloor x \rfloor \le x$ para todo $x$, e $f$ é uma função crescente de $x$, podemos concluir que

$$f^*(x) \le f(x)$$

para todo $x$. Veja a figura 9.2. Temos portanto que

$$\int_m^n f^*(x)\,dx \leq \int_m^n f(x)\,dx$$

Ou seja

$$\sum_{k=m}^{n-1} f(k) \leq \int_m^n f(x)\,dx \tag{9.8}$$

Como exemplo, considere a somatória $\sum_{k=1}^{n-1} k \log k$, que ocorre na análise da eficiência de algoritmos importantes mas não tem uma fórmula explícita simples. Neste exemplo, a função $f$ é $f(x) = x \log x$, que é crescente para $x \geq 1$. A integral de $f$ pode ser facilmente calculada (por integração por partes):

$$\int_a^b x \log x\,dx = \frac{b^2}{2}(\log b - \frac{1}{2}) - \frac{a^2}{2}(\log a - \frac{1}{2})$$

para quaisquer $a, b$ maiores ou iguais a 1. Temos portanto que

$$\sum_{k=1}^{n-1} k \log k \leq \frac{n^2}{2}(\log n - \frac{1}{2}) + \frac{1}{4} \tag{9.9}$$

Como $\log n - \frac{1}{2} < \log n$, podemos escrever também que

$$\sum_{k=1}^{n-1} k \log k \leq \frac{n^2}{2} \log n + \frac{1}{4}$$

**Exercício 9.10:** Para todo número inteiro positivo $n$, o $n$-ésimo número hamônico é

$$H_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} \ldots \frac{1}{n}.$$

Prove que $H_n \leq 1 + \ln n$.

**Exercício 9.11:** Prove que, para todo inteiro positivo $n$,

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2k-1} \leq 2 + \ln \sqrt{n}.$$

**Exercício 9.12:** Prove que a somatória $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}$ tem um limitante superior que não depende de $n$.

**Exercício 9.13:** Encontre e prove um limitante superior para $\sum_{k=1}^{n} k^{5/2}$.

**Exercício 9.14:** Encontre um limitante superior para a somatória $\sum_{k=m}^{n} k^{3/2}$.

### 9.5.4 Minoração por integrais

De maneira análoga, podemos usar integração para obter um limitante inferior para uma somatória. Seja novamente $f$ uma função crescente de $\mathbb{R}$ para $\mathbb{R}$, e considere a função $f^{\#}$ definida por $f^{\#}(x) = f(\lceil x \rceil)$. A figura 9.3 ilustra a relação entre estas duas funções:

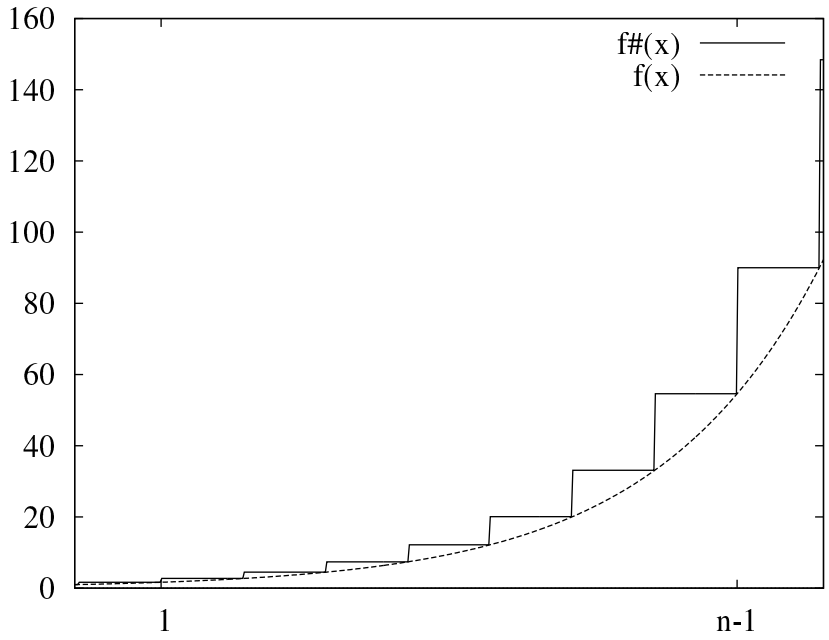



Figura 9.3: Limitante inferior por integral.

Observe que o gráfico da função $f^{\#}$ está sempre acima do gráfico de $f$, pois $\lceil x \rceil \geq x$ e portanto $f^{\#}(x) \geq f(x)$. Como na seção anterior, concluímos que a integral de $f^{\#}$ entre dois inteiros é uma somatória,

$$\int_m^n f^{\#}(x)\,dx = \sum_{k=m+1}^{n} f(k)$$

e portanto

$$\sum_{k=m+1}^{n} f(k) \geq \int_m^n f(x)\,dx \tag{9.10}$$

Para o exemplo da seção anterior, $f(x) = x \log x$, temos

$$\sum_{k=2}^{n} k \log k \geq \int_1^n x \log x\,dx \;=\; \frac{n^2}{2}(\log n - \frac{1}{2}) + \frac{1}{4} \tag{9.11}$$

Para melhor comparar este limitante inferior com o limitante superior (9.9), podemos passar o último termo da somatória ($k = n$) para o lado direito, e observar que $k \log k$ é zero quando $k = 1$. Obtemos então

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{n-1} k \log k &\geq \frac{n^2}{2}(\log n - \frac{1}{2}) + \frac{1}{4} - n \log n \\ &= \frac{n^2}{2}\log n - \frac{n^2}{4} - n \log n + \frac{1}{4} \end{aligned} \tag{9.12}$$

A diferença entre os limitantes, que mede nossa incerteza sobre o valor da somatória, é

$$\begin{aligned} \Delta &= (\frac{n^2}{2}\log n - \frac{n^2}{4} + \frac{1}{4}) - (\frac{n^2}{2}\log n - \frac{n^2}{4} - n\log n + \frac{1}{4}) && (9.13)\\ &= n\log n && (9.14)\end{aligned}$$

Por exemplo, para $n = 100$, os dois limitantes (9.9) e (9.12) permitem dizer que

$$20065.5 \le \sum_{k=1}^{99} k\log k \le 20526.2$$

A largura desse intervalo é aproximadamente 460.5. O valor real da somatória é 20296.2 . . ..

**Exercício 9.15:** Usando a minoração por integral, prove que $H_n \ge \ln(n+1)$.

## 9.6 Somas infinitas

A notação $\Sigma$ é também usada para *somas infinitas*, também chamadas de *séries*. Uma somatória infinita é o limite de uma somatória finita, quando o valor máximo da variável indexada tende para infinito. Ou seja,

$$\sum_{k=0}^{\infty} f(k) = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} f(k)$$

**Exemplo 9.9:** Se $x$ é um número real positivo, então

$$\sum_{k=0}^{\infty} x^k = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} x^k = \lim_{n\to\infty} \frac{1-x^{n+1}}{1-x} = \begin{cases} 1/(1-x), & \text{se } 0 \le x < 1 \\ +\infty, & \text{se } x \ge 1 \end{cases}$$

Em particular,

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2^k} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \ldots = 2$$

e

$$\sum_{k=0}^{\infty} 2^k = 1 + 2 + 4 + 8 + \ldots = +\infty$$

Observe que o limite pode não existir, ou pode ser infinito. Um exemplo clássico é a soma dos inversos dos inteiros positivos,

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$$

A soma dos $n$ primeiros termos é o número harmônico $H_n$ que é maior ou igual a $\ln(n+1)$ (veja o exercício 9.15), e portanto tende a infinito quando $n$ tende a infinito.

Séries são muito importantes no cálculo diferencial e integral, e são exaustivamente estudadas nessa disciplina. Em computação, somatórias finitas são mais comuns, mas as infinitas também ocorrem ocasionalmente. Por exemplo, se $f(k) \geq 0$ para todo $k \in \mathbb{N}$, temos que

$$\sum_{k=0}^{n} f(k) \leq \sum_{k=0}^{\infty} f(k)$$

desde que a somatória infinita esteja definida. Esta desigualdade pode oferecer um limitante superior simples para uma somatória finita que não possui uma fórmula fechada simples. Por exemplo,

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{z^k}{k!} \leq \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!} = e^z$$

**Exercício 9.16:** Prove que

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(k-1)}{2^k} = 0.$$

**Exercício 9.17:** Encontre um limitante superior para a somatória:

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{k}{3^k}.$$

**Exercício 9.18:** Obtenha uma fórmula para $\sum_{k=1}^{\infty} k x^k$, supondo que a soma converge. (Dica: calcule a derivada de $\sum_{k=0}^{\infty} x^k$ em relação a $x$.)

## 9.7 Produtórias

Sejam $m, n$ números inteiros e $f$ uma função definida sobre os inteiros. A notação

$$\prod_{k=m}^{n} f(k)$$

denota o produto dos valores $f(k)$ para todos os inteiros $k$ tais que $m \leq k \leq n$.

Uma fórmula deste tipo é chamada de *produtória* ou *produtório*. Se não existe nenhum $k$ no intervalo especificado (isto é, se $m > n$), o valor desta fórmula é 1 (e não zero!), por definição.

**Exercício 9.19:** Calcule o valor da produtória $\prod_{k=-2}^{+2} k^2 + 1$.

**Exercício 9.20:** Dê fórmulas explícitas (sem $\prod$ nem '...') para o valor das produtórias abaixo:

1. $\prod_{k=1}^{n} 3$
2. $\prod_{k=0}^{n} 3$
3. $\prod_{k=m}^{n} 3$
4. $\prod_{k=m}^{m+2} 3$
5. $\prod_{k=1}^{n} k$
6. $\prod_{k=-n}^{n} k$
7. $\prod_{k=1}^{n} k^2$
8. $\prod_{k=0}^{n} 2^k$

**Exercício 9.21:** Dê fórmulas explícitas (sem $\prod$ nem '...') para o valor das produtórias abaixo:

1. $\prod_{k=m}^{n} k$ 2. $\prod_{k=1}^{n} \frac{k+1}{k}$ 3. $\prod_{k=1}^{n} \prod_{i=1}^{m} 3^i$

Uma produtória também pode ser transformada em somatória usando a função logaritmo $\ln x = \log_e x$ e a função exponencial $\exp x = e^x$, onde $e$ é a constante neperiana 2.1718281828.... Lembramos que $ab = \exp((\ln a) + (\ln b))$ para quaiquer reais positivos $a, b$. Podemos então concluir que

$$\prod_{k=m}^{n} f(k) = \exp\left(\sum_{k=m}^{n} \ln f(k)\right)$$

Esta identidade pode ser usada, por exemplo para majorar produtórias por integrais.

**Exercício 9.22:** Determine fórmulas explícitas para as produtórias

1. $\prod_{k=1}^{n} 2 \cdot 4^k$ 2. $\prod_{k=0}^{n} \sqrt{k+1}$ 3. $\prod_{k=2}^{n} \left(1 - \frac{1}{k^2}\right)$

## 9.8 Iteração de outras operações

Notações análogas a somatórias e produtórias podem ser usada para indicar a iteração (repetição) de outras operações associativas. Por exemplo, se $P$ é um predicado que depende de um inteiro $i$, podemos escrever

$$\begin{array}{rcl} \bigvee_{i=1}^{n} P(i) & = & \mathbf{F} \vee P(1) \vee P(2) \vee \cdots \vee P(n) \\ \bigwedge_{i=1}^{n} P(i) & = & \mathbf{V} \wedge P(1) \wedge P(2) \wedge \cdots \wedge P(n) \\ \bigoplus_{i=1}^{n} P(i) & = & \mathbf{F} \oplus P(1) \oplus P(2) \oplus \cdots \oplus P(n) \end{array} \tag{9.15}$$

De maneira análoga, se $X$ é uma função que a cada inteiro $i$ associa um conjunto, podemos escrever

$$\begin{array}{rcl} \bigcup_{i=1}^{n} X(i) & = & \emptyset \cup X(1) \cup X(2) \cup \cdots \cup X(n) \\ \bigcap_{i=1}^{n} X(i) & = & \mathcal{U} \cap X(1) \cap X(2) \cap \cdots \cap X(n) \end{array} \tag{9.16}$$

Assim como no caso de somatórias, muitas das variações, propriedades e fórmulas de somatórias podem ser adaptadas para estas operações iteradas. Porém, identidades e fórmulas que alteram a ordem dos termos somente valem se a operação for comutativa.

Note que, quando o conjunto de termos é vazio, o resultado é o elemento neutro da operação: $\mathbf{F}$ para $\vee$ e $\oplus$, $\mathbf{V}$ para $\wedge$, $\emptyset$ para $\cup$, e o conjunto universal $\mathcal{U}$ para $\cap$.

# Capítulo 10

# Sequências infinitas e recorrências

## 10.1 Sequências infinitas

Uma *sequência infinita* é uma função cujo domínio é um conjunto da forma $\{ n \in \mathbb{Z} : n \geq r \}$ para algum inteiro $r$. Assim como no caso das sequências finitas, a escolha do índice inicial $r$ varia de autor para autor. A escolha $r = 1$ é tradicional e muito comum em matemática e outras ciências; nesse caso o domínio é o conjunto dos inteiros positivos $\mathbb{Z}^+ = \mathbb{N} \setminus \{0\}$. Entretanto, em alguns contextos (especialmente em computação), é conveniente adotar $r = 0$, e definir sequências infinitas como funções com domínio $\mathbb{N}$.

Para sequências infinitas valem os mesmos conceitos de termo, índice e valor vistos para sequências finitas, bem como a notação $x_n$ em vez de $x(n)$. Além disso, se $n$ é uma variável arbitrária, a fórmula "$x_n$" é chamada de *termo geral* da sequência.

**Exemplo 10.1:** Seja $x : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ onde $x_n = n^2$, para todo $n \in \mathbb{N}$. Os termos da sequência são: $x_0 = 0$, $x_1 = 1$, $x_2 = 4$, $x_3 = 9$, ....

Ocasionalmente a palavra "sequência" também é usada quando o domínio é o conjunto de todos os inteiros $\mathbb{Z}$; nesse caso pode-se dizer que a sequência é *bi-infinita*.

O conceito de subsequência (definido na seção 8.12.5) também vale para sequências infinitas e bi-infinitas. Por exemplo, se $x$ é a sequência com domínio $\mathbb{N}$ tal que $x_n = n^2$, e $R$ é o conjunto dos números naturais pares, *a subsequência y de x determinada por R* seria a restrição de $x$ a $R$, ou seja, a função

$$y = \left\{ (2k, 4k^2) : k \in \mathbb{N} \right\} = \{(0, 0), (2, 4), (4, 16), \ldots\}$$

Como no caso finito, é conveniente supor que os termos de uma subsequência são re-indexados a partir do índice inicial convencional. No exemplo acima, a subsequência de $x$ determinada por $R$, re-indexada a partir de 0, seria a função

$$y = \left\{ (k, 4k^2) : k \in \mathbb{N} \right\} = \{(0, 0), (1, 4), (2, 16), \ldots\}$$

## 10.2 Especificando sequências infinitas

Uma sequência infinita não pode ser especificada listando todos seus termos. Para definir tal sequência, devemos definir o termo geral $x_n$ por algum critério preciso que depende da variável índice $n$.

A definição não precisa ser uma fórmula algébrica. Por exemplo, considere a sequência $p$ cujos termos são os inteiros primos, em ordem crescente de valor. Os primeiros termos dessa sequência são
$2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, \ldots$. Todos os termos da sequência estão bem definidos, e podem ser calculados; porém até hoje não se conhece nenhuma fórmula algébrica para o termo geral $p_n$.

Uma questão comum em matemática discreta e computação é encontrar uma fórmula que representa o termo geral de uma sequência da qual se conhecem apenas alguns termos.

**Exemplo 10.2:** Seja $x$ uma sequência cujos primeiros termos $x_0, x_1, x_2, \ldots$ são $0, 1, 8, 27, 64, \ldots$. Qual é a fórmula para o termo geral $x_n$? Pode-se verificar que estes termos satisfazem a fórmula $x_n = n^3$.

**Exemplo 10.3:** Seja $x$ uma sequência cujos primeiros termos $x_0, x_1, x_2, \ldots$ são $1, 4, 10, 28, 82, 244, 730, \ldots$. Qual é a fórmula para o termo geral $x_n$? Pode-se verificar que estes termos satisfazem a fórmula $x_n = 3^n + 1$.

Na verdade, este é um problema mal posto, pois sempre existem infinitas fórmulas distintas que fornecem os mesmos resultados para um conjunto finito de valores de $n$. Por exemplo, outra sequência que também começa com $0, 1, 8, 27, 64, \ldots$ é $y_n = n^3 + n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)$. Esta fórmula é diferente de $x_n = n^3$, pois $x_5 = 125$ mas $y_5 = 245$. Em geral, neste tipo de problema o que se deseja é uma fórmula *simples* que seja compatível com os termos dados.

## 10.3 Recorrência

Muitas sequências importantes são definidas recursivamente, fornecendo-se um ou mais termos iniciais e uma fórmula que determina os demais termos a partir dos termos que os precedem. Essa fórmula é chamada de *recorrência*.

**Exemplo 10.4:** Uma *progressão aritmética* (PA) é uma sequência $x$ definida pela recorrência

$$\begin{aligned} x_0 &= a \\ x_n &= x_{n-1} + r \quad \text{para todo } n > 0 \end{aligned}$$

onde $a$ e $r$ são valores reais, chamados de *termo inicial* e *passo* ou *incremento* da progressão.

Pode-se provar facilmente por indução que o termo geral da progressão aritmética do exemplo 10.4 é $x_n = a + nr$, para todo $n \geq 0$; ou seja, uma função linear do índice $n$.

**Exemplo 10.5:** Uma *progressão geométrica* (PG) é uma sequência $x$ definida pela recorrência

$$\begin{aligned} x_0 &= a \\ x_n &= x_{n-1} \cdot r \quad \text{para todo } n \geq 1 \end{aligned}$$

onde $a$ e $r$ são valores reais, chamados de *termo inicial* e *razão* da progressão.

O termo geral de uma progressão geométrica é $x_n = ar^n$, para todo $n \geq 0$; ou seja, uma função exponencial do índice $n$.

**Exemplo 10.6:** A sequência dos *números de Fibonacci* é definida por

$$\begin{aligned} f_0 &= 0 \\ f_1 &= 1 \\ f_n &= f_{n-2} + f_{n-1} \quad \text{para todo } n \geq 2 \end{aligned}$$

Os primeiros termos dessa sequência são $0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, \ldots$ .

**Exemplo 10.7:** No capítulo 5 mostramos que um conjunto de $n$ retas em posição geral divide o plano em $R_n = n(n+1)/2 + 1$ regiões. Estas regiões também podem ser descritas pela recorrência abaixo:

$$\begin{aligned} R_0 &= 1 \\ R_n &= R_{n-1} + n \quad \text{para todo } n \geq 1 \end{aligned}$$

**Exercício 10.1:** Suponha que um casal de tatus marciano começa a dar crias com dois anos de idade e produz 6 crias (três casais) de tatuzinhos a cada ano. Suponha que um rancho de criação de tatus começou com 1 casal recém-nascido em 2000, e que nenhum tatu foi acrescentado ou eliminado do "rebanho" desde essa época. Escreva uma definição recursiva para o número $x_n$ de tatus que existem no ano $n$.

**Exercício 10.2:** A *função de Ackermann* (ou de *Ackermann-Péter*) $A$ de $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ para $\mathbb{N}$ é definida recursivamente pelas fórmulas

$$A(m,n) = \begin{cases} n+1 & \text{se } m = 0 \\ A(m-1,1) & \text{se } m > 0 \text{ e } n = 0 \\ A(m-1, A(m, n-1)) & \text{se } m > 0 \text{ e } n > 0 \end{cases} \tag{10.1}$$

Esta função é famosa por crescer muito rapidamente com o valor de $m$. Por exemplo, $A(3,1)$ é 13, $A(4,1)$ é 65.533, e $A(5,1)$ é grande demais para ser escrito aqui. Verifique que $A(3,3) = 61$. (Nota: este cálculo é muito trabalhoso.)

## 10.4 Resolução de recorrências

Determinar uma fórmula explícita para uma sequência definida recursivamente é um problema difícil em geral, mas há técnicas que resolvem certos casos especiais.

### 10.4.1 Recorrência aditiva simples

Um desses casos especiais são as recorrências da forma $x_n = x_{n-1} + f(n)$ para todo $n \geq m$, onde $f$ é uma função qualquer. A progressão aritmética do exemplo 10.4 é um caso particular desta classe, cuja solução, como vimos, é $x_n = a + rn$. Uma fórmula semelhante resolve recorrências da forma $x_n = x_{n-1} + r$ que valem somente a partir de um índice $m$ diferente de zero.

**Exercício 10.3:** Determine a fórmula para o termo geral $x_n$ da recorrência

$$\begin{aligned} x_m &= a \\ x_n &= x_{n-1} + r \quad \text{para todo } n > m \end{aligned}$$

onde $m$ é uma constante inteira, e $a, b$ são constantes reais que não dependem de $n$.

No caso da recorrência geral $x_n = x_{n-1} + f(n)$ para todo $n > m$, Pode-se verificar por indução em $n$ que a solução desta recorrência é

$$x_n = x_m + \sum_{k=m+1}^{n} f(k)$$

**Exercício 10.4:** Determine a fórmula para o termo geral $x_n$ da recorrência

$$\begin{aligned} x_0 &= 2 \\ x_n &= x_{n-1} + \pi^2 \quad \text{para todo } n > 0 \end{aligned}$$

**Exercício 10.5:** Determine a fórmula para o termo geral $x_n$ da recorrência

$$\begin{aligned} x_0 &= 0 \\ x_n &= x_{n-1} + n^2 \quad \text{para todo } n > 0 \end{aligned}$$

**Exercício 10.6:** Determine a fórmula para o termo geral $x_n$ da recorrência

$$\begin{aligned} x_1 &= 1 \\ x_n &= x_{n-1} + 2^n \text{ para } n > 1 \end{aligned}$$

**Exercício 10.7:** Seja $z_n$ o maior número de regiões em que o plano $\mathbb{R}^2$ pode ser dividido por $n$ círculos distintos de raio 1.

a) Determine uma recorrência para $z_n$.

b) Determine uma fórmula fechada para $z_n$.

**Exercício 10.8:** Seja $x_n$ o número de sequências de $n$ termos sobre o conjunto $\{0, 1, 2\}$ que tem um número ímpar de termos iguais a zero.

a) Determine uma recorrência para $x_n$.

b) Determine uma fórmula fechada para $x_n$.

### 10.4.2 Recorrência multiplicativa simples

Outro caso importante são as recorrências da forma $x_n = f(n)x_{n-1}$ para todo $n > m$, onde $f$ é uma função qualquer. No caso particular da progressão geométrica (exemplo 10.5), em que $f(n)$ é uma constante $r$, $m = 0$, e $x_0 = a$, a solução, como vimos, é $x_n = ar^n$ para todo $n \geq 0$. Recorrências com índice inicial $m > 0$ tem solução semelhante.

**Exercício 10.9:** Determine a fórmula para o termo geral $x_n$ da recorrência

$$\begin{aligned} x_0 &= \pi \\ x_n &= \frac{x_{n-1}\sqrt{\pi}}{2} \quad \text{para todo } n > 0 \end{aligned}$$

**Exercício 10.10:** Determine a fórmula para o termo geral $x_n$ da recorrência

$$\begin{aligned} x_m &= a \\ x_n &= r x_{n-1} \quad \text{para todo } n > m \end{aligned}$$

onde $m$ é uma constante inteira, e $a, b$ são constantes reais que não dependem de $n$.

Quando $f$ é uma função que depende de $n$, o resultado é uma produtória

$$x_n = x_m \prod_{k=m+1}^{n} f(k)$$

**Exercício 10.11:** Determine a fórmula para o termo geral $x_n$ da recorrência

$$\begin{aligned} x_0 &= 1 \\ x_n &= \tfrac{2}{n} x_{n-1} \quad \text{para todo } n > 0 \end{aligned}$$

**Exercício 10.12:** Determine a fórmula para o termo geral $x_n$ da recorrência

$$\begin{aligned} x_0 &= 1 \\ x_n &= \tfrac{n+p}{n} x_{n-1} \quad \text{para todo } n > 0 \end{aligned}$$

onde $p$ é um número natural que não depende de $n$.

### 10.4.3 Recorrências lineares homogêneas

Dizemos que uma relação de recorrência é *linear e homogênea de ordem k* se ela tem a forma

$$x_n = c_1 x_{n-1} + c_2 x_{n-2} + \cdots + c_k x_{n-k} \tag{10.2}$$

onde $k$ é um inteiro positivo e os coeficientes $c_1, c_2, \ldots, c_k$ são números reais, todos independentes de $n$. Pode-se provar por indução que esta recorrência é satisfeita por uma progressão geométrica $x_n = r^n$, onde $r$ é qualquer raiz do polinômio

$$z^k - c_1 z^{k-1} - c_2 z^{k-2} - \cdots - c_k z^0 \tag{10.3}$$

Esta fórmula é chamada de *polinômio característico* da recorrência.

Por exemplo, a recorrência $f_n = f_{n-2} + f_{n-1}$ dos números de Fibonacci é linear e homogênea de ordem 2, com coeficientes $c_1 = c_2 = 1$. Ela é satisfeita pelas sequências $x$ e $y$, onde $x_n = r^n$, $y_n = s^n$, e $r, s$ são as duas raízes da equação $z^2 = z + 1$. Estas raízes são

$$r = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \qquad s = \frac{1 - \sqrt{5}}{2} \tag{10.4}$$

A primeira raiz $r \approx 1.6180339887\ldots$, geralmente denotada pela letra $\phi$, é conhecida como *razão áurea*, porque na Grécia antiga os arquitetos e artistas acreditavam que o retângulo com lados 1 e $\phi$

tinha as proporções mais belas dentre todos os retângulos. A segunda raiz $s \approx -0.6180339887\ldots$, que vários autores denotam por $\hat{\phi}$, é igual a $1-\phi$ e $-\frac{1}{\phi}$.

| $n$ | $r^n$ | $s^n$ |
|---|---|---|
| 0 | 1.00000000 | 1.00000000 |
| 1 | 1.61803399 | -0.61803399 |
| 2 | 2.61803399 | 0.38196601 |
| 3 | 4.23606798 | -0.23606798 |
| 4 | 6.85410197 | 0.14589803 |
| 5 | 11.09016994 | -0.09016994 |
| 6 | 17.94427191 | 0.05572809 |
| 7 | 29.03444185 | -0.03444185 |
| ⋮ | ⋮ | ⋮ |

Nesta tabela pode-se verficar que $r^2 = r^1 + r^0$, $s^2 = s^1 + s^0$, $r^3 = r^2 + r^1$, e assim por diante.

As sequências $x$ e $y$ são apenas duas das possíveis soluções para a recorrência de fibon. Pode-se provar que qualquer combinação linear destas duas sequências

$$z_n \;=\; \alpha x_n + \beta y_n \;=\; \alpha\phi^n + \beta\hat{\phi}^n \tag{10.5}$$

também é uma solução da recorrência. Os valores de $\alpha$ e $\beta$ podem ser obtidos a partir dos valores iniciais dados $f_0 = 0$ e $f_1 = 1$, e são

$$\alpha = 1/\sqrt{5} \qquad \beta = -1/\sqrt{5} \tag{10.6}$$

Ou seja

$$f_n = \frac{1}{\sqrt{5}}(\phi^n - \hat{\phi}^n) \tag{10.7}$$

Uma vez que $\left|\hat{\phi}\right| = 0.61803399$ é menor que 1, o valor absoluto do termo $\hat{\phi}^n$ da fórmula (10.7) vai diminuindo rapidamente à medida que $n$ aumenta. Portanto,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{f_n}{f_{n-1}} = \phi \tag{10.8}$$

e podemos dizer que

$$f_n \approx \frac{1}{\sqrt{5}}\phi^n \tag{10.9}$$

Esta técnica resolve qualquer recorrência homogênea de ordem $k$ cujo polinômio característico tem $k$ raízes distintas. Quando o polinômio tem raízes iguais, ainda existem $k$ soluções independentes, mas elas tem uma forma um pouco mais complicada. Especificamente para cada raiz $r$ com multiplicidade $p$, toda sequência $x_n = n^i r^n$, para todo $i$ entre 0 e $p-1$, é uma solução independente.

**Exercício 10.13:** Considere a situação descrita no exercício 10.1. Determine uma fórmula explícita para o número $x_n$ de tatus que existem no ano $n \geq 2000$.

**Exercício 10.14:** Seja $s_n$ o número de sequências de $n$ vogais minúsculas (`a`, `e`, `i`, `o` ou `u`) que não possuem duas vogais '`e`' consecutivas.

a) Determine uma recorrência para $s_n$.

b) Determine uma fórmula fechada para $s_n$.

**Exercício 10.15:** Numa mesa redonda com $n$ lugares numerados ($n \geq 2$), devem ser dispostos $n$ pratos de $k$ cores diferentes ($k \geq 3$). Para um $k$ genérico, determine uma fórmula explícita para o número $x_n$ de possibilidades de fazer isso de tal maneira que cada prato tenha cor distinta das cores de seus dois vizinhos.

**Exercício 10.16:** Determine uma fórmula explícita para o número de maneiras de cobrir um tabuleiro de $2 \times n$ casas com $n$ dominós, cada um cobrindo duas casas adjacentes na vertical ou na horizontal.

## 10.5 Recorrências lineares não homogêneas

Uma *recorrência linear não homogênea* é uma fórmula que define o termo geral $x_n$ como uma combinação linear de termos anteriores, com coeficientes constantes, mais uma função arbitrária do índice $n$. Por exemplo,

$$\begin{aligned} x_0 &= 0 \\ x_n &= 2x_{n-1} + 2^n \quad \text{para todo } n > 0 \end{aligned} \tag{10.10}$$

Pode-se verificar, por indução, que $x_n = n2^n$ é a solução desta recorrência.

No caso geral, uma recorrência linear não homogênea de ordem $k$ tem a forma

$$\left.\begin{aligned} x_0 &= a_0 \\ x_1 &= a_1 \\ &\vdots \\ x_{k-1} &= a_{k-1} \end{aligned}\right\} \tag{10.11}$$

$$x_n = c_1 x_{n-1} + c_2 x_{n-2} + \cdots c_k x_{n-k} + f_n \quad \text{para todo } n \geq k \tag{10.12}$$

onde $a_0, a_1, \ldots, a_{k-1}, c_1, c_2, \cdots + c_k$ são constantes (que não dependem de $n$), e $f$ (o *termo independente*) é uma sequência qualquer. Por exemplo, considere a recorência

$$\left.\begin{aligned} x_0 &= 2 \\ x_1 &= 2 \end{aligned}\right\} \tag{10.13}$$

$$x_n = x_{n-1} + x_{n-2} + (-1)^n \quad \text{para todo } n \geq 2 \tag{10.14}$$

Note que esta recorrência é similar à de Fibonacci, exceto pelos termos iniciais e pela parcela '$(-1)^n$' na recorrência.

Não há uma técnica geral para resolver recorrências não homogêneas, como (10.11)– (10.12). Entretanto, suponha que conseguimos encontrar *uma* sequência particular $x$ que satisfaz a fórmula do termo geral (10.12), mas não necessariamente os termos iniciais. No exemplo acima, pode-se verificar que $x_n = (-1)^n$ é uma solução para a recorrência (10.14), embora tenha $x_0 = +1$ e $x_1 = -1$. Considere agora a recorrência homogênea similar a (10.14),

$$z_n = z_{n-1} + z_{n-2} \tag{10.15}$$

Como vimos anteriormente, a solução geral para esta recorrência é $z_n = \alpha\phi^n + \beta\hat{\phi}^n$. Verifica-se então que a solução geral para a recorrência original (10.14) é a soma de $z_n$ e da solução particular acima, isto é,

$$z_n = \alpha\phi^n + \beta\hat{\phi}^n + (-1)^n \tag{10.16}$$

Os valores de $\alpha$ e $\beta$ podem ser então determinados pelas condições iniciais $x_0 = 2$ e $x_1 = 2$, resultando em

$$\begin{array}{rcl} \alpha & = & \frac{\phi+2}{2\phi-1} \\ \beta & = & \frac{\phi-3}{2\phi-1} \end{array} \tag{10.17}$$

e portanto

$$x_n = \frac{\phi+2}{2\phi-1}\phi^n + \frac{\phi-3}{2\phi-1}\hat{\phi}^n + (-1)^n \tag{10.18}$$

De modo geral, podemos resolver a recorrência linear não homogênea (10.11)– (10.12) somando uma solução particular $x$ da equação (10.12) com a solução geral da equação homogênea

$$y_n = c_1 y_{n-1} + c_2 y_{n-2} + \cdots c_k y_{n-k} \text{ para todo } n \geq k \tag{10.19}$$

Esta solução geral vai depender de $k$ parâmetros $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$, que podem ser determimados pelas condições iniciais (10.11).

**Exercício 10.17:** Resolva a recorrência

$$\left\{ \begin{array}{rcl} x_0 & = & 3 \\ x_n & = & \frac{4}{3}x_{n-1} - 1 \end{array} \right. \tag{10.20}$$

## 10.6 Majoração e minoração de recorrências

Muitas vezes é difícil ou impossível obter uma fórmula explícita exata para uma sequência $y$ definida resursivamente sobre um conjunto de índices $D$. Porém, nesses casos pode ser possível obter um *limitante inferior* para $y$: uma sequência $x$, com mesmo domínio $D$, tal que $x_n \leq y_n$ para todo $n$ em $D$. Analogamente, pode ser possível obter um *limitante superior*, uma sequência $z$ tal que $y_n \leq z_n$ para todo $n$ em $D$. Tais limitantes podem ser suficientes para muitos fins — como, por exemplo, reserva de espaço de memória para certa tarefa ou estimativa do tempo de execução de um programa.

Por exemplo, considere a sequência $y$ tal que

$$\begin{array}{rcl} y_0 & = & 3 \\ y_n & = & y_{n-1} + \lfloor y_{n-1}/3 \rfloor \text{ para todo } n > 0 \end{array} \tag{10.21}$$

Os primeiros termos desta sequência são

| $n$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $y_n$ | 3 | 4 | 5 | 6 | 8 | 10 | 13 | 17 | 22 | 29 | 38 | 50 | 66 | 88 |

Podemos obter um limitante superior para $y$ trocando o lado direito da recorrência por uma fórmula mais simples que seja maior ou igual a esse termo. Por exemplo,

$$\begin{array}{rcl} z_0 & = & 3 \\ z_n & = & z_{n-1} + z_{n-1}/3 \text{ para todo } n > 0 \end{array} \tag{10.22}$$

Podemos provar que $z_n \geq y_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$, por indução em $n$. Basta observar que $z_{n-1} \geq y_{n-1}$, pela hipótese de indução, e que $u \geq \lfloor u \rfloor$ para qualquer número real $u$. A recorrência de $z$ pode ser simplificada para $z_n = (4/3)z_{n-1}$. Esta é uma progressão geométrica com termo inicial 3 e razão 4/3, e portanto a solução exata é $z_n = 3(4/3)^n$. Podemos então concluir que $y_n \leq 3(4/3)^n$ para todo $n$ em $\mathbb{N}$.

De maneira análoga, podemos obter um limitante inferior $x$ observando que $\lfloor u \rfloor \geq u - 1$ para todo número real $u$. Obtemos então a recorrência

$$\begin{array}{rcl} x_0 & = & 3 \\ x_n & = & x_{n-1} + (x_{n-1}/3 - 1) \text{ para todo } n > 0 \end{array} \tag{10.23}$$

Esta recorrência pode ser reescrita $x_n = (4/3)x_{n-1} - 1$ (veja o exercício 10.17).

**Exercício 10.18:** Prove que $n! \leq n^n$ para todo inteiro $n \geq 1$.

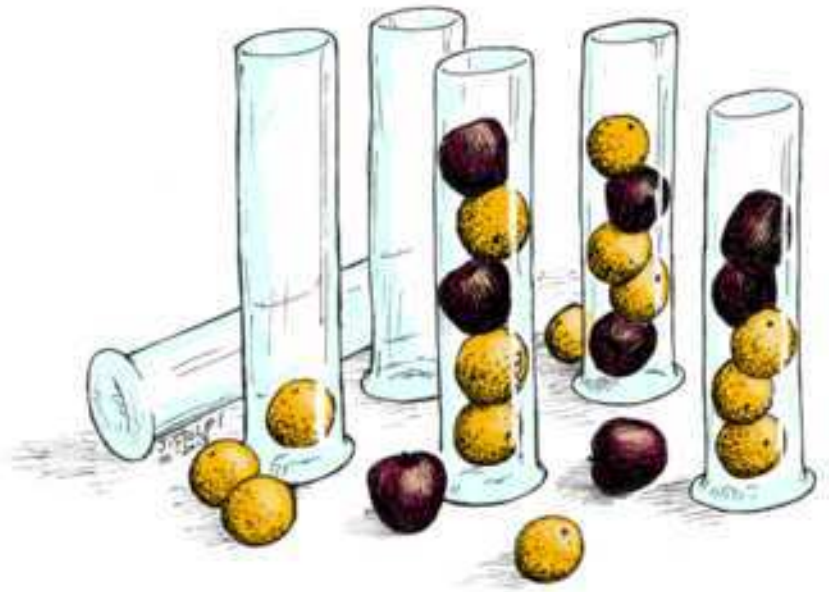
**Exercício 10.19:** Prove que $n! \leq 2^n$ para todo inteiro $n \geq 0$.

**Exercício 10.20:** Calcule 9! e compare com $5^9$. Mais genericamente, compare $n!$ (produto de $n$ termos variando de 1 a $n$) com $[(n+1)/2]^n$ (produto de $n$ termos todos iguais à média aritmética de 1 e $n$).

**Exercício 10.21:** Calcule 16! e compare com $4^{16}$. Mais genericamente, compare $n!$ (produto de $n$ termos variando de 1 a $n$) com $(\sqrt{n})^n$ (produto de $n$ termos todos iguais à média geométrica de 1 e $n$).

# Capítulo 11

# Contagem



Um problema comum em matemática, e especialmente em computação, é contar objetos matemáticos (conjuntos, funções, sequências, etc.) com determinadas propriedades. Por exemplo,

quantas maneiras diferentes há de escolher 5 cartas de um baralho com 52 cartas? Quantas palavras (com ou sem significado) podem ser formadas com 5 letras distintas? Quantas maneiras há de ordenar um arquivo de $n$ nomes?

Já encontramos alguns problemas desse tipo nos capítulos anteriores. Na seção 2.8, por exemplo, vimos que o número de subconjuntos de um conjunto com $n$ elementos é $2^n$. Neste capítulo vamos examinar alguns dos problemas mais comuns deste tipo.

Neste tipo de problemas é importante notar se os objetos que aparecem no enunciado são considerados distintos ou não. Por exemplo, observe a questão "quantos resultados é possivel obter quando dois dados são lançados sobre uma mesa?" Se os dados são considerados distintos (por exemplo, um vermelho e um verde), a resposta é $6 \times 6 = 36$. Note que o resultado "2 no vermelho e 4 no verde" é considerado diferente de "4 no vermelho e 2 no verde". Porém, se os dados são considerados indistinguíveis, a resposta é apenas 21; pois, por exemplo, o resultado "2 em um dado e 4 no outro" é o mesmo que "4 em um dado e 2 no outro".

**Exercício 11.1:** Liste e conte todas as maneiras possíveis de colocar 3 bolas, rotuladas de 1 a 3, em duas caixas rotuladas $A$ e $B$. Note que cada caixa pode ficar vazia ou com mais de uma bola.

Agora responda à mesma pergunta, supondo que

a) As bolas são todas iguais e sem rótulos, mas as caixas ainda são distintas;

b) As bolas são todas distintas, mas as caixas são iguais e sem rótulos;

c) As bolas são todas iguais e as caixas também, todas sem rótulos.

**Exercício 11.2:** Em um balcão são colocados cem copos, enfileirados e virados com a boca para cima, numerados de 1 a 100. Cem pessoas percorrem essa fileira, invertendo alguns dos copos. A $n$-ésima pessoa inverte todos os copos cujo número é múltiplo de $n$. No final, quais copos estarão virados com a boca para baixo?

## 11.1 Contagem de relações

Suponha que $X$ e $Y$ são conjuntos finitos, com $|X| = m$ e $|Y| = n$. Quantas relações existem de $X$ para $Y$? Lembramos que uma relação de $X$ para $Y$ é um subconjunto do produto cartesiano $X \times Y$, que tem $mn$ elementos. Concluímos que a resposta é $2^{mn}$. Pelo mesmo argumento, o número de relações sobre o conjunto $X$ (isto é, de $X$ para $X$) é $2^{m^2}$.

Quantas são as relações *reflexivas* sobre o conjunto $X$? Para responder a esta pergunta, basta lembrar que uma relação reflexiva sobre $X$ deve conter a relação de identidade $\mathcal{I}_X$, que consiste dos pares $(a, a)$ com $a \in X$. Então, cada relação que queremos contar consiste desses $m$ pares, mais um subconjunto arbitrário dos demais $m^2 - m = m(m-1)$ pares de $X \times X$. Concluímos que o número de relações reflexivas sobre $X$ é $2^{m(m-1)}$.

**Exercício 11.3:** Sejam $X$ e $Y$ conjuntos finitos, com $|X| = m$ e $|Y| = n$, e $\mathcal{R}$ uma relação de $X$ para $Y$, com $p$ pares. Quantas relaçoes de $X$ para $Y$ existem que contém a relação $\mathcal{R}$? Quantas relaçoes de $X$ para $Y$ existem que são disjuntas de $\mathcal{R}$?

**Exercício 11.4:** Se $X$ é um conjunto com $m$ elementos, quantas relações *irreflexivas* distintas existem sobre $X$? Quantas relações *simétricas*? E quantas *anti-simétricas*?

## 11.2 Contagem de funções

Suponha ainda que $X$ e $Y$ são conjuntos finitos, com $|X| = m$ e $|Y| = n$. Quantas *funções* distintas existem de $X$ para $Y$? Lembramos que, se $\mathcal{F}$ é uma dessas funções, então para cada elemento $a$ de $X$ deve existir um único par em $\mathcal{F}$ cujo primeiro membro é $a$. Portanto $\mathcal{F}$ tem apenas $m$ pares. Além disso, em cada um desses pares, o segundo membro (o valor $\mathcal{F}(a)$ da função) pode ser qualquer um dos $n$ elementos de $Y$. Temos então $n$ valores possíveis da função para cada um dos $m$ elementos de $X$. Concluímos que o número de funções de $X$ para $Y$ é $n^m$.

**Exercício 11.5:** Quantas maneiras há de empilhar cinco frutas, que podem ser laranjas (indistinguíveis entre si) ou maçãs (também indistinguíveis) dentro um vaso estreito de vidro?

**Exercício 11.6:** Seja $X$ um conjunto finito com $m$ elementos. Quantos predicados distintos existem sobre $X$?

**Exercício 11.7:** Um modelo de carro é vendido com 3 cores de exterior e 2 cores de estofamento. Se 10 pessoas compram um carro cada uma, de quantas maneiras elas podem escolher as cores?

**Exercício 11.8:** Em uma reunião de $n$ pessoas, cada uma escreve seu nome em um bilhete e o entrega a alguma outra pessoa do grupo. Quantos são os resultados possíveis dessa operação?

**Exercício 11.9:** Imagine que $n$ dados, de cores diferentes, são lançados sobre uma mesa. Quantos são os resultados possíveis?

**Exercício 11.10:** Vinte pessoas precisam ser transportadas por um bondinho no qual cabem apenas 5 pessoas por viagem. Quantas maneiras há de distribuir essas pessoas nas 4 viagens necessárias?

## 11.3 Princípio multiplicativo da contagem

Considere agora o problema de contar quantas maneiras existem de enfileirar 7 crianças, sendo 4 meninas e 3 meninos, de modo a alternar meninos e meninas. Podemos pensar em formar a fila com 7 decisões sucessivas, onde na decisão número $i$ escolhemos a criança que vai ficar na posição $i$ da fila. Assim, começamos escolheendo uma das quatro meninas para ficar no começo da fila (pois se escolhermos um menino não será possível intercalar as demais). Em seguida temos que escolher um dos 3 meninos para ficar em segundo lugar. Depois temos que escolher outra menina, que não pode ser a que ficou em primeiro lugar; temos portanto apenas 3 alternativas possíveis nessa escolha. Analogamente, temos apenas 2 alternativas para o quarto lugar (um dos dois meninos ainda não escolhidos), 2 alternativas para o quinto (uma de duas meninas), e apenas 1 alternativa para o sexto e o sétimo lugares.

Pode-se ver que qualquer disposição alternada das crianças pode ser obtida por esse processo; e que qualaquer variação nas escolhas resultará em uma disposição diferente. Portanto, o numero de maneiras de arranjar as crianças é

$$4 \times 3 \times 3 \times 2 \times 2 \times 1 \times 1 = 144 \tag{11.1}$$

O raciocínio usado neste problema é uma instância do *princípio multiplicativo da contagem*, ou *princípio fundamental da contagem*. Para usar esse princípio, temos que imaginar o processo de construção ou escolha de um dos objetos a contar como uma sequência finita de decisões $D_1, D_2, \ldots, D_r$, de tal forma que cada combinação diferente de escolhas nessas decisões produza um objeto diferente, e todos os objetos possam ser obtidos por esse processo. Nesse caso, se cada decisão $D_i$ pode ter $n_i$ escolhas distintas, então o número de objetos será

$$n_1 \times n_2 \times \cdots \times n_r \tag{11.2}$$

**Exercício 11.11:** Em uma reunião de $n$ pessoas, cada uma escreve seu nome em um bilhete e o entrega a alguma outra pessoa do grupo. Quantos são os resultados possíveis dessa operação?

**Exercício 11.12:** Quantas bandeiras é possível formar com 5 listras horizontais com cores azul, branca e vermelha, sendo que duas listras adjacentes devem ter cores diferentes?

**Exercício 11.13:** Sejam $X$ e $Y$ conjuntos finitos, com $|X| = m$ e $|Y| = n$. Seja $R$ um subconjunto de $X$ com $r$ elementos, e $S$ um subconjunto de $Y$ com $s$ elementos. Quantas funções $\mathcal{F}$ distintas existem de $X$ para $Y$ tais que $\mathcal{F}(x) \in S$ para todo $x$ em $R$?

**Exercício 11.14:** Um baralho padrão tem cartas de 4 naipes e 13 valores (52 cartas no total). De quantas maneiras é possível formar uma pilha de 3 cartas sem repetir nenhum naipe ou valor?

**Exercício 11.15:** Quantos números inteiros existem entre 1000 e 9999 (inclusive ambos) com todos os algarismos distintos?

**Exercício 11.16:** Os números 0, 1, 2,...9 são colocados em uma sequência $x_0, x_1, \ldots, x_9$, de tal forma que $x_k \geq k - 2$ para todo $k$. Ou seja, $x_9 \geq 7$, $x_8 \geq 6$, $x_7 \geq 5$, e assim por diante. De quantas maneiras podemos fazer isto?

**Exercício 11.17:** Uma placa de automóvel tem 3 letras maiúsculas seguidas de 4 algarismos. Quantas placas distintas existem?

## 11.4 Permutações

Seja $X$ um conjunto finito de $n$ elementos. Informalmente, uma *permutação de $X$* é uma lista dos elementos de $X$ em determinada ordem, sem repetições nem omissões. Mais precisamente, podemos definir uma permutação de $X$ como uma função $f$ bijetora do conjunto $\{0, 1, \ldots, n-1\}$ para o conjunto $X$. Podemos interpretar o valor de $f(k)$ como o elemento que está na posição $k$ da lista, contando a partir de 0. Por exemplo, suponha que $X$ é o conjunto das vogais, $X = \{\mathtt{a}, \mathtt{e}, \mathtt{i}, \mathtt{o}, \mathtt{u}\}$. A função

$$\{(0, \mathtt{u}), (1, \mathtt{e}), (2, \mathtt{i}), (3, \mathtt{a}), (4, \mathtt{o})\}$$

é uma permutação de $X$. Esta função pode ser escrita também como

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ \mathtt{u} & \mathtt{e} & \mathtt{i} & \mathtt{a} & \mathtt{o} \end{pmatrix}$$

ou como a sequência (u, e, i, a, o) ou, simplesmente, ueiao; ficando subentendido que os índices da sequência começam com 0. Duas outras permutações, distintas dessa, são uieao = (u, i, e, a, o) e eaoiu = (e, a, o, i, u).

Quantas permutações de $X$ existem? Quando tentamos escrever uma permutação $f$, elemento a elemento, é fácil ver que temos $n$ escolhas para o elemento $f(0)$ (qualquer elemento de $X$); $n-1$ escolhas para $f(1)$ (qualquer elemento de $X$, exceto $f(0)$); $n-2$ para $f(2)$ (qualquer elemento exceto $f(0)$ e $f(1)$); e assim por diante. Para o penúltimo elemento $f(n-2)$ temos apenas 2 possibilidades e para o último $f(n-1)$ temos apenas uma. Qualquer série de escolhas resulta em uma permutação distinta. Portanto o número de permutações distintas é

$$n \times (n-1) \times (n-2) \times \cdots \times 2 \times 1 = n! \tag{11.3}$$

Assim, por exemplo, o número de permutações das cinco vogais é $5! = 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 120$.

O conceito de permutação, como definido acima, é muito semelhante ao de *função permutação* de um conjunto $X$, que definimos na seção 8.7 como sendo uma bijeção de $X$ para $X$. Na verdade, se $X$ e $Y$ são conjuntos finitos com $n$ elementos, é possível associar cada permutação de $X$ (ou de $Y$) a uma bijeção de $X$ para $Y$, e vice-versa. Veja o exercício 11.18. Portanto concluímos que $n!$ também é o número de bijeções entre dois conjuntos de $n$ elementos.

Observe que se o conjunto $X$ é vazio (isto é, se $n = 0$) há apenas uma permutação possível, que é a sequência vazia () (ou seja, o conjunto vazio de pares índice-elemento). Esta observação justifica a definição de 0! como sendo 1.

O seguinte exemplo ilustra um uso menos trivial de permutações. Suponha que $n$ pessoas (com $n \geq 2$) devem sentar em uma fila de $n$ cadeiras, mas duas dessas pessoas, Alice e Beto, são um casal e devem ficar um ao lado do outro. De quantas maneiras isto pode ser feito?

Observe que Alice pode ficar à esquerda ou à direita de Beto; mas, em qualquer caso, o casal pode ser considerado uma única pessoa, e as duas cadeiras que eles ocupam podem ser consideradas uma única cadeira. Então, o número de soluções é $2(n-1)!$

O fatorial de $n$ cresce muito rapidamente quando $n$ aumenta. Por exemplo,

$$20! = 2.432.902.008.176.640.000$$

ou seja, mais de dois quintilhões (bilhões de bilhões). O fatorial de 50 é aproximadamente $3.04 \times 10^{64}$, que é muito maior que o número de átomos no sistema solar. Assim, embora possamos facilmente calcular o *número* de permutações de um baralho de 52 cartas, é impossível *gerar* todas essas permutações em qualquer computador concebível atualmente.

**Exercício 11.18:** Sejam $X$ e $Y$ conjuntos finitos com $n$ elementos, e $h : \{0, 1, \ldots, n-1\} \to X$ uma permutação dada de $X$. Prove as seguintes afirmações

1. Para qualquer permutação $g : \{0, 1, \ldots, n-1\} \to Y$, a composição $g \circ h^{-1}$ é uma bijeção de $X$ para $X$.
2. Para qualquer função bijetora $f$ de $X$ para $Y$, existe uma permutação $g : \{0, 1, \ldots, n-1\} \to Y$, tal que $f = g \circ h^{-1}$.
3. Para quaisquer duas permutações $g', g'' : \{0, 1, \ldots, n-1\} \to Y$, se $g' \circ h^{-1} = g'' \circ h^{-1}$, então $g' = g''$.

### 11.4.1 Fórmula de Stirling

A fórmula (11.3) não é adequada para calcular $n!$ quando $n$ é muito grande. Por exemplo, para calcular 1000000! temos que multiplicar 1000000 de números, e o produto vai crescendo a cada passo; o resultado tem mais de 5 milhões de algarismos. Uma fórmula que permite estimar o valor aproximado do fatorial com menos trabalho foi encontrada por Abraham de Moivre (1667–1754) e James Stirling (1692–1770):

$$\ln n! \approx n \ln n - n + \frac{1}{2} \ln(2\pi n)$$

onde ln é o logaritmo natural (na base $e = 2.7182818\ldots$). Aplicando $\exp(x) = e^x$ em ambos os lados temos

$$n! \approx \sqrt{2\pi n} \left(\frac{n}{e}\right)^n$$

**Exercício 11.19:** De quantas maneiras podemos dispor 8 torres de xadrex idênticas num tabuleiro com $8 \times 8$ casas, de modo que não haja duas torres na mesma linha ou na mesma coluna? E se as torres tiverem 8 cores diferentes?

**Exercício 11.20:** Um trem de montanha russa tem 6 bancos de 2 lugares. De quantas maneiras podem sentar 6 meninas e 6 meninos, sendo que em cada banco deve haver um menino e uma menina?

## 11.5 Arranjos

Dado um conjunto finito $X$ de $n$ elementos, e um inteiro $r \in \mathbb{N}$, definimos um *arranjo de r elementos de X* como uma sequência de elementos de $X$ com comprimento $r$, em determinada ordem e sem repetições. Ou seja, uma função injetora dos inteiros $\{0..r-1\}$ para o conjunto $X$.

Por exemplo, todos os arranjos de 3 elementos do conjunto $X = \{\mathtt{a}, \mathtt{e}, \mathtt{i}, \mathtt{o}, \mathtt{u}\}$ são

```
aei  aie  eai  eia  iae  iea
aeo  aoe  eao  eoa  oae  oea
aio  aoi  iao  ioa  oai  oia
aeu  aue  eau  eua  uae  uea
aiu  aui  iau  iua  uai  uia
aou  auo  oau  oua  uao  uoa
eio  eoi  ieo  ioe  oei  oie
eiu  eui  ieu  iue  uei  uie
eou  euo  oeu  oue  ueo  uoe
iou  iuo  oiu  oui  uio  uoi
```

onde `aie` significa a sequência $(\mathtt{a}, \mathtt{i}, \mathtt{e})$, ou seja a função

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ \mathtt{a} & \mathtt{i} & \mathtt{e} \end{pmatrix}$$

e assim por diante.

Pelo mesmo raciocínio usado na seção 11.4, concluímos que o número de tais arranjos (ou seja, o número de funções injetoras de um conjunto de $r$ elementos para um conjunto de $n$ elementos) é

$$n \times (n-1) \times (n-2) \times \cdots \times (n-r+1) \tag{11.4}$$

Em muitos livros este número é denotado por $A_n^r$ (lê-se "arranjos de $n$, tomados $r$ a $r$"). Alguns autores usam a notação $A_r^n$. Outra notação, usada por Knuth, é $n^{\underline{r}}$ (lê-se "$n$ à potência $r$ caindo"). Este número pode ser calculado a partir de fatoriais, pela fórmula

$$\frac{n!}{(n-r)!} \tag{11.5}$$

Note que os fatores do denominador cancelam uma parte dos fatores do numerador, deixando apenas os fatores da fórmula (11.4). Assim, por exemplo, o número de arranjos de 3 vogais, listados acima, é $5!/(5-3)! = 5 \times 4 \times 3 = 60$.

Uma maneira de entender a fórmula (11.5) é considerar todas as $n!$ permutações de $n$ elementos, e imaginar o que ocorre se tomarmos apenas os $r$ primeiros elementos de cada uma, para obter os arranjos. Note que duas permutações que diferem apenas na ordem dos $n-r$ elementos descartados produzem o mesmo arranjo. Há $(n-r)!$ maneiras de ordenar esses elementos descartados, sem mexer nos $r$ primeiros. Portanto, das $n!$ permutações, $(n-r)!$ correspondem a um mesmo arranjo.

**Exercício 11.21:** Sejam $X$ e $Y$ conjuntos finitos com $m$ e $n$ elementos, respectivamente. Quantas funções sobrejetoras $\mathcal{F} : X \to Y$ existem?

## 11.6 Combinações

Outro problema muito comum é contar o número de subconjuntos de tamanho $r$ de um conjunto $X$ de $n$ elementos. Note que este problema é diferente de contar os arranjos de $r$ elementos de $X$: em ambos os casos desejamos tomar $r$ elementos de $X$, sem repetições; mas neste caso a ordem dos elementos em cada subconjunto não interessa.

Estes subconjuntos são também chamados de *combinações* de $r$ elementos de $X$. Assim, por exemplo, as combinações de 3 vogais são

```
aei  aeo  aio  aeu  aiu
aou  eio  eiu  eou  iou
```

onde `aiu` significa o sub-conjunto {`a`, `i`, `u`}, e assim por diante.

O número de tais combinações acima é denotado por $C_n^r$ (ou $C_r^n$) por alguns autores, porém a notação mais comum é $\binom{n}{r}$, que se lê "combinações de $n$, tomados $r$ a $r$".

Para contar as combinações, podemos determinar o número de arranjos de $r$ elementos, e contar apenas uma vez todos os arranjos que diferem apenas na ordem dos elementos. Por exemplo, os seis arranjos `aio`, `aoi`, `iao`, `ioa`, `oai` e `oia` correspondem à mesma combinação {`a`, `i`, `o`}.

Como temos $r$ elementos em cada arranjo, concluímos que cada combinação corresponde a $r!$ arranjos diferentes. Portanto, o número de combinações é

$$\frac{A_n^r}{r!} = \frac{n \times (n-1) \times \cdots \times (n-r+1)}{r \times (r-1) \times \cdots \times 1} \tag{11.6}$$

Esta fórmula pode ser escrita em termos de fatoriais

$$\binom{n}{r} = \frac{n!}{r!(n-r)!} \tag{11.7}$$

**Exercício 11.22:** Quantas "mãos" diferentes de cinco cartas podem ser obtidas de um baralho de 52 cartas?

**Exercício 11.23:** Quantas maneiras há de empilhar 3 laranjas (indistinguíveis) e 2 maçãs (indistinguíveis) dentro um vaso estreito de vidro?

**Exercício 11.24:** Há $2^n$ sequências distintas de $n$ bits (algarismos 0 e 1). Quantas dessas sequências tem exatamente $k$ bits iguais a 1?

### 11.6.1 Casos especiais

Alguns casos especiais são dignos de nota. Para todo $n \in \mathbb{N}$,

$$\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1$$

Para todo inteiro $n$ positivo,

$$\binom{n}{1} = \binom{n}{n-1} = n$$

e, para todo inteiro $n$ maior que 1,

$$\binom{n}{2} = \binom{n}{n-2} = \frac{n(n-1)}{2}$$

Além disso, é óbvio que $\binom{n}{r}$ é zero se $r$ é maior que $n$.

Uma vez que o número de elementos de um conjunto é um número natural, a definição de $\binom{n}{r}$ não faz muito sentido quando $n$ e/ou $r$ são negativos. Porém, a experiência mostra que muitos teoremas e fórmulas ficam mais simples quando definimos $\binom{n}{r} = 0$ quando $n < 0$ ou $r < 0$.

### 11.6.2 Propriedades

A função $\binom{n}{r}$ tem várias propriedades interessantes. Por exemplo, para todo $n, r \in \mathbb{N}$, temos

$$\binom{n}{r} = \binom{n}{n-r}$$

Para demonstrar esta identidade, considere um conjunto $X$ de $n$ elementos, e observe que para cada conjunto de $r$ elementos existe um único conjunto de $n - r$ elementos que é seu complemento, e vice-versa. Ou seja, a operação de complemento em relação a $X$ é uma bijeção entre o conjunto dos subconjuntos de $r$ elementos e o conjunto dos subconjuntos de $n - r$ elementos.

Outra propriedade importante é a *identidade de Pascal*:

$$\binom{n+1}{r+1} = \binom{n}{r} + \binom{n}{r+1}$$

Para provar esta identidade, considere um conjunto $X'$ de $n + 1$ elementos e escolha um elemento arbitrário $x$ de $X'$. Seja $X$ o conjunto dos demais elementos, $X = X' \setminus \{x\}$. Considere agora todos os subconjuntos de $X'$ com $r + 1$ elementos. Eles podem ser separados em dois grupos: aqueles que contém o elemento escolhido $x$, e aqueles que não contém $x$. Os primeiros são exatamente os $\binom{n}{r}$ subconjuntos de $X$ de tamanho $r$, cada um deles acrescido do elemento $x$. Os segundos são exatamente os $\binom{n}{r+1}$ subconjuntos de $X$ de tamanho $r + 1$.

Podemos enunciar esta propriedade graficamente, dispondo os valores de $\binom{n}{r}$ na forma de um triângulo infinito

$$\begin{array}{ccccccccccccccccccccccc}
 & & & & & & & \binom{0}{0} & & & & & & & & & & & & & & & \\
 & & & & & & \binom{1}{0} & & \binom{1}{1} & & & & & & & & & & & & & & \\
 & & & & & \binom{2}{0} & & \binom{2}{1} & & \binom{2}{2} & & & & & & & & & & & & & \\
 & & & & \binom{3}{0} & & \binom{3}{1} & & \binom{3}{2} & & \binom{3}{3} & & & & & & & & & & & & \\
 & & & \binom{4}{0} & & \binom{4}{1} & & \binom{4}{2} & & \binom{4}{3} & & \binom{4}{4} & & & & & & & & & & & \\
 & & \binom{5}{0} & & \binom{5}{1} & & \binom{5}{2} & & \binom{5}{3} & & \binom{5}{4} & & \binom{5}{5} & & & & & & & & & & \\
 & & & & & & & \cdots & & & & & & & & & & & & & & & \\
 & & & & & & & & & & & & & & & & & & & & & & \\
 & & & & & & & & & & & & & & & & & 1 & & & & & \\
 & & & & & & & & & & & & & & & & 1 & & 1 & & & & \\
 & & & & & & & & & & & & & & & 1 & & 2 & & 1 & & & \\
 & & & & & & & & & & & & & & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & & \\
 & & & & & & & & & & & & & 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 & \\
 & & & & & & & & & & & & 1 & & 5 & & 10 & & 10 & & 5 & & 1 \\
 & & & & & & & & & & & & & & & & & \cdots & & & & & \\
 & & & & & & & & & & & & & & & & & & & & & &
\end{array}$$

A identidade de Pascal diz que cada número deste diagrama é a soma dos dois vizinhos mais próximos da linha acima. Por exemplo, $\binom{5}{2} = \binom{4}{1} + \binom{4}{2}$.

### 11.6.3 Fórmula do Binômio de Newton

Uma das propriedades mais famosas das combinações é a fórmula de Newton para as potências de um binômio (soma de dois termos):

$$(a + b)^n = \sum_{r=0}^{n} \binom{n}{r} a^{n-r} b^r$$

Por exemplo, temos

$$\begin{aligned}(a+b)^4 &= \binom{4}{0}a^4b^0 + \binom{4}{1}a^3b^1 + \binom{4}{2}a^2b^2 + \binom{4}{3}a^1b^3 + \binom{4}{4}a^0b^4 \\ &= 1a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + 1b^4\end{aligned}$$

Por conta desta fórmula, os números $\binom{n}{r}$ são também chamados de *coeficientes binomiais*. As seguintes propriedades são corolários imediatos da fórmula de Newton:

**Exercício 11.25:** Prove que $\sum_{r=0}^{n}\binom{n}{r} = 2^n$.

**Exercício 11.26:** Prove que $\sum_{r=0}^{n}2^r\binom{n}{r} = 3^n$.

**Exercício 11.27:** Prove que $\sum_{r=0}^{n}(-1)^r\binom{n}{r} = 0$.

**Exercício 11.28:** Seja $X$ um conjunto de $n$ elementos. Usando a fórmulado exercício 11.27, prove que o número de subcojuntos de $X$ de tamanho par é igual ao número de subconjuntos de tamanho ímpar.

**Exercício 11.29:** Prove que, para todos os naturais $k$ e $n$ com $n \geq k$, temos $\sum_{k=r}^{n}\binom{k}{r} = \binom{n+1}{r+1}$.

**Exercício 11.30:** Uma prova tem 10 questões do tipo verdadeiro/falso. Quantas maneiras há de responder essas questões, sem deixar nenhuma em branco, de modo a acertar exatamente 7 delas? E acertar pelo menos 7 delas?

### 11.6.4 Fórmula recursiva

A fórmula (11.7) não é muito eficiente quando $n$ e $r$ são números grandes, pois o numerador $n!$ e denominador $(n-r)!r!$ podem ser muito maiores que o resultado final $\binom{n}{r}$. Esta observação tabém vale se usarmos a fórmula (11.6), $C_n^r = A_n^r/r!$. Uma maneira mais eficiente é utilizar a recorrência

$$\binom{n}{r} = \begin{cases}\dfrac{n}{r}\binom{n-1}{r-1} & \text{se } n \geq r > 0, \\ 1 & \text{se } n \geq r = 0, \\ 0 & \text{se } n < r \text{ ou } r < 0.\end{cases}$$

Esta recorrência pode ser demonstrada por indução em $r$. Para provar o passo da indução, basta observar que o lado direito da equação 11.6 pode ser fatorada como segue

$$\binom{n}{r} = \frac{n}{r}\left(\frac{n-1}{r-1}\frac{n-2}{r-2}\cdots\frac{n-r+1}{1}\right)$$

e que a parte entre parênteses é $\binom{n-1}{r-1}$. Ou seja,

$$\binom{n}{r} = \prod_{k=1}^{r}\frac{n-r+k}{k}$$

Podemos portanto calcular $\binom{n}{r}$ pelo seguinte algoritmo:

1. Se $n < r$ ou $r < 0$, devolva 0. Senão
2. $C \leftarrow 1$
3. Para $k$ variando de 1 a $r$, faça
   4. $C \leftarrow (C \times (n - r + k))/k$
5. Devolva $C$.

Neste algoritmo é importante efetuar a multiplicação por $n - r + k$ antes de dividir por $k$. Isto garante que a divisão será exata.

### 11.6.5 Partições rotuladas e combinações com repetições

Quantas maneiras há de distribuir 10 doces para 4 crianças, de modo que cada criança receba pelo menos um doce?

Uma maneira de resolver este problema é imaginar que os 10 doces são colocados numa fileira, com barras separando os lotes dados a cada criança, numa ordem escolhida. Por exemplo, "ooo|oooo|o|oo" representaria a solução onde a primeira criança recebe 3 doces, a segunda recebe 4, a terceira 1, e a quarta 2. Observe que precisamos colocar 3 barras (para separar os lotes de 4 crianças), não podemos colocar duas barras na mesma posição, nem no início da fileira de doces, nem no fim dela (porque todas as crianças precisam receber pelo menos um doce). Há portanto 9 posições possíveis para as barras (para 10 doces), e cada solução válida é um subconjunto de 3 dessas posições. Portanto a resposta é $\binom{9}{3} = 84$.

Mais geralmente, suponha que queremos repartir $n$ elementos em $p$ grupos distintos, sendo que cada grupo deve ter pelo menos um elemento. Ou seja, queremos saber quantas sequências $(x_1, x_2, \ldots, x_p)$ de inteiros positivos existem tais que $x_1 + x_2 + \cdots + x_p = n$. Pelo mesmo raciocínio acima, concluímos que a resposta é

$$\binom{n-1}{p-1} = \frac{(n-1)!}{(n-p)!(p-1)!} = \binom{n-1}{n-p} \tag{11.8}$$

Suponha agora o poblema de dividir 6 doces para 4 crianças, mas permitindo que uma ou mais crianças fiquem sem nenhum doce. Podemos fazer este problema ($P_0$) recair no anterior, com o seguinte truque: distribuímos 10 doces para as 4 crianças, garantindo pelo menos um doce para cada uma; e então recolhemos 1 doce de cada criança. Pode-se verificar que cada solução para este problema ($P_1$) dá uma solução diferente para o problema $P_0$, e vice-versa. Portanto, o número de soluções do problema $P_0$ é também $\binom{9}{3} = 84$.

Mais geralmente, suponha que queremos repartir $n$ elementos em $p$ grupos distintos, mas permitindo que cada grupo fique vazio. Matematicamente, queremos saber quantas soluções existem para a equação $x_1 + x_2 + \cdots + x_p = n$, sendo que cada incógnita $x_i$ deve ser um número natural (incluindo 0). Podemos transformar este problema no anterior pela seguinte estratégia: contamos o número de soluções para $y_1 + y_2 + \cdots + y_p = n + p$ onde cada $y_i$ é um inteiro postivo. Note que cada solução destas fornece uma solução distinta para o problema original, com $x_i = y_i - 1$; e vice-versa. Portanto, o número de soluções é

$$\binom{n+p-1}{p-1} = \frac{(n+p-1)!}{n!(p-1)!} = \binom{n+p-1}{n} \tag{11.9}$$

O problema de dividir 10 doces por 4 crianças pode também ser visto como escolher 10 elementos do conjunto $C = \{1, 2, 3, 4\}$, mas permitindo que cada elemento seja escolhido mais de uma vez; de modo que cada solução não é um conjunto, mas um *multiconjunto* — uma coleção de elementos onde a ordem não importa, mas importa quantas vezes cada elemento aparece. Por exemplo, uma solução seria $\{1, 1, 1, 2, 2, 2, 2, 3, 4, 4\}$ (3 doces para a criança 1, 4 doces para a criança 2, etc.), que é diferente da solução $\{1, 1, 2, 2, 2, 2, 3, 4, 4, 4\}$.

Mais geralmente, queremos saber quantos multiconjuntos, cada um com $n$ elementos no total, podem ser formados com os $p$ elementos de um dado conjunto $C$. Estes multi-conjuntos são as *combinações com repetição desses p elementos tomados n a n*, e seu número é dado pela fórmula (11.9). Note que esta contagem inclui também os multi-conjuntos que usam apenas alguns dos elementos de $C$. Se queremos considerar apenas as combinações com repetição que usam todo elemento de $C$ pelo menos uma vez, devemos usar a fórmula (11.8).

**Exercício 11.31:** De quantos modos podemos comprar 3 sorvetes numa sorveteria que oferece 7 sabores distintos? (Note que podemos comprar mais de um sorvete do mesmo sabor.)

## 11.7 Permutações e arranjos circulares

Considere uma roleta dividida em 5 setores idênticos. De quantas maneiras podemos rotular esses setores com as vogais `A`, `E`, `I`, `O`, `U`, em ordem arbitrária?

Se os setores fossem distinguíveis, a resposta seria o número de permutações de 5 elementos, isto é, 5!. Para justificar este resultado, basta imaginar os setores numerados de 1 a 5 em ordem horária a partir de um setor determinado. Cada rotulação é então uma função bijetora dos números de 1 a 5 para as 5 vogais.

Porém, como os setores são idênticos, duas permutações distintas podem resultar em rotulações idênticas. Por exemplo, obteremos o mesmo resultado se rotularmos os setores, em ordem horária, (`A`, `E`, `I`, `O`, `U`), ou com (`U`, `A`, `E`, `I`, `O`), ou com (`O`, `U`, `A`, `E`, `I`), etc..

Observe que cada rotulação distinta corresponde a 5 permutações distintas das cinco vogais. Portanto, o número de rotulações distintas deve ser $5!/5 = 4!$.

Outra maneira de obter este resultado é imaginar que as vogais são aplicadas uma de cada vez, em ordem alfabética, em setores arbitrários. Como os setores são indisinguíveis, há apenas uma maneira de aplicar a letra `A` (e não cinco). Já a vogal `E` pode ser aplicada de 4 maneiras distintas, pois os outros 4 setores agora podem ser distinguidos pela sua posição em relação ao setor já rotulado. Da mesma forma temos 3 escolhas distintas para a letra `I`, 2 para `O`, e 1 para `U`. Portanto o número configurações é $1 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 4!$.

Este exemplo ilustra o conceito de *permutação circular*: uma configuração de elementos distintos dispostos em círculo, sendo que configurações que diferem apenas por rotação são consideradas indistinguíveis. Generalizando o raciocínio acima, concluímos que o número de permutações circulares de $n$ elementos é

$$\frac{n!}{n} = (n-1)! \tag{11.10}$$

**Exercício 11.32:** Quantas rodas distintas de 5 crianças podemos formar numa classe de 10 crianças? E de quantas maneiras podemos formar duas rodas de 5 com essas 10 crianças?

## 11.8 Contagem por divisão

Mais geralmente, suponha que temos que contar um conjunto $Y$ da forma

$$Y = \{ f(x) : x \in X \} \tag{11.11}$$

onde $X$ é algum outro conjunto finito, e $f$ é uma função de $X$ para $Y$. Se todo elemento de $y$ é imagem de exatamente $m$ elementos distintos de $X$, então $|Y| = |X| / m$.

No exemplo acima, $X$ é o conjunto de permutações das 5 vogais, $Y$ são as rotulações distinguíveis dos setores da roleta, e $f(x)$ é a rotulação que se obtém quando os setores são rotulados segundo a permutação $x$.

**Exercício 11.33:** Em uma brincadeira com $n$ crianças, $n - 1$ crianças formam uma roda e uma delas fica no centro da roda. De quantas maneiras distintas é possível arranjar essas $n$ crianças dessa forma?

**Exercício 11.34:** Imagine um quadrado de 2 cm de lado desenhado numa folha de caderno. De quantas maneiras é possivel colocar um dado com 2 cm de lado sobre esse quadrado? Quantas maneiras distintas há de numerar as faces de um cubo com os números de 1 a 6?

## 11.9 Permutações e arranjos com elementos indistinguíveis

Outro exemplo da técnica acima é contar or anagramas da palavra `BANANA`; isto é, quantas sequências de 7 letras podem ser fomadas rearranjando as letras da palavra `BANANAS`?

Podemos obter cada uma dessas palavras tomando uma permutação dos números de 1 a 7, e aplicando à mesma uma função $f$ que transforma o número 1 em `B`, os números 2 e 3 em `N`, os números 4, 5 e 6 em `A`, e o número 7 em `S`. Por exemplo,

$$\begin{array}{rcl} f(1,2,3,4,5,6,7) &=& \texttt{BNNAAAS} \\ f(4,1,5,2,3,6,7) &=& \texttt{ABANNAS} \\ f(1,4,2,5,3,6,7) &=& \texttt{BANANAS} \\ f(1,6,3,5,2,4,7) &=& \texttt{BANANAS} \\ f(7,2,1,4,5,6,3) &=& \texttt{SABANAN} \end{array} \tag{11.12}$$

e assim por diante. Quantas permutações geram a mesma palavra? Observe que a palavra não muda se trocarmos as posições dos valores 2 e 3 entre si; e/ou se trocarmos os valores 4, 5 e 6 entre si, nas $3! = 6$ maneiras possíveis. Quaisquer outras trocas de valores causam a troca de letras distintas. Portanto, cada palavra possível é obtida a partir de exatamente $2 \times 6 = 12$ permutações distintas. O número de palavras distintas é então $7!/12 = 420$.

Mais geralmente, considere o problema de contar as sequências $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ de $n$ elementos, que podem ter $p$ valores distintos $v_1, v_2, \ldots, v_p$; sendo que cada sequência deve ter exatamente $m_i$ elementos iguais a $v_i$, para cada $i$. Pelo raciocínio acima, podemos concuir que o número de tais sequências é

$$\frac{n!}{m_1!\, m_2! \cdots, m_p!} \tag{11.13}$$

## 11.10 Combinações múltiplas

O número $\binom{n}{r}$ pode ser definido também como o número de maneiras de colocar $n$ objetos distintos em duas caixas distintas, com $r$ elementos na primeira caixa, e $n-r$ na segunda caixa. (Comparando com a definição usada na seção 11.6, pode-se ver que o conteúdo da primeira caixa corresponde ao sub-conjunto escolhido do conjunto $X$, com $r$ elementos, e a segunda caixa ao complemento desse sub-conjunto em relação a $X$.)

Esta definição alternativa pode ser generalizada para qualquer número positivo $t$ de caixas. Ou seja, podemos perguntar quantas maneiras existem de distribuir $n$ objetos em $t$ caixas distintas, com $r_1$ elementos na caixa 1, $r_2$ elementos na caixa 2, e assim por diante. Obviamente isso é possível apenas se $r_1 + r_2 + \cdots + r_t = n$. Um raciocínio análogo ao utilizado na seção 11.6 permite concluir que esse número é

$$\binom{n}{r_1, r_2, \ldots, r_t} = \frac{n!}{r_1! r_2! \cdots r_t!} \tag{11.14}$$

Por exemplo, suponha que temos 10 pessoas para distribuir em três comissões $A$, $B$ e $C$ com, respectivamente, 5, 3, e 2 membros. Isso pode ser feito de

$$\binom{10}{5, 3, 2} = \frac{10!}{5!3!2!} = 2520 \tag{11.15}$$

maneiras distintas.

**Exercício 11.35:** Quantas maneiras existem de distribuir 5 cartas para cada um de 4 jogadores, de um baralho de 52 cartas? (Note que, além das 4 mãos distribuídas, há também um monte de 32 cartas não distribuídas.)

**Exercício 11.36:** Quantas maneiras distintas existem de pintar 20 casas com as cores vermelha, azul, verde e amarela (cada casa de uma só cor), sendo que deve haver o mesmo número de casas de cada cor?

**Exercício 11.37:** Quanto vale $\binom{n}{r_1, r_2, \ldots, r_t}$ se $t = 1$? E se $r_t = 0$? E se $r_1 = r_2 = \cdots = r_t = 1$?

O número de distribuições de $n$ elementos em $t$ caixas de tamanhos fixos aparece na fórmula da soma de $t$ variáveis, $x_1 + x_2 + \cdots + x_t$, elevada a potência $n$. Mais precisamente, $\binom{n}{r_1, r_2, \ldots, r_t}$ é o coeficiente do termo $x_1^{r_1} x_2^{r_2} \cdots x_t^{r_t}$ na expansão da fórmula $(x_1 + x_2 + \cdots + x_t)^n$:

$$(x_1 + x_2 + \cdots + x_t)^n = \sum_{\substack{r_1, r_2, \ldots, r_t \\ r_1 + r_2 + \cdots + r_t = n}} \binom{n}{r_1, r_2, \ldots, r_t} x_1^{r_1} x_2^{r_2} \ldots x_t^{r_t}.$$

Esta igualdade é conhecida como *fórmula de Leibniz*.

**Exemplo 11.1:**

$$\begin{aligned}(a+b+c)^4 &= \binom{4}{4,0,0}a^4b^0c^0 + \binom{4}{3,1,0}a^3b^1c^0 + \binom{4}{2,2,0}a^2b^2c^0 + \binom{4}{1,3,0}a^1b^3c^0 + \binom{4}{0,4,0}a^0b^4c^0 + \\ &\quad \binom{4}{3,0,1}a^3b^0c^1 + \binom{4}{2,1,1}a^2b^1c^1 + \binom{4}{1,2,1}a^1b^2c^1 + \binom{4}{0,3,1}a^0b^3c^1 + \\ &\quad \binom{4}{2,0,2}a^2b^0c^2 + \binom{4}{1,1,2}a^1b^1c^2 + \binom{4}{0,2,2}a^0b^2c^2 + \\ &\quad \binom{4}{1,0,3}a^1b^0c^3 + \binom{4}{0,1,3}a^0b^1c^3 + \\ &\quad \binom{4}{0,0,4}a^0b^0c^4 \\ &= 1a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + 1b^4 + \\ &\quad 4a^3c + 12a^2bc + 12ab^2c + 4b^3c + \\ &\quad 6a^2c^2 + 12abc^2 + 6b^2c^2 + \\ &\quad 4ac^3 + 4bc^3 + \\ &\quad 1c^4\end{aligned}$$

Estes números são também chamados de *coeficientes multinomiais*. Note que o coeficiente binomial $\binom{n}{r}$ equivale ao coeficiente multinomial $\binom{n}{r,n-r}$.

Os coeficientes multinomiais também contam as maneiras de listar $t$ objetos distintos com número especificado de repetições de cada objeto. Mais precisamente, suponha que queremos formar uma lista de comprimento $n$ com $t$ itens distintos, sendo que o primeiro item aparece $r_1$ vezes na lista, o segundo item aparece $r_2$ vezes, e assim por diante. O número de listas desse tipo é justamente $\binom{n}{r_1,r_2,\ldots,r_t}$. Para compreender esta afirmação, basta considerar que ao escrever tal lista, temos que escrever $n$ elementos, e, para cada $i$, escolher $r_i$ elementos que serão iguais ao item número $i$.

**Exercício 11.38:** Quantas maneiras há de dividir 16 alunos em 3 grupos de estudo, para Física, Química e Matemática; sendo que deve haver 6 alunos em cada um dos dois primeiros grupos, e 4 no último?

## 11.11 Princípio aditivo da contagem

Consideremos agora o problema de contar quantos números pares de 4 dígitos distintos existem. Ou seja, quantas sequências de 4 algarismos podemos formar, sendo o dígito dos milhares (o mais a esquerda) não pode ser '0', e o dígito das unidades (o mais à direita) só pode ser '0', '2', '4', '6' ou '8'.

Esta contagem não pode ser feita apenas com o princípio multiplicativo, pois o número de escolhas possíveis para o dígito das unidades depende de quantos dígitos pares foram escolhidos nas outras posições, e vice-versa. Por exemplo, se o dígito das unidades for '0' há 9 possibilidades para o dos milhares, enquanto que se for '2' há apenas 8 escolhas.

Neste caso podemos separar os números a contar em dois casos: o conjunto $A$ dos que terminam em '0', e o conjunto $B$ dos que terminam com '2', '4', '6' ou '8'.

No primeiro caso, temos uma escolha ('0') para as unidades, e 9 escolhas para as dezenas. Para cada uma destas escolhas temos 8 escolhas para as centenas; para cada destas, temos 7 escolhas para os milhares. Portanto, $|A| = 1 \times 9 \times 8 \times 7 = 504$.

No segundo caso, temos 4 escolhas para as unidades. Para cada uma destas, temos 8 escolhas para os milhares (não pode ser o das unidades, nem '0'). Mas, para cada uma destas escolhas, temos também 8 escolhas para as centenas (pois nesta posição podemos usar '0'); e para cada destas temos 7 nas dezenas. Portanto, $|B| = 4 \times 8 \times 8 \times 7 = 1792$. A contagem de todas as possibilidades é então $|A| + |B| = 2296$.

Este exemplo é uma instância do *princípio aditivo da contagem*, ou *contagem por casos*: se os objetos a serem contados podem ser divididos em conjuntos $A_1, A_2, \ldots, A_n$, *disjuntos dois a dois*, então o número total de objetos é $|A_1| + |A_2| + \cdots + |A_n|$.

**Exercício 11.39:** De um baralho completo (com 52 cartas) são retiradas 3 cartas e colocadas em fileira na mesa. A carta mais à esquerda não é um ás, e a carta mais à direita não é de copas Quantas configurações assim existem?

**Exercício 11.40:** Imagine uma lista de todos os números de 5 dígitos que podem ser formados com com os algarismos '1', '2', '5', '8' e '9', ordenada pelo valor crescente do número. A lista começa com 12589, 12598, 12859, 12895, ..., e termina com ..., 98512, 98521.

a) Qual é o 50º número desta lista?

b) Que posição ocupa o número 52819 nesta lista?

**Exercício 11.41:** Uma roleta tem 10 setores, numerados sequencialmente de 1 a 10. Cada setor deve ser pintado com uma cor diferente das cores dos dois setores vizinhos. Há 5 cores disponíveis. De quantas maneiras podemos pintar essa roleta?

## 11.12 Princípio subtrativo da contagem

Considere agora o problema de contar os números de 1000 a 9999 (inclusive ambos) nos quais o algarismo '3' aparece pelo menos uma vez. A solução $N$ deste problema apenas pelo método aditivo e multiplicativo é relativamente trabalhosa. Uma solução mais simples é contar todos os números entre 1000 e 9999 (que são 9000), e subtrair desse total a contagem $K$ dos números nesse intervalo onde o algarismo '3' *não* aparece. Nesta contagem, há 8 possibilidades para o algarismo dos milhares, e 9 para cada um dos outros três algarismos. Portanto, $K = 8 \times 9^3 = 5832$, e $N = 9000 - K = 3168$.

Podemos chamar a técnica ilustrada por este exemplo de *princípio subtrativo da contagem*. Em geral, para contar um conjunto $X$, podemos contar um conjunto $Y$ que contém $X$, e subtrair o número de elementos que foram contados a mais, ou seja a cardinalidade do complemento de $X$ em $Y$:

$$|X| = |Y| - |Y \setminus X| \qquad \text{se } X \subseteq Y \tag{11.16}$$

Esta fórmula também pode ser escrita

$$|Y \setminus Z| = |Y| - |Z| \qquad \text{se } Z \subseteq Y \tag{11.17}$$

Esta técnica é interessante quando o conjunto maior $Y$ e o complemento $Z = Y \setminus X$ são mais fáceis de contar do que o conjunto desejado $X$.

**Exercício 11.42:** Quantos pares de inteiros $(x, y)$ existem que satisfazem todas estas propriedades: (a) $x \in \{0..9\}$, (b) $y \in \{0..9\}$, (c) se $x \in \{2..7\}$, então $y \notin \{2..7\}$.

**Exercício 11.43:** Quantas mãos de 4 cartas podem ser tiradas de um baralho comum (de 52 cartas) nas quais aparecem pelo menos dois ases?

**Exercício 11.44:** Quantos números há entre 1000 e 9999, inclusive ambos, nos quais aparecem pelo menos dois algarismos consecutivos iguais?

**Exercício 11.45:** Sejam $n$ e $m$ dois números naturais quaisquer. Quantas sequências de $n$ números naturais, todos menores que $m$, possuem pelo menos dois elementos iguais?

## 11.13 Princípio da inclusão e exclusão

Outra técnica importante de contagem baseia-se na seguinte identidade, que vale para quaiquer conjuntos finitos $A$ e $B$:

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B| \tag{11.18}$$

Esta identidade é fácil de entender pelo diagrama de Venn: ao somar as contagens dos elementos de $A$ e de $B$, estamos contando todos os elementos de $A \cup B$, mas contando em dobro os elementos de $A \cap B$. Pelo mesmo raciocínio podemos concluir que, para quaisquer conjuntos finitos $A$, $B$ e $C$, vale a identidade

$$|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C| + |A \cap B \cap C| \tag{11.19}$$

As fórmulas (11.18) e (11.19) podem ser generalizadas para $n$ conjuntos finitos $A_1, A_2, \ldots, A_n$:

$$\begin{aligned} |A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n| \quad & \sum_{i} |A_i| \\ & - \sum_{\substack{i,j \\ 1 leq i \leq n}} \left|A_i \cap A_j\right| \\ & + \sum_{\substack{i,j,k \\ 1 \leq i < j \leq n}} \left|A_i \cap A_j \cap A_k\right| \\ & \quad \cdots \\ & + (-1)^{n-1} |A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n| \end{aligned} \tag{11.20}$$

Para simplificar esta fórmula, vamos denotar por $C_n^r$ o conjunto de todas as combinações de $r$ elementos do conjunto $\{1, 2, \ldots, n\}$. Podemos escrever então

$$|A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n| = \sum_{r=1}^{n} (-1)^{r-1} \left( \sum_{X \in C_n^r} \left| \bigcap_{k \in X} A_k \right| \right) \tag{11.21}$$

Esta fórmula para a cardinalidade da união de conjuntos finitos é conhecida pelo nome de *princípio da inclusão e exclusão*. Observe que os princípios aditivo e subtrativo da contagem são casos particulares deste princípio.

**Exercício 11.46:** Quantos números entre 1 e 1.000.000 são divisíveis por 5, por 7, ou por 11?

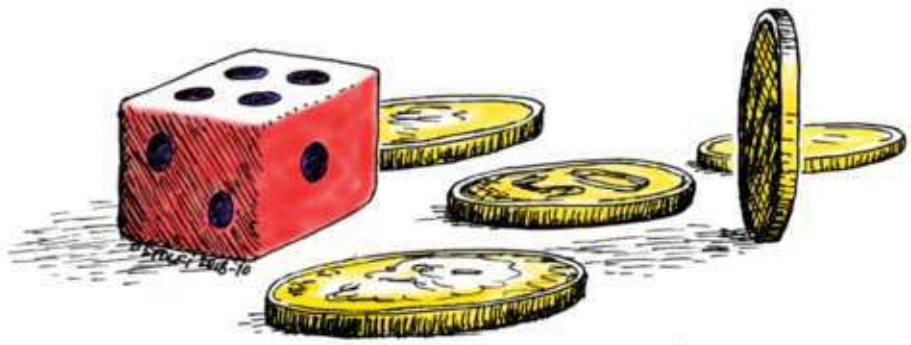
**Exercício 11.47:** Quantos números entre 1 e 1.000.000 são quadrados perfeitos, cubos perfeitos, ou são divisíveis por 5?

**Exercício 11.48:** Na notação decimal, quantos números entre 100000 e 999999 começam com algarismo par, terminam com algarismo maior que 5 ou possuem todos os algarismos iguais?

**Exercício 11.49:** Demonstre a fórmula (11.21), por indução em $n$.

# Capítulo 12

# Probabilidade



A lógica é uma ferramenta essencial pois nos permite deduzir o valor lógico de proposições complexas a partir dos valores lógicos de suas proposições e predicados elementares. Porém, para usá-la precisamos saber se as proposições e predicados são verdadeiros ou falsos.

Na vida real, é raro sabermos com certeza se uma afirmação é verdadeira ou não. Todas as fontes de informação que temos — notícias, contagens, medidas, evidências, e nossos próprios sentidos e mente — podem ser errôneas ou enganosas; de modo que toda proposição que acreditamos verdadeira pode ser falsa, e vice-versa. Como podemos então usar a lógica, ou tomar qualquer decisão, nessas condições?

Por outro lado, há afirmações sobre as quais temos muito mais confiança do que outras. Podemos tratar a frase "ontem choveu na minha rua" como verdadeira, com confiança quase absoluta, se estávamos lá ontem. Por outro lado, se a previsão do tempo diz que "não vai chover manhã", é prudente pensar na possibilidade de que chova.

Para certas afirmações, nossa confiança pode vir do histórico de situações semelhantes que já presenciamos. Podemos tratar como certa a proposição "uma pedra solta no ar cai para baixo" com base em incontáveis experiências que tivemos ao longo da vida. As leis da física, em particular, são "certezas" adquiridas por meio de experimentos cuidadosos e exaustivamente analisados. Mesmo assim sempre é possível que, em situações especiais que nunca encontramos antes, essas afirmações "certamente verdadeiras" venham a ser falsas.

Para algumas proposições, nossa confiança pode se dividir igualmente entre as duas possibilidades. Alguém jogou uma moeda ao ar e ela caiu onde não podemos ver. Será que o resultado foi cara, ou coroa? Nossa experiência com moedas nos diz que às vezes o resultado é um e as vezes é outro. Da mesma forma, quando atiramos um dado, nossa experiência diz apenas que o resultado pode ser qualquer número entre 1 e 6, e que parece não haver diferença entre eles. Por essa experiência, a afirmação "o resultado será 3" merece tanta confiança quanto "o resultado será 5". Na verdade, jogos de azar como dados e cara-ou-coroa baseiam-se inteiramente no fato de que todos resultados possíveis são igualmente plausíveis.

Por outro lado, mesmo nesses jogos há afirmações que merecem mais confiança do que outras. Quando atiramos um dado, a afirmação "o resultado será 3" deve nos parecer menos plausível do que "o resultado será diferente de 3". Esta confiança pode vir da experiência, mas também por raciocínio: se todos os 6 resultados tem chances iguais de acontecer, então o resultado 3 deve ter menos chances do que os outros cinco juntos.

A teoria da probabilidade surgiu para formalizar este tipo de raciocínio, que tem o mesmo objetivo da lógica clássica — ajudar-nos a pensar e decidir — mas lida com graus de confiança, em vez de certezas absolutas.

## 12.1 Definição

Nesta teoria, cada proposição $P$ tem uma *probabilidade*: um valor real entre 0 e 1, que mede o grau de confiança ou expectativa que temos de que a proposição seja verdadeira. Denotaremos esse número por $\Pr(P)$. Probabilidade 1 significa que temos certeza absoluta de que a afirmação $P$ é verdadeira. Probabilidade 0 significa que temos certeza absoluta que é falsa. O valor $1/2$ significa que não sabemos se $P$ é falsa ou verdadeira, e que qualquer das duas possibilidades nos parece igualmente provável. Assim, por exemplo, quando vamos jogar uma moeda, podemos atribuir probabilidade $1/2$ à afirmação "o resultado será cara". Uma probabilidade mais próxima de 1 significa que não temos certeza, mas acreditamos que é mais provável que a afirmação $P$ seja verdadeira do que ela seja falsa.

Na teoria da probabilidade, toda proposição $P$ em tese continua tendo um valor lógico "verdadeiro" ou "falso", mas a teoria não exige que esse valor seja conhecido. A probabilidade da afirmação reflete justamente nosso grau de conhecimento. Se conhecemos o valor lógico da afirmação devemos atribuir a ela probabilidade 0 ou 1. Neste caso, como veremos, a teoria da probabilidade se reduz à lógica clássica.

As probabilidades são frequentemente expressas em percentagens. Assim, tanto faz dizer que uma probabilidade é 25% ou $25/100 = 0,25$.

### 12.1.1 Distribuição uniforme

Em geral, quando temos $n$ alternativas possíveis para uma situação qualquer, e não temos nenhuma informação, experiência ou raciocínio que justifique atribuir probabilidade maior a uma algumas do que outras, é razoável atribuir probabilidade $1/n$ a cada alternativa. Neste caso dizemos que essas alternativas tem uma *distribuição uniforme* de probabilidade.

Um exemplo de distribuição uniforme é o sorteio de um item entre $n$ outros. Para que o sorteio seja justo é importante que ele seja feito de modo que cada item tenha a mesma probabilidade

de ser escolhido. Neste caso dizemos que a escolha é *perfeitamente aleatória*. Esse conceito é importante em muitos jogos "de azar", como cara-ou-coroa, palitinho, par-ou-ímpar, dados, roletas, baralhos, etc.. Esses jogos dependem de dispositivos ou ações que podem dar dois ou mais resultados distintos. Para que o jogo seja justo, é essencial que os jogadores não tenham nenhum conhecimento prévio sobre o resultado, de modo que todos atribuam uma distribuição uniforme de probabilidade ao mesmo.

Por outro lado, é importante observar que a teoria não diz como atribuir as probabilidades de afirmações elementares, mas apenas como combiná-las para obter as probabilidades de afirmações compostas. É importante notar que as probabilidades dependem do observador: se um jogador troca o dado "honesto" por um viciado, ele pode (e deve) atribuir probabilidades diferentes a cada número.

### 12.1.2 Princípio da exclusão mútua

Intuitivamente, parece pouco razoável termos confiança ao mesmo tempo em duas afirmações contraditórias. Na teoria da probabilidade, essa intuição é formalizada pelo *princípio da exclusão mútua*, ou *aditividade*: se duas proposições $P$ e $Q$ não podem ser verdadeiras ao mesmo tempo (isto é, $P \to \neg Q$ e $Q \to \neg P$), então devemos ter $\Pr(P) + \Pr(Q) \leq 1$.

Por exemplo, considere as afirmações "o Diretor está agora em São Paulo" e "o Diretor está agora no Rio de Janeiro". Quaisquer que sejam as informações que temos a respeito do paradeiro do Diretor, não faz sentido atribuir probabilidade 0,75 para a primeira e 0,80 para a segunda, pois se uma delas for verdadeira, a outra não é.

Essa regra pode ser generalizada para três ou mais proposições $P_1, P_2, \ldots, P_n$. Essas proposições são *mutuamente exclusivas* se sabemos que $P_i \to \neg P_j$, para quaisquer $i$ e $j$ entre 1 e $n$ com $i \neq j$. Nesse caso, o princípio da exclusão mútua exige que $\Pr(P_1) + \Pr(P_2) + \cdots + \Pr(P_n) \leq 1$.

### 12.1.3 Princípio da exaustão

Por outro lado, se sabemos que pelo menos uma dentre duas afirmações é verdadeira, não é razoável termos pouca confiança nas duas afirmações. Por exemplo, não é razoável não acreditar nem na afirmação "o lucro será maior que R$ 10.000" nem na afirmação "o lucro será menor que R$ 20.000", pois pelo menos uma dessas afirmações com certeza é verdadeira.

Na teoria da probabilidade, essa regra é formalizada pelo *princípio da exaustão*: se sabemos que $P \vee Q$ é verdadeiro, então devemos ter $\Pr(P) + \Pr(Q) \geq 1$. No exemplo acima, podemos atribuir probabilidade $1/2$ ou $3/4$ para ambas, mas não $1/4$; se atribuirmos probabilidade $0,30$ para a primeira, podemos atribuir $0,80$ para a segunda, mas não $0,50$.

Mais geralmente se sabemos que $P_1 \vee P_2 \vee \cdots \vee P_n$ é verdadeiro, então devemos ter $\Pr(P_1) + \Pr(P_2) + \cdots + \Pr(P_n) \geq 1$.

### 12.1.4 Princípio da complementaridade

Juntando o princípio da exclusão e da exaustão, podemos concluir que se uma afirmação $P$ é o oposto lógico (negação) da afirmação $Q$, então a soma das probabilidades deve ser exatamente 1.

Ou seja, para qualquer afirmação $P$, temos

$$\Pr(P) + \Pr(\neg P) = 1 \tag{12.1}$$

ou seja

$$\Pr(\neg P) = 1 - \Pr(P) \tag{12.2}$$

Por exemplo, se a probabilidade de "vai chover amanhã" é $3/4$, a probabilidade de "não vai chover amanhã" tem que ser $1/4$. Esta regra é conhecida como o *princípio da complementaridade*.

Esta regra também pode ser generalizada para três ou mais afirmações. Suponha que sabemos que exatamente uma das afirmações $P_1, P_2, \ldots, P_n$ é verdadeira. Isto é, sabemos que elas são mutuamente exclusivas, mas também que uma delas tem que ser verdadeira. Então devemos ter

$$\Pr(P_1) + \Pr(P_2) + \cdots + \Pr(P_n) = 1 \tag{12.3}$$

Por exemplo, suponha que alguém escolheu e retirou uma carta de um baralho comum. Considere as afirmações "a carta é ouros", "a carta é copas", "a carta é paus", "a carta é espadas", ou "a carta é um coringa". Como a carta só pode ser de um tipo, e tem que ser de um desses cinco tipos, então as probabilidades dessas afirmações devem somar 1.

Observe que este princípio é respeitado quando atribuímos probabilidade $1/n$ para $n$ alternativas igualmente prováveis.

### 12.1.5 Princípio da exclusão e inclusão

Os princípios acima podem ser vistos como corolários de um princípio mais geral: para quaisquer afirmações $P$ e $Q$, devemos ter

$$\Pr(P \vee Q) = \Pr(P) + \Pr(Q) - \Pr(P \wedge Q) \tag{12.4}$$

Compare este princípio com a fórmula para cardinalidade de conjuntos

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B| \tag{12.5}$$

**Exercício 12.1:** Contagens em uma fábrica mostraram que 5% dos parafusos tem um defeito na rosca, 4% tem um defeito na cabeça, e 2% tem um defeito em ambas as partes. Qual é a probabilidade de que um desses parafusos, escolhido ao acaso, tenha algum defeito?

### 12.1.6 Princípio da independência

Um dado e uma moeda são atirados ao mesmo tempo. Como discutimos acima, é razoável atribuir probabilidade 1/6 à afirmação "o resultado do dado será 3" e probabilidade 1/2 à afirmação "o resultado da moeda será cara". Que probabilidade devemos atribuir à conjunção dessas duas frases, ou seja "o resultado do dado será 3 e o da moeda será cara"?

Uma maneira de fazer esta escolha é observar que há 12 possíveis resultados para os dois lances. Vamos denotar por $D(x)$ e $M(y)$, respectivamente, os predicados "o resultado do dado será

$x$", e "o resultado da moeda será $y$". As 12 possibilidades correspondem às afirmações

$$\begin{array}{ll} D(1) \wedge M(\texttt{cara}) & D(1) \wedge M(\texttt{coroa}) \\ D(2) \wedge M(\texttt{cara}) & D(2) \wedge M(\texttt{coroa}) \\ D(3) \wedge M(\texttt{cara}) & D(3) \wedge M(\texttt{coroa}) \\ D(4) \wedge M(\texttt{cara}) & D(4) \wedge M(\texttt{coroa}) \\ D(5) \wedge M(\texttt{cara}) & D(5) \wedge M(\texttt{coroa}) \\ D(6) \wedge M(\texttt{cara}) & D(6) \wedge M(\texttt{coroa}) \end{array} \tag{12.6}$$

Estas afirmações são mutuamente exclusivas e esgotam todas as possibilidades, portanto a soma de suas probabilidades deve ser 1. Se não temos nenhuma razão para suspeitar que o dado de alguma maneira influencie a moeda, ou vice-versa, então é razoável atribuir a mesma probabilidade (1/12) a estas 12 afirmações.

Note que 1/12 é o produto de $\Pr(D(x)) = 1/6$ e $\Pr(M(y)) = 1/2$. Temos portanto que $\Pr(D(x) \wedge M(y)) = \Pr(D(x))\Pr(M(y))$ para quaisquer $x$ e $y$.

Este é um exemplo de uma regra geral, o *princípio da independência*. Por definição, duas afirmações $P$ e $Q$ são ditas *independentes* se e somente se

$$\Pr(P \wedge Q) = \Pr(P)\Pr(Q) \tag{12.7}$$

O princípio da independência diz que, se não sabemos de nenhuma ligação ou influência entre o valor lógico de uma afirmação $P$ e o de outra afirmação $Q$, então é razoável supor que elas são independentes; ou seja, é razoável atribuir à conjunção $P \wedge Q$ o produto das respectivas probabilidades.

**Exercício 12.2:** Dois dados, um vermelho e um verde, são atirados ao mesmo tempo. Qual é a probabilidade de que o resultado do dado vermelho seja menor que 4, e o do dado verde seja maior que 1?

**Exercício 12.3:** Se as afirmações $P$ e $Q$ são independentes, quanto vale $\Pr(P \vee Q)$ em função de $\Pr(P)$ e $\Pr(Q)$?

**Exercício 12.4:** Contagens em uma fábrica mostraram que 20% dos parafusos tem um defeito na rosca, 30% tem um defeito na cabeça. Supondo que os defeitos afetam as duas partes do parafuso de maneira independente, qual é a probabilidade de que um desses parafusos, escolhido ao acaso, tenha algum defeito?

**Exercício 12.5:** Uma empreiteira construiu um condomínio de casas, e percebeu que a lâmpada da sala não estava acendendo em algumas delas. Então ela mandou dois empregados, $A$ e $B$, visitarem todas as casas, em dias diferentes, para verificar quais casas tinham esse defeito. O empregado $A$ relatou que a lâmpada não acendia em 30 das casas, enquanto que $B$ notou esse mesmo defeito em 20 das casas. Apenas 15 casas estavam nas duas listas.

Evidentemente, os dois empregados não foram muito cuidadosos. Sejam $p_A$ e $p_B$ as probabilidades de $A$ e $B$, respectivamente, terem percebido o defeito numa casa em que ele existia. Estime $p_A$, $p_B$, e o número $N$ de casas onde o defeito realmente ocorria. Suponha que os empregados não cometeram erros no sentido oposto, isto é, não anotaram como defeituosa nenhuma casa onde a lâmpada acendia.

### 12.1.7 Relação com a lógica clássica

A teoria da probabilidade inclui a lógica clássica como caso particular. Mais precisamente, atribuir probabilidade 0 a uma afirmação equivale a acreditar que a afirmação é falsa; e atribuir probabilidade 1 equivale a acreditar que ela é verdadeira. Se todas as afirmações tem probabilidade 0 ou 1, as regras e conceitos da lógica clássica podem ser traduzidos por regras e conceitos da probabilidade. Por exemplo, o conetivo $P \to Q$ equivale a afirmar que $\Pr(Q|P) = 1$.

## 12.2 Variável aleatória

Uma *variável aleatória* é uma variável (parâmetro, quantia) $X$ cujo valor é conhecido apenas parcialmente, no sentido probabilístico. Isto é, sabemos que o valor de $X$ é algum elemento de um certo conjunto $D$, o *domínio* da variável; e, para qualquer $v$ em $D$, temos uma medida de probabilidade $\Pr(X = v)$ para a afirmação "$X = v$". A função que a cada $v \in D$ associa a probabilidade $\Pr(X = v)$ é chamada de *distribuição de probabilidade* (ou simplesmente *distribuição*) da variável $X$.

Observe que, se $u$ e $v$ são elementos distintos de $D$, então as afirmações "$X = u$" e "$X = v$" são mutuamente exclusivas. Além disso, sabemos que existe algum elemento $v$ em $D$ tal que a afirmação "$X = v$" é verdadeira. Pelo princípio de inclusão e exclusão, temos portanto que

$$\sum_{v \in D} \Pr(X = v) = 1$$

Observe também que, nestas condições, temos que atribuir $\Pr(X = v) = 0$ para qualquer valor $v$ que não está no conjunto $D$.

> **Exemplo 12.1:** Um dado foi lançado, mas o resultado da jogada ainda está oculto. Seja $X$ a variável aleatória cujo valor é esse resultado. Sabemos que o domínio de $X$ é o conjunto $D = \{1, 2, \ldots, 6\}$. Como não temos motivos para distinguir entre esses resultados, é razoável atribuir probabilidades iguais $(1/6)$ para cada valor em $D$, e probabilidade zero para qualquer outro valor. Em particular, $\Pr(X = 3) = \Pr(X = 5) = 1/6$, e $\Pr(X = 0) = \Pr(X = 7) = \Pr(X = 1/2) = 0$.

Variáveis aleatórias com valores numéricos podem ser combinadas com operações aritméticas e funções matemáticas, resultando em outras variáveis aleatórias. Por exemplo, se $\alpha$ é um número real, a fórmula $\alpha X + \sqrt{Y}$ denota a variável aleatória cujo valor é $\alpha u + \sqrt{v}$, onde $u$ é o valor de $X$ e $v$ o valor de $Y$. A distribuição dessa nova variável é determinada pelas distribuições de probabilidades de $X$ e de $Y$.

> **Exercício 12.6:** Sejam $X$ e $Y$ os resultados obtidos atirando-se dois dados de cores diferentes, cada um com distribuição uniforme de probabilidades. Determine a distribuição das seguintes variáveis derivadas de $X$ e $Y$:
>
> 1. $X^2$
> 2. $X \bmod 3$
> 3. $X + Y$
> 4. $\min\{X, Y\}$

Neste livro só vamos tratar de variáves aleatórias cujos domínios são conjuntos discretos (finitos ou enumeráveis). A teoria pode ser estendida para variáveis com domínios não enumeráveis, como os números reais, mas esse assunto merece uma disciplina à parte.

### 12.2.1 Variáveis aleatórias independentes

Dizemos que duas variáveis aleatórias $X$ e $Y$ são *independentes* se e somente se, para quaisquer valores $u$ e $v$ em seus respectivos domínios,

$$Pr(X = u \wedge Y = v) = Pr(X = u)Pr(Y = v) \tag{12.8}$$

Como no caso de proposições, é razoável supor que duas variáveis aleatórias são independentes quando não temos razão para supor que o valor de uma tenha alguma influência no valor da outra, ou que ambas sejam influenciadas por algum fator comum. Assim, por exemplo, é razoável supor que os valores obtidos por dois lances consecutivos do mesmo dado são variáveis independentes; pois os movimentos do dado durante o primeiro lance não influenciam seus movimentos no segundo lance. Por outro lado, não é razoável supor independência entre a altura e o peso de uma pessoa escolhida ao acaso; pois é razoável supor que pessoas mais altas tendem a ter peso maior.

Também podemos supor que duas variáveis aleatórias são independentes quando sabemos que há alguma conexão física entre elas, mas não temos razão para supor que essa conexão afete as probabilidades dos valores em alguma direção específica. Por exemplo, imagine que dois dados são colocados dentro de um copo que é agitado e entornado sobre a mesa. O movimento de cada dado afeta o movimento do outro, e ambos são afetados pelos movimentos do copo; mesmo assim, não temos razão para supor que obter um valor $u$ em um dado aumente ou diminua as chances de obter valor $v$ no outro dado.

**Exercício 12.7:** Sejam $X$ e $Y$ os resultados obtidos atirando-se dois dados de cores diferentes, cada um com distribuição uniforme de probabilidades. Suponha que as variáveis $X$ e $Y$ são independentes.

a) Sejam $S = X + Y$ e $D = X - Y$. As variáveis $S$ e $D$ são independentes? Justifique.

b) Sejam $S'$ e $D'$ os restos da divisão de $S$ e $D$ por 6, ambos inteiros entre 0 e 5 inclusive. As variáveis $S'$ e $D'$ são independentes? Justifique.

## 12.3 Valor esperado

Um uso importante (e o mais antigo) da teoria da probabilidade é avaliar o ganho ou perda que pode decorrer de uma escolha ou acontecimento cujo resultado é desconhecido, como por exemplo uma aposta ou um investimento na bolsa.

Suponha por exemplo que atiramos uma moeda e apostamos R$ 30 contra R$ 10 que o resultado será cara. Temos igual chance de ganhar R$ 10 (se sair cara) e perder R$ 30 (se sair coroa). Ou seja,

$$\text{Pr(“nosso ganho será R\$ } +10\text{”)} \;=\; \text{Pr(“nosso ganho será R\$ } -30\text{”)} \;=\; \frac{1}{2}$$

Intuitivamente, se repetirmos essa aposta $n$ vezes, em aproximadamente metade das vezes vamos ganhar 10 e na outra metade perder 30; portanto o ganho por aposta, em média, será aproximadamente

$$\frac{\frac{n}{2}(\text{R\$ } +10) + \frac{n}{2}(\text{R\$ } -30)}{n} = \text{R\$ } -10 \tag{12.9}$$

Para entender melhor este exemplo, suponha que repetimos duas vezes essa aposta. Temos quatro possibilidades: perder nas duas vezes, só na primeira, só na segunda, ou ganhar nas duas. Nosso ganho médio por aposta será respectivamente, $((-30)+(-30))/2 = -30$, $((-30)+(+10))/2 = -10$, $((+10)+(-30))/2 = -10$, e $((+10)+(+10))/2 = +10$. Supondo que o resultado de cada lance seja independente dos anteriores, e denotando por $G(x)$ o predicado "nosso ganho médio por aposta será $x$", teremos então

$$\begin{aligned} \Pr(G(-30)) &= 1/4 \\ \Pr(G(-10)) &= 1/4 + 1/4 = 1/2 \\ \Pr(G(+10)) &= 1/4 \end{aligned} \tag{12.10}$$

Ou seja, o ganho médio R$ $-10$ é duas vezes mais provável que R$ $-30$ ou R$ $+10$. Para quatro apostas seguidas, podemos ter 0, 1, 2, 3, ou 4 acertos, com ganhos médios por aposta de $-30$, $-20$, $-10$, 0 e $+10$, respectivamente. As probabilidades são

$$\begin{aligned} \Pr(G(-30)) &= \binom{4}{0}/2^4 = 1/16 \\ \Pr(G(-20)) &= \binom{4}{1}/2^4 = 4/16 \\ \Pr(G(-10)) &= \binom{4}{2}/2^4 = 6/16 \\ \Pr(G(0)) &= \binom{4}{3}/2^4 = 4/16 \\ \Pr(G(+10)) &= \binom{4}{4}/2^4 = 1/16 \end{aligned} \tag{12.11}$$

Como se pode ver, é muito mais provável que o ganho médio por aposta seja R$ $-10$ do que qualquer outro valor. A medida que o número de apostas aumenta, essa tendência permanece: o valor mais provável para o ganho médio por aposta será R$ $-10$.

Em geral, suponha que temos uma variável aleatória $X$ que pode assumir qualquer valor de um conjunto de valores numéricos $D$. O *valor médio esperado* (ou simplesmente o *valor esperado*) de $X$ é, por definição

$$\mathcal{E}(X) = \sum_{v \in D} v \Pr(X = v) \tag{12.12}$$

Para entender esta fórmula, suponha que temos uma coleção grande com $N$ variáveis, todas elas semelhantes a $X$ mas tais que o valor de uma delas não tem influência nos valores das outras. Nesse caso, o número de variáveis que tem valor $v$ será aproximadamente $N \Pr(X = v)$.

Observe que se $D$ tem um número finito $n$ valores distintos, e todos os valores de $D$ são igualmente prováveis, então $\Pr(X = v) = 1/n$, e a fórmula do valor esperado (12.12) reduz-se à média aritmética dos elementos de $D$.

**Exercício 12.8:** Furar um poço de petróleo em determinada região custa R$500.000, e tem 30% de chance de encontrar óleo. Se isso acontecer, o poço pode ser vendido por R$800.000. Caso contrário o investimento é totalmente perdido. Qual o ganho esperado por poço?

Quando o domínio da variável é um conjunto infinito, o valor esperado pode ser infinito, mesmo que todos os seus valores possíveis sejam finitos. Por exemplo, considere a variável $X$ cujo valor

é um inteiro positivo, tal que $\Pr(X = k) = (6/\pi^2)/k^2$ para todo $k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$. Esta distribuição de probabilidades é válida, pois verifica-se que a soma de todas as probabilidades é 1. Entretanto, o valor esperado de $X$ deveria ser a somatória

$$\mathcal{E}(X) \;=\; \sum_{k=1}^{\infty} k \cdot \frac{A}{k^2} \;=\; A \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$$

que, como sabemos, não tem valor finito (veja seção 9.6).

O valor esperado pode ser definido para qualquer variável cujos valores podem ser somados e multiplicados por um número real. Por exemplo, suponha que o valor de uma variável aleatória $X$ é um par $(u, v)$, onde $u$ é o resultado de lançar uma moeda (0 = cara, 1 = coroa), e $v$ é o resultado de lançar um dado (um inteiro entre 1 e 6); sendo que cada par possível tem a mesma probabilidade $1/12$. Note que esses pares podem ser considerados vetores do espaço $\mathbb{R}^2$. Portanto podemos calcular o valor esperado de $X$

$$\mathcal{E}(X) \;=\; \frac{1}{12}\left((0,1) + (0,2) + \cdots + (1,5) + (1,6)\right) \;=\; \left(\frac{1}{6}, \frac{7}{2}\right)$$

### 12.3.1 Propriedades do valor esperado

Seja $X$ uma variável aleatória com domínio numérico, sejam $\alpha$ e $\beta$ dois números reais quaisquer, e seja $Z$ a variável aleatória $\alpha X + \beta$. Nesse caso, pode-se provar que

$$\mathcal{E}(Z) = \mathcal{E}(\alpha X + \beta) = \alpha\, \mathcal{E}(X) + \beta \tag{12.13}$$

Porém, se uma variável aleatória $Z$ depende de $X$ de maneira não linear (por exemplo, se $Z$ é o quadrado de $X$), não existe uma fórmula geral que relacione $\mathcal{E}(Z)$ a $\mathcal{E}(X)$ (Veja o exercício 12.10.)

Sejam $X$ e $Y$ duas variáveis aleatórias com valores numéricos, e seja $Z$ a variável aleatória, denotada por $X + Y$, cujo valor é a soma dos valores de $X$ e de $Y$. Verifica-se que

$$\mathcal{E}(Z) = \mathcal{E}(X) + \mathcal{E}(Y) \tag{12.14}$$

Estas fórmulas valem mesmo que as variáveis $X$ e $Y$ tenham alguma dependência entre si. Note que não há fórmulas análogas para outras operações (como produto, divisão, etc.).

**Exercício 12.9:** Um dado vai ser lançado, e a seguinte aposta é oferecida: o cliente paga R$7,00 ao banqueiro, e recebe em reais o dobro do valor que sair no dado. Por exemplo, se sair um 4, o cliente recebe R$8,00, obtendo um ganho líquido de R$1,00. Qual é o ganho esperado do cliente?

**Exercício 12.10:** Na mesma situação do exercício 12.9, uma outra aposta é oferecida: cliente paga R$49,00 ao banqueiro, e recebe em reais o dobro do quadrado do valor que sair no dado. Por exemplo, se sair um 6, o cliente recebe $2 \times 6^2 =$ R$72,00, obtendo um ganho líquido de R$23,00. Qual é o ganho esperado do cliente?

## 12.4 Mediana

O valor esperado de uma variável aleatória $X$ pode em muitos casos ser considerado o "valor típico" de $X$. Por exemplo, se $X$ é a altura (em metros) de uma pessoa que não vimos ainda, o valor esperado de $X$ para a população brasileira é próximo a $1,70$ m. Podemos então imaginar o "brasileiro típico" como tendo essa altura.

Porém este raciocínio nem sempre é apropriado. Por exemplo, suponha uma vila com 99 casas térreas e um prédio de 101 andares, e considere a variável aleatória $X$ que é o número de andares de um edifício arbitrário dessa vila, escolhido com probabilidade uniforme. O valor esperado da variável $X$ será 2, mas obviamente não é correto dizer que o "edifício típico" dessa vila tem dois andares.

Devido a exemplos como esse, foram propostas outras maneiras de obter o "valor típico" de uma variável aleatória. O mais comum é a *mediana*. Idealmente, este é um valor $v$ tal que $\Pr(X \le v) \ge 1/2$ e $\Pr(X \ge v) \ge 1/2$.

Por exemplo, suponha que a variável aleatória $X$ pode ter qualquer valor inteiro entre 1 e 6, com as seguintes probabilidades

| $k$ | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $\Pr(X = k)$ | $\frac{6}{20}$ | $\frac{2}{20}$ | $\frac{1}{20}$ | $\frac{3}{20}$ | $\frac{7}{20}$ | $\frac{1}{20}$ |

Neste caso podemos tomar a mediana de $X$ como sendo 4, pois

$$\begin{aligned} \Pr(X \le 4) &= \tfrac{6}{20} + \tfrac{2}{20} + \tfrac{1}{20} + \tfrac{3}{20} = \tfrac{12}{20} \ge \tfrac{1}{2} \\ \Pr(X \ge 4) &= \tfrac{3}{20} + \tfrac{7}{20} + \tfrac{1}{20} = \tfrac{11}{20} \ge \tfrac{1}{2} \end{aligned}$$

Note que o valor esperado de $X$ é

$$1 \cdot \frac{6}{20} + 2 \cdot \frac{2}{20} + 3 \cdot \frac{1}{20} + 4 \cdot \frac{3}{20} + 5 \cdot \frac{7}{20} + 6 \cdot \frac{1}{20} = \frac{66}{20} = 3,3$$

Note porém que pode haver diversos valores $v$ que satisfazem a condição $\Pr(X \le v) = \Pr(X \ge v)$. Por exemplo, se a distribuição de probabilidades de $X$ for

| $k$ | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $\Pr(X = k)$ | $\frac{6}{20}$ | $\frac{2}{20}$ | $\frac{2}{20}$ | $\frac{1}{20}$ | $\frac{8}{20}$ | $\frac{1}{20}$ |

então, para qualquer valor $v$ tal que $3 < v < 4$, teremos $\Pr(X \le v) = (6 + 2 + 2)/20 = 1/2$ e $\Pr(X \ge v) = (1 + 8 + 1)/20 = 1/2$.

Quando isso acontece, pode-se provar que os valores de $v$ que satisfazem a definição formam um intervalo finito dos números reais. Nesses casos, alguns autores definem a mediana como sendo o ponto médio desse intervalo; no exemplo acima, seria $v = (3 + 4)/2 = 3,5$.

**Exercício 12.11:** Seja $X$ o quadrado de um número entre 1 e 6 que será obtido pelo lançamento de um dado. Note que o valor de $X$ pode ser 1, 4, 9, 16, 25, ou 36. Qual é o valor esperado da variável $X$? E sua mediana?

**Exercício 12.12:** Seja $X$ o *produto* dos dois números entre 1 e 6 que serão obtidos pelo lançamento de dois dados. Qual é a distribuição de probabilidades da variável $X$? Qual é seu valor esperado? E sua mediana?

**Exercício 12.13:** Prove que qualquer variável aleatória com valores inteiros tem uma mediana.

## 12.5 Moda

Outra maneira de definir o "valor típico" de uma variável aleatória é tomar o *valor mais provável*, também chamado de *moda* da variável. Por exemplo, se a distribuição for

| $k$ | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $\Pr(X=k)$ | $\frac{6}{20}$ | $\frac{2}{20}$ | $\frac{1}{20}$ | $\frac{3}{20}$ | $\frac{7}{20}$ | $\frac{1}{20}$ |

diremos que a moda de $X$ é 5. Por outro lado, se as probabilidades forem um pouco diferentes

| $k$ | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $\Pr(X=k)$ | $\frac{7}{20}$ | $\frac{2}{20}$ | $\frac{1}{20}$ | $\frac{3}{20}$ | $\frac{6}{20}$ | $\frac{1}{20}$ |

A moda será 1.

## 12.6 Variância e desvio padrão

Em muitas situações, não basta saber o valor esperado $\mathcal{E}(X)$ de uma variável aleatória; é preciso também saber até que ponto o valor da variável pode diferir desse valor esperado.

Considere por exemplo as variáveis aleatórias $X$ e $Y$, que podem assumir valores entre 1 e 5 com as seguintes probabilidades:

| $k$ | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|---|---|---|---|---|---|
| $\Pr(X=k)$ | $\frac{1}{20}$ | $\frac{7}{20}$ | $\frac{4}{20}$ | $\frac{7}{20}$ | $\frac{1}{20}$ |
| $\Pr(Y=k)$ | $\frac{7}{20}$ | $\frac{2}{20}$ | $\frac{2}{20}$ | $\frac{2}{20}$ | $\frac{7}{20}$ |

As duas variáveis tem o mesmo valor esperado $v = 3$, mas intuitivamente podemos ver que $Y$ varia mais do que $X$. Como podemos transformar essa intuição em números?

A maneira mais comum é calcular a *variância* $\mathcal{V}(X)$ da variável, definida pela fórmula

$$\mathcal{V}(X) = \sum_{v \in D} (v - \mathcal{E}(X))^2 \Pr(X = v) \tag{12.15}$$

Pode-se verificar que este é o valor esperado da variável $Y = (X - \mathcal{E}(X))^2$.

No exemplo acima, temos

$$\begin{aligned} \mathcal{V}(X) &= (1-3)^2 \cdot \tfrac{1}{20} + (2-3)^2 \cdot \tfrac{7}{20} + (3-3)^2 \tfrac{4}{20} + (4-3)^2 \cdot \tfrac{7}{20} + (5-3)^2 \cdot \tfrac{1}{20} = \tfrac{26}{20} = 1,3 \\ \mathcal{V}(Y) &= (1-3)^2 \cdot \tfrac{7}{20} + (2-3)^2 \cdot \tfrac{2}{20} + (3-3)^2 \tfrac{2}{20} + (4-3)^2 \cdot \tfrac{2}{20} + (5-3)^2 \cdot \tfrac{7}{20} = \tfrac{60}{20} = 3,0 \end{aligned}$$

evidenciando assim que os valores de $Y$ tendem a estar mais longe de sua média do que os valores de $X$.

Observe que as parcelas $(v - \mathcal{E}(X))^2$ da somatória (12.15) nunca são negativas, portanto a variância também não pode ser negativa. Além disso, a variância só pode ser zero se todas as parcelas forem zero, ou seja se a variável $X$ só pode ter um valor — que é portanto seu valor esperado $\mathcal{E}(X)$. Se ela pode assumir dois ou mais valores distintos, com probabilidades diferentes de zero, então a variância será estritamente positiva.

Observe que, se o domínio $D$ da variável $X$ é um conjunto infinito, a variância pode ser infinita (mesmo que o valor esperado exista e seja finito). Por exemplo, seja $D = \mathbb{Z} \setminus \{0\}$, e $\Pr(X = v) = B/|v|^3$, onde $B$ é uma constante tal que a soma das probabilidades seja 1. O valor esperado existe ($\mathcal{E}(X) = 0$). Porém, temos

$$\mathcal{V}(X) = \sum_{v \in D} (v - \mathcal{E}(X))^2 \Pr(X = v) \;=\; 2 \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{B}{v^3} v^1 \;=\; 2B \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{v}$$

que, como sabemos, é infinita.

### 12.6.1 Propriedades da variância

Seja $X$ uma variável aleatória com valores numéricos. Sejam $\alpha$ e $\beta$ dois valores reais arbitrários. Verifica-se então que

$$\mathcal{V}(\alpha X + \beta) = \alpha^2 \, \mathcal{V}(X) \tag{12.16}$$

Note que somar uma constante $\beta$ a uma variável não altera sua variância.

Se $X$ e $Y$ são duas variáveis aleatórias *independentes*, verifica-se que

$$\mathcal{V}(X + Y) = \mathcal{V}(X) + \mathcal{V}(Y) \tag{12.17}$$

Esta fórmula não vale se soubermos de alguma dependência entre as variáveis $X$ e $Y$ (isto é, se atribuímos a alguma afirmação do tipo "$(x = u) \wedge (Y = v)$" uma probabilidade diferente de $\Pr(X = u) \Pr(Y = v)$). Nesse caso, a variância de $X + Y$ pode ser maior ou menor que $\mathcal{V}(X) + \mathcal{V}(Y)$.

### 12.6.2 Desvio padrão

Pode-se dizer que, quanto maior a variância, mais "espalhada" é a distribuição de probabilidade da variável. Entretanto, não é fácil interpretar o valor numérico da variância. Por exemplo, se o valor de $X$ é uma medida em metros, a variância é medida em metros quadrados. Uma medida de "espalhamento" que é mais fácil de interpretar é o *desvio padrão*, definido como a raiz quadrada da variância:

$$\mathcal{D}(X) \;=\; \sqrt{\mathcal{V}(X)} \;=\; \sqrt{\sum_{v \in D} (v - \mathcal{E}(X))^2 \Pr(X = v)}$$

O desvio padrão é medido com as mesmas unidades da variável. Informalmente, pode ser interpretado como o valor "típico" da diferença entre o valor da variável e seu valor esperado.

> **Exemplo 12.2:** Suponha um lote de parafusos que deveriam ser todos iguais, e Seja $X$ o comprimento real de um desses parafusos, escolhido ao acaso. Se dissermos que o valor esperado de $X$ é 150 mm e o desvio padrão é 1 mm, estamos dizendo que o comprimento do parafuso dificilmente será muito maior que 151 mm ou muito menor que 149 mm.

Esta interpretação informal do desvio padrão tem por base o seguinte resultado, devido ao matemático russo Pafnuti Chebyshev ou Tchebychev (1821–1894):

**Teorema 12.1:** Para qualquer variável aleatória $X$ e qualquer número real $\alpha \geq 1$,

$$\Pr(|X - \mathcal{E}(X)| \geq \alpha \, \mathcal{D}(X)) \leq \frac{1}{\alpha^2} \tag{12.18}$$

A demonstração deste resultado foge do escopo deste livro. Em outras palavras, se $\mathcal{E}(X) = \mu$ e $\mathcal{D}(X) = \sigma$, então o valor de $X$ estará dentro do intervalo $[\mu - \alpha\sigma, \mu + \alpha\sigma]$ com probabilidade $1 - 1/\alpha^2$. Para a variável $X$ do exemplo 12.2, o teorema de Tchebychev diz que o comprimento do parafuso (em milímetros) está:

- no intervalo $[150 - 2 \cdot 1, 150 + 2 \cdot 1] = [148, 152]$ com probabilidade maior ou igual a $1 - 1/2^2 = 75\%$;
- no intervalo $[150 - 3 \cdot 1, 150 + 3 \cdot 1] = [147, 153]$ com probabilidade maior ou igual a $1 - 1/3^2 \approx 88\%$;
- no intervalo $[150 - 4 \cdot 1, 150 + 4 \cdot 1] = [146, 154]$ com probabilidade maior ou igual a $1 - 1/4^2 \approx 93\%$;

e assim por diante.

Observe que o resultado de Tchebychev vale qualquer que seja a distribuição de probabilidade da variável $X$.

**Exercício 12.14:** Seja $X$ uma variável aleatória que pode assumir qualquer valor entre 0 e 100, com igual probabilidade. Calcule o valor esperado, a variância e o desvio padrão de $X$. Calcule a probabilidade de $X$ estar entre 40 e 60 (inclusive ambos). Compare esse resultado com a probabilidade obtida pelo teorema de Tchebychev.

### 12.6.3 Covariância

Se $X$ e $Y$ são variáveis aleatórias numéricas, a *covariância* entre as duas é definda pela fórmula

$$C(X, Y) = \sum_{u,v} \Pr((X = u) \wedge (Y = v))(u - \mathcal{E}(X))(v - \mathcal{E}(Y))$$

A covariância é uma medida da dependência entre $X$ e $Y$. A grosso modo, ela tende a ser positiva quando é muito provável que os valores de $X$ e $Y$ sejam ambos maiores ou ambos menores que suas médias (caso em que o produto $(u - \mathcal{E}(X))(v - \mathcal{E}(Y))$ é positivo). Ela tende a ser negativa quando $X$ e $Y$ tendem a variar em direções opostas em relação a suas médias — quando um está acima da média, o outro provavelmente está abaixo. Observe que $\mathcal{V}(X)$ é a mesma coisa que $C(X, X)$.

É fácil provar que, se $X$ e $Y$ são independentes, então sua covariância é zero. Prova-se também que, para quaiquer variáveis aleatórias numéricas $X$ e $Y$,

$$\mathcal{V}(X + Y) = \mathcal{V}(X) + \mathcal{V}(Y) + 2\,C(X, Y)$$

Note que esta fórmula implica na fórmula (12.17) quando $X$ e $Y$ são independentes.

**Exercício 12.15:** Encontre duas variáveis aleatórias $X$ e $Y$ que possuem covariância nula mas *não* são independentes.

### 12.6.4 Coeficiente de correlação

O sinal de $C(X, Y)$ revela o sentido geral da dependência entre $X$ e $Y$, mas seu valor numérico é difícil de interpretar. Por essa razão é interessante definir o *coeficiente de correlação*

$$\kappa(X, Y) = \frac{C(X, Y)}{\sqrt{\mathcal{V}(X)\,\mathcal{V}(Y)}} = \frac{C(X, Y)}{\mathcal{D}(X)\,\mathcal{D}(Y)}$$

Prova-se que este número está sempre entre $-1$ e $+1$. Ele é zero se $X$ e $Y$ são independentes, $+1$ se cada variável é função linear crescente da outra (isto é, se $Y = \alpha X + \beta$ com $\alpha > 0$) e $-1$ se cada variável é função linear descrecente da outra ($Y = \alpha X + \beta$ com $\alpha < 0$). Um valor intermediário, por exemplo $0,50$, significa que o valor de cada variável é parcialmente função da outra, mas inclui um termo que não depende dela. Neste caso diz-se que *há correlação entre $X$ e $Y$* (*positiva* ou *negativa*, conforme o sinal do coeficiente).

## 12.7 Probabilidade condicional

Seja $X$ a variável aleatória cujo valor é o resultado do lançamento de um dado, e considere as duas afirmações "$X$ é par" e "$X$ é ímpar". Se não temos nenhuma outra informação sobre $X$, como vimos, é razoável atribuir a probabilidade $1/6$ a cada um dos possíveis valores $1, 2, \ldots, 6$, e portanto

$$\begin{array}{lcl} \Pr(X \text{ é par}) & = & \Pr(X = 2) + \Pr(X = 4) + \Pr(X = 6) = 1/2 \\ \Pr(X \text{ é ímpar}) & = & \Pr(X = 1) + \Pr(X = 3) + \Pr(X = 5) = 1/2 \end{array}$$

Suponha agora que sabemos que o valor de $X$ não é 3. Que probabilidade devemos atribuir a essas duas afirmações? Não podemos simplesmente eliminar o termo $\Pr(X = 3)$ na segunda fórmula, pois a soma não seria 1. Como a probabilidade do valor ser 3 é zero, temos que corrigor a probabilidade dos demais valores para que elas tenham soma 1. Ou seja, temos que supor $\Pr(X = 3) = 0$ e $\Pr(X = v) = 1/5$ para os demais valores. Então teremos

$$\begin{array}{lcl} \Pr(X \text{ é par}) & = & \Pr(X = 2) + \Pr(X = 4) + \Pr(X = 6) = 3/5 \\ \Pr(X \text{ é ímpar}) & = & \Pr(X = 1) + \Pr(X = 5) = 2/5 \end{array}$$

Observe que a informação adicional "$X \neq 3$" afetou não apenas a probabilidade de $X$ ser ímpar, mas também a probabilidade de ele ser par.

Em casos como este, costuma-se usar a notação $\Pr(P|Q)$ para denotar a *probabilidade condicional* da afirmação $P$, *sabendo-se que* (ou *dado que*) a afirmação $Q$ é verdadeira. Verifica-se que essa probabilidade pode ser calculada pela fórmula

$$\Pr(P|Q) = \frac{\Pr(P \wedge Q)}{\Pr(Q)} \tag{12.19}$$

Aplicando esta fórmula ao exemplo acima, a afirmação $P$ seria "$X$ é ímpar" e $Q$ a afirmação "$X \neq 3$". Temos então que

$$\begin{array}{lcll} \Pr(P \wedge Q) & = & \Pr(X = 1) + \Pr(X = 5) & = 2/6 \\ \Pr(Q) & = & \Pr(X = 1) + \Pr(X = 2) + \Pr(X = 4) + \Pr(X = 5) + \Pr(X = 6) & = 5/6 \\ \Pr(P|Q) & = & \dfrac{2/6}{5/6} & = 2/5 \end{array}$$

**Exercício 12.16:** Seja $X$ o valor obtido lançando um dado. Calcule, pela fórmula (12.19)

1. Pr($X$ é par$|X \neq 3$)
2. Pr($X$ é par$|X$ é quadrado perfeito)
3. Pr($X$ é primo$|X$ é maior que 2)

**Exercício 12.17:** Seja $X$ a soma dos valores obtidos no lançamento de dois dados. Calcule, pela fórmula (12.19)

1. Pr($X$ é par|os dois dados deram o mesmo resultado)
2. Pr($X$ é par|os dois dados deram resultados diferentes)
3. Pr($X = 6$|os dois valores não são primos entre si)

A fórmula da probabilidade condicional é também muito usada na forma inversa:

$$\Pr(P \wedge Q) = \Pr(P|Q)\Pr(Q) \tag{12.20}$$

Ou seja, uma vez definida a probabilidade de $P$ dado $Q$, e também a probabilidade de $Q$, a probabilidade da afirmação "$P$ e $Q$" é simplesmente o produto das duas.

**Exercício 12.18:** Suponha que a probabilidade de algum hacker tentar violar seu computador no próximo minuto é 10%, e que a probabilidade de tal tentativa ter sucesso é 80%. Qual é a probabilidade de seu computador ser violado por algum hacker no próximo minuto? (Ignore a possibilidade de haver mais de um ataque por minuto.)

**Exercício 12.19:** Suponha que atiramos dois dados, um verde e um vermelho. Qual a probabilidade de que o dado verde mostre o valor 2, e o dado vermelho mostre o valor 3? E qual é a probabilidade de que um deles mostre o valor 2, e o outro 3? Agora suponha que os dois dados são idênticos, a tal ponto que não podemos dizer qual é um e qual é o outro. Qual é a probabilidade de que um deles mostre 2, e o outro 3?

## 12.8 Inferência bayesiana

Combinando as fórmulas (12.19) e (12.20), obtemos a equação

$$\Pr(P|Q) = \frac{\Pr(Q|P)\ \Pr(P)}{\Pr(Q)} \tag{12.21}$$

Esta fórmula é conhecida como *regra de Bayes* ou *teorema de Bayes*, desenvolvida pelo matemático inglês Thomas Bayes (≈1702–1761) e, independentemente, pelo matemático francês Pierre-Simon Laplace (1749–1827). Ela é geralmente usada quando se quer obter a probabilidade Pr($P|Q$) de uma possível causa $P$, sabendo-se que uma consequência $Q$ ocorreu, a partir da probabilidade condicional inversa Pr($Q|P$) (de que essa consequência produza essa causa). Este raciocínio probabilístico é conhecido como *inferência bayesiana* ou *dedução bayesiana*.

Por exemplo, considere uma coleção de caixas quadradas e redondas, cada uma contendo uma bola que pode ser azul ou branca. Suponha que há igual número de caixas de cada formato, sendo

que há bolas azuis em metade das caixas quadradas, mas em apenas 10% das caixas redondas. Imagine que alguém escolheu uma caixa ao acaso, e encontrou nela uma bola azul. Qual a probabilidade de que ele tenha escolhido uma caixa quadrada? E se a bola for branca?

Se não tivéssemos a informação sobre a bola, seria razoável supor que a caixa era quadrada com probabilidade 1/2. Porém, como bolas brancas são mais comuns nas caixas redondas, intuitivamente, a informação de que a bola era branca aumenta a probabilidade de que a caixa seja redonda.

Para calcular essas probabilidades, vamos denotar por $Q$, $R$, $A$ e $B$ as afirmações "a caixa era quadrada", "a caixa era redonda", "a bola era azul" e "a bola era branca", respectivamente. Pelo enunciado do problema, temos

$$\begin{array}{lcllcl} \Pr(Q) & = & \dfrac{1}{2} & \Pr(R) & = & \dfrac{1}{2} \\ \Pr(A|Q) & = & \dfrac{1}{2} & \Pr(B|Q) & = & \dfrac{1}{2} \\ \Pr(A|R) & = & \dfrac{1}{10} & \Pr(B|R) & = & \dfrac{9}{10} \end{array}$$

O que se pede são as probabilidade condicionais $\Pr(Q|A)$ e $\Pr(Q|B)$. Para aplicar a fórmula (12.19), precisamos determinar $\Pr(B)$ e $\Pr(Q \wedge B)$. Para chegar lá, temos que calcular as probabilidades de todas as combinações válidas dessas afirmações. Aplicando a fórmula (12.20) temos

$$\begin{array}{rcrcrcrcl} \Pr(Q \wedge A) & = & \Pr(A \wedge Q) & = & \Pr(A|Q)\Pr(Q) & = & \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} & = & \frac{1}{4} \\ \Pr(Q \wedge B) & = & \Pr(B \wedge Q) & = & \Pr(B|Q)\Pr(Q) & = & \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} & = & \frac{1}{4} \\ \Pr(R \wedge A) & = & \Pr(A \wedge R) & = & \Pr(A|R)\Pr(R) & = & \frac{9}{10} \cdot \frac{1}{2} & = & \frac{9}{20} \\ \Pr(R \wedge B) & = & \Pr(B \wedge R) & = & \Pr(B|R)\Pr(R) & = & \frac{1}{10} \cdot \frac{1}{2} & = & \frac{1}{20} \end{array}$$

Daí tiramos

$$\begin{array}{rcrcl} \Pr(A) & = & \Pr(B \wedge Q) + \Pr(B \wedge R) & = & \frac{1}{4} + \frac{1}{20} = \frac{3}{10} \\ \Pr(B) & = & \Pr(A \wedge Q) + \Pr(A \wedge R) & = & \frac{1}{4} + \frac{9}{20} = \frac{7}{10} \end{array}$$

portanto

$$\begin{array}{rcrcrcrcrcl} \Pr(Q|A) & = & \frac{\Pr(Q \wedge A)}{\Pr(A)} & = & \frac{\Pr(A|Q)\Pr(Q)}{\Pr(A)} & = & \frac{1/4}{3/10} & = & \frac{5}{6} & \approx & 0,833 \\ \Pr(Q|B) & = & \frac{\Pr(Q \wedge B)}{\Pr(B)} & = & \frac{\Pr(B|Q)\Pr(Q)}{\Pr(B)} & = & \frac{1/4}{7/10} & = & \frac{5}{14} & \approx & 0,357 \end{array}$$

Observe que a informação adicional "a bola sorteada é azul" aumenta a probabilidade de que a caixa escolhda seja quadrada, de $0,5$ a $0,833$

Generalizando este exemplo, suponha que temos $m$ afirmações,,exaustivas e mutuamente exclusivas, $A_1, A_2, \ldots A_m$, chamadas *antecedentes*, cujos valores lógicos podem influir na probabilidade de outras $n$ afirmações $B_1, B_2, \ldots B_n$, chamadas *consequentes*, também exaustivas e mutuamente exclusivas. As afirmações $A_i$ podem ser as alternativas possíveis para um evento-causa (no exemplo acima, a escolha da caixa, quadrada ou redonda), e as afirmações $B_j$ a possíveis consequências do mesmo (a cor da bola). Suponha que atribuímos probabilidades $\Pr(A_i)$ para cada antecedente $A_i$, sem levar em conta as afirmações $B_j$; e temos também a probabilidade condicional $\Pr(B_j|A_i)$ de cada consequente, dado o antecedente. Uma vez sabido que um determinado $B_j$ é verdadeiro, a probabilidade de cada $A_i$ passa a ser

$$\Pr(A_i|B_j) = \frac{\Pr(A_i \wedge B_j)}{\Pr(B_j)} = \frac{\Pr(A_i \wedge B_j)}{\sum_{k=1}^{m} \Pr(B_j \wedge A_k)} = \frac{\Pr(B_j|A_i)\Pr(A_i)}{\sum_{k=1}^{m} \Pr(B_j|A_k)\Pr(A_k)} \tag{12.22}$$

Note que para aplicar a fórmula (12.22) precisamos atribuir uma probabilidade $\Pr(A_i)$ a cada antecedente, independente de qual consequente é verdadeiro. O fator $\Pr(A_i)$ nesta fórmula é chamado de *probabilidade a priori* do antecedente $A_i$, enquanto que o resultado $\Pr(A_i|B_j)$ é sua *probabilidade a posteriori*.

A influência das probabilidades *a priori* $\Pr(A_i)$ é uma característica essencial da inferência bayesiana. Elas podem ser vistas como "preconceitos" que temos a respeito das afirmações $A_i$, antes de olharmos para as evidências $B_j$. A fórmula, portanto, explicita quantitativamente a constatação comum, de que nossos preconceitos sempre afetam nossa interpretação dos fatos.

**Exercício 12.20:** Suponha que há duas gavetas em uma mesa de jogo. Uma delas contém um dado "honesto", que dá cada valor de 1 a 6 com igual probabilidade 1/6; a outra contém um dado "viciado", que dá o valor 6 com probabilidade 1/2, e os valores de 1 a 5 com probabilidade 1/10 cada.

1. Uma pessoa escolhe (sem você ver) um desses dois dados. Na falta de informações, você atribui a probabilidade *a priori* 1/2 de que esse dado seja viciado. O dado é então lançado e o resultado é 6. Como fica a probabilidade de que o dado seja viciado?
2. Suponha agora que a pessoa seja um notório vigarista, de modo que, mesmo antes de lançar, você dá 90% de chance de que ele tenha escolhido o dado viciado. Como fica essa probabilidade depois que o dado foi lançado, com resultado 6?
3. Finalmente suponha que você confia na pessoa e portanto acredita que ela escolheu o dado honesto, com 90% de probabilidade. Como fica sua confiança nessa hipótese depois que o dado deu 6?

**Exercício 12.21:** Uma moeda é lançada 10 vezes seguidas, e o resultado é sempre cara. Talvez a moeda seja normal, e esse resultado seja coincidência; ou talvez ela seja uma moeda anormal, com cara dos dois lados. Suponha que a probabilidade *a priori* da moeda ser anormal é $p$. Qual é a probabilidade *a posteriori*, depois desses 10 lances? Faça um gráfico dessa probabilidade em função de $p$.

.

## 12.9 Teoria da informação

Hoje em dia todos conhecem o conceito de *bit* e outras unidades derivadas, como *byte* (8 bits), *megabyte* ($10^6$ ou $2^{20}$ bytes, conforme o contexto), *gigabyte* ($10^9$ ou $2^{30}$ bytes) etc. Em geral esses conceitos são usados para descrever tamanhos de arquivos, capacidade de memória, taxas de transmissão, etc. Porém é necessário distinguir entre a *capacidade de armazenamento de informação* de tais sistemas, e a *quantidade de informação* contida neles em determinado momento. Este segundo conceito é o centro da *teoria da informação*, desenvolvida principalmente pelo matemático e engenheiro americano Claude Shannon (1916–2001), em meados do século 20.

### 12.9.1 Capacidade de informação

Considere um sistema físico (real ou imaginário) que em qualquer momento pode assumir um único estado dentre uma coleção finita de estados possíveis; sendo que esse estado pode ser identificado com precisão por algum tipo de teste ou medida. Por exemplo, uma moeda sobre uma mesa,

que pode estar na posição 'cara' ou 'coroa'; um dado de jogar, que pode estar virado com qualquer face, entre 1 e 6, para cima; uma chave elétrica, que pode estar 'desligada' ou 'ligada'; um fio elétrico, que pode estar a zero volts ou a +5 volts; uma barra de ferro, que pode estar magnetizada em dois sentidos diferentes; e assim por diante. Tal objeto é dito um *sistema discreto*.

Suponha que o sistema tem apenas dois estados possíveis (ou seja, é um *sistema binário*). Por definição, a capacidade de informação de tal sistema é 1 bit. Se o sistema tem $2^b$ estados possíveis, sua capacidade é $b$ bits. Observe que podemos numerar os estados de tal sistema em base 2 usando $b$ algarismos, cada qual 0 ou 1: — $0\cdots00 = 0$, $0\cdots01 = 1$, $0\cdots10 = 2$, $0\cdots11 = 3$, ..., $1\cdots11 = 2^b - 1$. Daí o nome "bit", que é abreviação do inglês *binary digit*.

Mais geralmente, se o número de estados possíveis $n$, a capacidade de informação é definida como $\log_2 n = (\ln n)/(\ln 2)$, o logaritmo de $n$ na base 2. Assim, por exemplo, a capacidade de informação de um dado de jogar, em repouso sobre a mesa, é $\log_2 6 = 2,5849625007\ldots$ bits. Note que, se $n$ não é uma potência de 2, a capacidade em bits não é um número inteiro (e, na verdade, é um número irracional). Note também que se o sistema tem apenas um estado possível, sua capacidade de armazenar informação é (como se pode esperar) zero bits.

Esta definição implica na seguinte propriedade:

**Teorema 12.2:** Se um sistema $S$ consiste de dois sub-sistemas discretos $A$ e $B$ independentes (no sentido de que cada estado possível de $A$ pode co-existir com qualquer estado possível de $B$, e vice-versa), então a capacidade de $S$ é a soma das capacidades de $A$ e de $B$.

**Exercício 12.22:** Determine a capacidade de informação dos seguintes sistemas:

1. Um odômetro (mostrador de quilometragem) de automóvel com 6 algarismos decimais.
2. Um dado em forma de octaedro, com faces numeradas de 1 a 8, em respouso sobre a mesa.
3. Uma cadeia de DNA com 100 elementos (*nucleotídeos*), cada qual podendo ter quatro estruturas químicas possíveis — adenosina (A), timina (T), guanina (G), ou citosina (C).

**Exercício 12.23:** Determine a capacidade de informação dos seguintes sistemas, constituídos de 4 moedas, cada qual podendo ser de 5, 10, 25, ou 50 centavos, que somente podem ser distinguidas pelo seu valor:

1. Uma pilha, em qualquer ordem.
2. Uma pilha, em ordem crescente de valor.
3. Uma coleção em um saco.
4. Uma pilha onde todas as moedas tem o mesmo valor.

**Exercício 12.24:** Refaça o exercício 12.23, supondo que todas as moedas de mesmo valor estão marcadas com letras distintas entre 'A' e 'D'. Assim, por exemplo, na alternativa 1, as moedas poderiam ser, na ordem, $(10, D)$, $(25, C)$, $(10, B)$, $(10, C)$ mas não poderiam ser $(10, D)$, $(25, C)$, $(10, B)$, $(10, D)$.

**Exercício 12.25:** Qual é a capacidade de informação de uma carta retirada de um baralho com 13 cartas? E de um baralho com 52 cartas? Se acrescentarmos um coringa ao baralho, de quanto aumenta a capacidade, em cada caso?

### 12.9.2 Quantidade de informação

A capacidade de informação de um sistema discreto diz apenas o limite máximo de informação que pode ser armazenada nele. Porém, dependendo de como o sistema é usado, nem toda a capacidade pode ser utilizada.

Por exemplo, considere uma lâmpada que, ao meio-dia, pode estar acesa ou apagada conforme o sol tenha nascido ou não naquele dia. Embora a capacidade de informação desse sistema seja 1 bit, intuitivamente a notícia de que essa lâmpada está acesa não traz muita informação. Por outro lado, uma lâmpada que indica se está chovendo ou não fora do prédio parece fornecer mais informação — muito embora sua *capacidade* de informação seja exatamente a mesma.

A diferença entre estes dois exemplos está na probabilidade que atribuímos aos dois estados do sistema. No primeiro caso, é natural atribuir probabilidade bem próxima a 1 à afirmação "a lâmpada está acesa" ( menos que sejamos extremamente pessimistas!). Por isso, a notícia de que essa informação é verdadeira não muda muito nosso estado de conhecimento. Já, no segundo exemplo, faz sentido atribuir probabilidade bem menor que 1 a essa afirmação ( menos que estejamos na Bolívia, onde nunca chove!).

Para tornar esta intuição mais precisa, suponha que $X$ é uma variável aleatória que pode assumir um certo valor $v$. A *quantidade de informação* trazida pela notícia "o valor de $X$ é $v$" é, por definição,

$$Q(X = v) = \log_2 \frac{1}{\Pr(X = v)} = -\log_2 \Pr(X = v)$$

Este valor, como a capacidade de informação, é medido em bits, e nunca é negativo. Em particular, se $X$ pode assumir $n$ valores distintos com igual probabilidade $\Pr(X = v) = 1/n$, a quantidade de informação que recebemos quando ficamos sabendo o valor de $X$ (qualquer valor de $X$) é exatamente $Q(X = v) = \log_2 n$ bits — ou seja, a capacidade da variável $X$.

Porém, se as probabilidades dos valores de $X$ não são iguais, a quantidade de informação pode ser menor ou maior, dependendo do valor. Por exemplo:

**Exemplo 12.3:** Suponha que um dado está para ser lançado, e $X$ é uma variável que vale 100 se o resultado do dado é 1, e 200 caso contrário. Então as notícias "$X = 100$" e "$X = 200$" carregam as seguintes quantidades de informação:

$$\begin{aligned} Q(X = 100) &= -\log_2 \Pr(X = 100) = -log_2 \frac{1}{6} \approx 2,5849625\ldots \\ Q(X = 200) &= -\log_2 \Pr(X = 200) = -log_2 \frac{5}{6} \approx 0,2630344\ldots \end{aligned}$$

Neste exemplo, observe que a notícia "$X = 200$" traz muito menos informação do que a notícia "$X = 100$", porque tem probabilidade maior — $5/6$ em vez de $1/6$.

### 12.9.3 Quantidade esperada de informação

No exemplo 12.3, observe também que a notícia "$X = 100$" traz mais que 1 bit de informação — muito embora a variável $X$ tenha apenas dois valores possíveis, e portanto tenha apenas 1 bit de capacidade.

Este paradoxo é resolvido se considerarmos a *quantidade esperada de informação*, ou *entropia*, da variável $X$. Ou seja, a quantia

$$\mathcal{H}(X) = \sum_v \Pr(X = v)\, \mathcal{Q}(X = v) = \sum_v -\Pr(X = v) \log_2 \Pr(X = v) \tag{12.23}$$

Nesta fórmula, o índice $v$ do somatório assume todos os valores possíveis da variável $X$. Observe que, como na fórmula (12.12), cada termo desta soma é a quantidade de informação trazida pela notícia "$X = v$", vezes a probabilidade de recebermos essa notícia. Pode-se verificar que $\mathcal{H}(X)$, assim como cada termo $\mathcal{Q}(X = v)$, é um valor real não negativo.

No exemplo 12.3, a quantidade esperada de informação que recebemos ao conhecer o valor de $X$ é

$$\begin{aligned}
\mathcal{H}(X) &= \Pr(X = 100)\, \mathcal{Q}(X = 100) + \Pr(X = 200)\, \mathcal{Q}(X = 200) \\
&= \tfrac{1}{6} \log_2 \tfrac{6}{1} + \tfrac{5}{6} \log_2 \tfrac{6}{5} \\
&\approx \tfrac{1}{6} 2,5849625\ldots + \tfrac{5}{6} 0,2630344\ldots \\
&\approx 0,65002241\ldots
\end{aligned}$$

Observe que, embora a notícia "$X = 100$" forneça mais de 2,5 bits de informação, ela é muito menos provável que a notícia "$X = 200$", que fornece menos que 0,27 bits de informação. Assim, a quantidade esperada de informação que ganhamos ao saber o valor de $X$ é cerca de 0,65 bits, ou seja abaixo da capacidade de $X$ (1 bit). Esta última observação é um resultado importante:

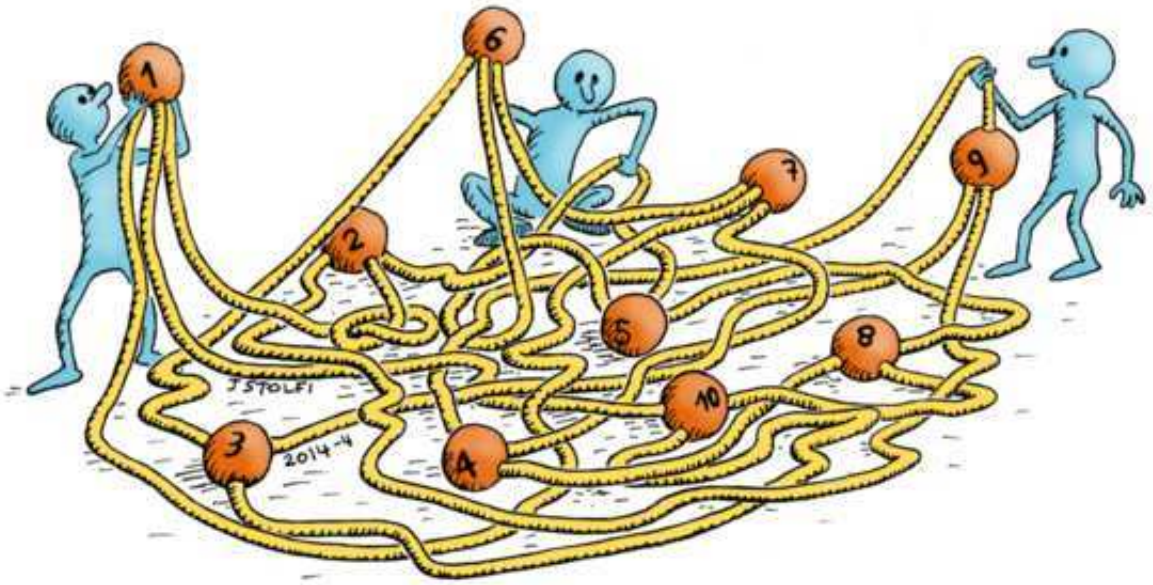
> **Teorema 12.3:** Se uma variável aleatória $X$ pode assumir $n$ valores distintos, então a quantidade esperada de informação que ganhamos conhecendo o valor de $X$ é no máximo a capacidade de $X$, $\log_2 n$; e é exatamente $\log_2 n$ apenas quando todos esses valores podem ocorrer com igual probabilidade $1/n$.

Devido a este teorema, a fórmula (12.23) é muito usada para medir a "uniformidade" da distribuição de probabilidades de uma variável aleatória $X$. O valor de $\mathcal{H}(X)$ varia entre 0 e $\log_2 n$, onde $n$ é o número de valores possíveis de $X$. Quanto maior $\mathcal{H}(X)$, mais uniforme a distribuição. Na verdade, a fórmula (12.23) pode ser usada com qualquer lista de $n$ valores reais $p_0, p_1, \ldots p_{n-1}$ não negativos cuja soma é 1.

Observe que se $X$ tem uma distribuição degenerada — com $\Pr(X = v) = 1$ para um único valor $v$, e zero para os demais valores — então $\mathcal{H}(X)$ é zero. Ou seja, se temos certeza de qual vai ser o valor de $X$, nossa expectativa é que a revelação desse valor não vai nos trazer nenhuma informação.

# Capítulo 13

# Introdução à Teoria de Grafos




## 13.1 Introdução

Informalmente, um grafo é um modelo matemático para representar uma coleção de objetos (chamados *vértices*) que são ligados aos pares por outra coleção de objetos (chamados *arcos* ou *arestas*). Em ilustrações de grafos, os vértices são geralmente representados por pontos, círculos ou caixas, e as arestas por linhas ligando os vértices. veja a figura 13.1. Em tais diagramas entende-se que as posições dos vértices e a forma das linhas são irrelevantes; o grafo representa apenas a *topologia* dos vértices e arestas, isto é, quem está ligado a quem.

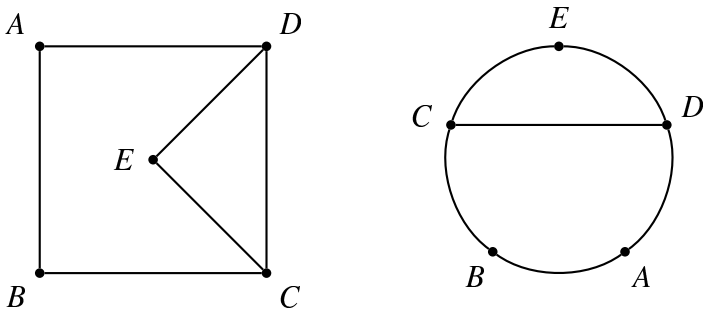



Figura 13.1: Um grafo, desenhado de duas maneiras diferentes.

Grafos são extremamente úteis para modelar problemas em muitas áreas de aplicação. Por exemplo, a malha rodoviária de um estado pode ser representada por um grafo em que as cidades são os vértices, e cada trecho de estrada entre cidades consecutivas é uma aresta. Um circuito elétrico pode ser visto como um grafo onde os vértices são condutores metálicos e as arestas são resistores, capacitores, e outros componentes. Uma molécula pode ser abstraída por um grafo onde os átomos são os vértices e as arestas são as ligações covalentes. Uma treliça metálica pode ser entendida como um grafo onde as arestas são as barras e os vértices são as juntas.

Grafos são especialmente importantes em computação, para modelar conceitos tanto de hardware (desde circuitos digitais até a internet mundial) quanto de software (como registros em bancos de dados, blocos e módulos de programas, protocolos de transmissão de dados e muito mais).

O conceito abstrato de grafo e o estudo matemático de suas propriedades foi uma das muitas contribuições do matemático suíço Leonhard Euler (1707–1783). Um quebra-cabeças famoso na época era encontrar um passeio que visitasse todas as pontes da cidade de Königsberg (veja a figura 13.2), passando uma única vez em cada ponte. Euler resumiu as propriedades essenciais do mapa por um diagrama de pontos ligados por linhas. Apenas analisando esse diagrama abstrato, ele provou que o tal passeio era impossível. Este trabalho (publicado em 1736) é considerado o primeiro artigo da teoria de grafos.

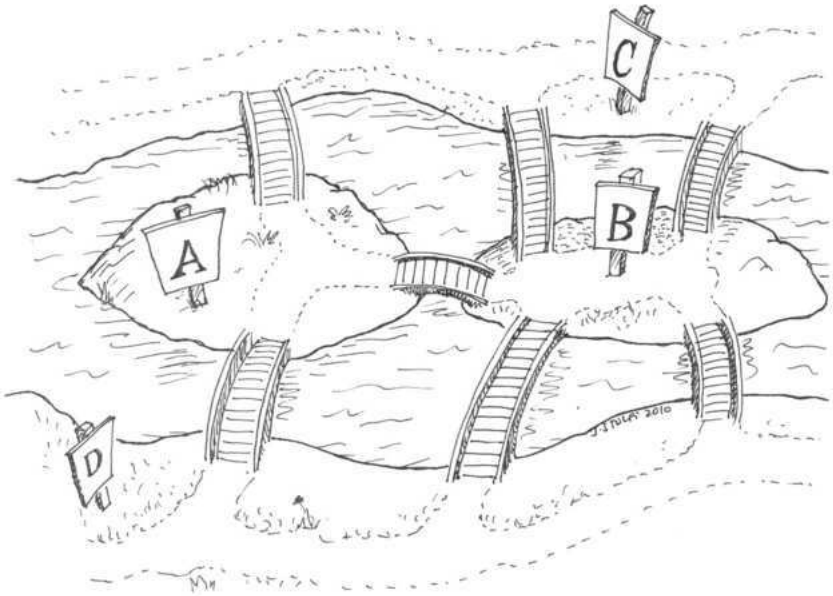



Figura 13.2: O problema das pontes de Königsberg.

A teoria matemática dos grafos foi desenvolvida gradualmente no século 19, quando surgiram importantes aplicações em química e engenharia. Sua importância cresceu muito no século 20, com o surgimento das redes de telefonia, dos circuitos digitais e, por fim, dos computadores.

**Exercício 13.1:** Desenhe o grafo cujos vértices são todos os números inteiros de 2 a 30, sendo que dois vértices estão ligados se, e somente se, um dos números é divisor do outro.

**Exercício 13.2:** Escolha uma frase qualquer e desenhe o grafo onde cada vértice representa uma palavra dessa frase, e dois vértices estão ligados entre si se, e somente se, as duas palavras correspondentes possuem pelo menos uma letra em comum. Assim, por exemplo, `gato` e `cavalo` devem ser ligados porque tem as letras `a` e `o` em comum; enquanto que `gato` e `peixe` não devem ser ligados.

## 13.2 Definição formal

Há muitas maneiras de definir o conceito de grafo. Qual delas é melhor depende da aplicação. De modo geral, neste capítulo adotaremos as seguintes definições de grafo.

Um *grafo* $G$ é uma tripla da forma $(\mathcal{V}G, \mathcal{E}G, \mathcal{F}G)$ onde $\mathcal{V}G$ e $\mathcal{E}G$ são conjuntos quaisquer, chamados de *vértices* e *arestas*; e $\mathcal{F}G$ é uma função, chamada *função de incidência*, que a cada elemento $e$ de $\mathcal{E}G$ associa um par $\mathcal{F}G(e)$ de vértices, que são chamados de *extremos* de $e$.

Esta definição geral tem duas versões, dependendo da natureza dos pares $\mathcal{F}G(e)$. Em algumas aplicações, cada aresta tem também uma *orientação* (ou *direção*) específica, como a mão única de certas vias urbanas. Nesse caso, define-se o par $\mathcal{F}G(e)$ como sendo um par ordenado $(u, v)$ de vértices, isto é, um elemento de $\mathcal{V}G \times \mathcal{V}G$. O vértice $u$ é considerado a *origem* da aresta $e$, e $v$ seu *destino*. Grafos que satisfazem esta definição são ditos *grafos orientados* (ou *dirigidos*). Nas ilustrações de grafos dirigidos, o sentido de cada aresta é geralmente indicado por uma seta da origem para o destino.

Quando a direção das arestas não é importante, pode-se definir o par $\mathcal{F}G(e)$ como um *par não ordenado*, isto é, um conjunto da forma $\{u, v\}$ onde $u$ e $v$ são elementos de $\mathcal{V}G$. Como $\{u, v\}$ e $\{v, u\}$ são o mesmo conjunto, neste modelo as arestas não tem direção definida, e não é possível dizer qual dos extremos de uma aresta é a origem e qual é o destino. Grafos definidos desta forma são ditos *não orientados* (ou *não dirigidos*). Nas ilustrações de grafos não dirigidos, as arestas são representadas por linhas sem setas. Veja a figura 13.3.

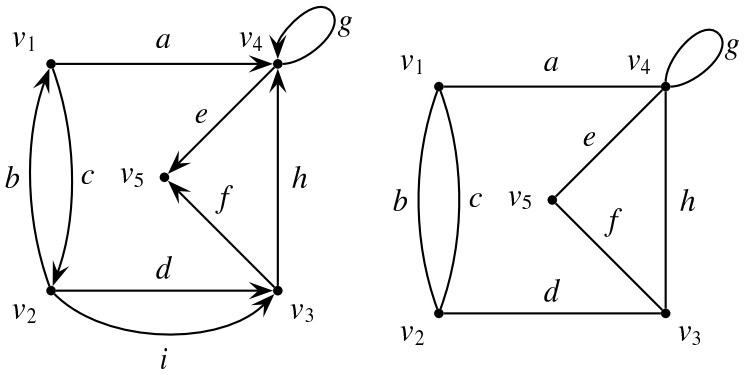



Figura 13.3: Um grafo orientado (esq.) e um grafo não orientado (dir.).

Quando não for especificado o contrário, deve-se entender que os grafos não são orientados.

### 13.2.1 Grafo nulo e sem arestas

Se $\mathcal{V}\,G$ é vazio, dizemos que $G$ é um *grafo nulo*. Nesse caso o conjunto de arestas $\mathcal{E}\,G$ é obrigatoriamente vazio, e a função de incidência também. Portanto, o grafo nulo é único. Muitos autores não permitem, na definição de grafo, que o conjunto de vértices $\mathcal{V}\,G$ seja vazio, e portanto não admitem o conceito de grafo nulo.

Por outro lado, se o conjunto de vértices $\mathcal{V}\,G$ não é vazio, o conjunto de arestas $\mathcal{E}\,G$ pode ser vazio ou não.

### 13.2.2 Arestas paralelas e laços

Pelas definições acima, pode haver um número arbitrário de arestas com os mesmos extremos. Ou seja podemos ter $e', e'' \in \mathcal{E}\,G$ com $e' \neq e''$ mas $\mathcal{F}\,G(e') = \mathcal{F}\,G(e'')$. Este modelo também permite laços, ou seja arestas $e$ tais que $\mathcal{F}\,G(e) = (u, u)$ (no caso orientado) ou $\mathcal{F}\,G(e) = \{u, u\} = \{u\}$ para algum $u \in \mathcal{V}\,G$.

Usaremos o termo *grafo simples* para significar um grafo sem laços e sem arestas paralelas. (Para alguns autores, aliás, *grafo* significa "grafo simples" exclusivamente, e usam o termo *multigrafo* quando há arestas paralelas.) Veja a figura 13.4.

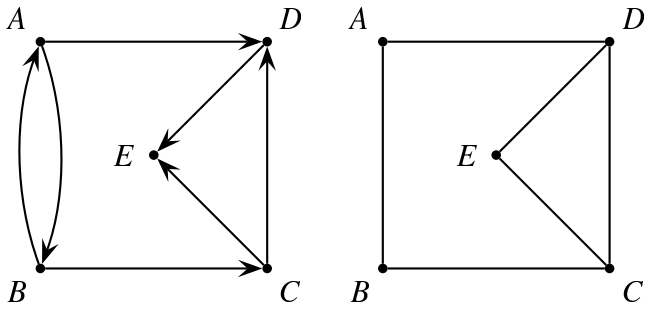



Figura 13.4: Exemplos de grafos simples, dirigido (esq.) e não dirigido (dir.).

Note que um grafo sem arestas paralelas (em particular, um grafo simples) pode ser modelado como um par $G = (\mathcal{V}\,G, \mathcal{E}\,G)$, onde $\mathcal{V}\,G$ é um conjunto qualquer, e $\mathcal{E}\,G$ é um conjunto de pares de vértices. A função de incidência pode então ser dispensada, pois seria a identidade sobre $\mathcal{E}\,G$. No caso orientado, $\mathcal{E}\,G$ seria uma relação sobre $\mathcal{V}\,G$, isto é, um subconjunto de $\mathcal{V}\,G \times \mathcal{V}\,G$. No caso não orientado, $\mathcal{E}\,G$ seria um subconjunto do conjunto $\{\,\{u, v\} : u, v \in \mathcal{V}\,G\,\}$.

### 13.2.3 Grafos finitos e infinitos

Um grafo pode ter infinitos vértices e/ou infinitas arestas. Tais grafos infinitos tem aplicações na matemática, mas os que ocorrem em computação geralmente são finitos em ambos os aspectos. No restante deste capítulo vamos considerar apenas grafos finitos.

**Exercício 13.3:** Qual definição de grafo é mais apropriada para o problema das pontes de Königsberg: grafo orientado ou não orientado, simples ou não?

**Exercício 13.4:** Seja $V$ o conjunto dos inteiros entre 2 e 30, inclusive. Qual definição de grafo (orientado ou não, simples ou não, com ou sem laços, etc.) melhor captura cada uma das seguintes informações entre cada par de números de $V$:

1. Um dos números é maior que o outro.
2. Um dos números é o dobro do outro, menos 2.
3. Um dos números é divisor do outro.
4. Um dos números é divisor próprio do outro.
5. Os dois números possuem um fator primo comum $p$.
6. Os dois números são relativamente primos entre si.

## 13.3 Conceitos fundamentais

Há vários conceitos fundamentais que são válidos e importantes para toda a teoria de grafos, qualquer que seja a definição adotada.

### 13.3.1 Incidência

Se um vértice $v$ de um grafo $G$ é um dos extremos de alguma aresta $e$ de $G$, dizemos que $e$ *incide* em $v$, e vice-versa. Esta propriedade pode ser vista como uma relação entre o conjunto de arestas e o conjunto de vértices, a *relação de incidência* do grafo. (Não confundir com a *função* de incidência, definida na seção 13.2, que leva cada aresta ao par dos seus extremos.)

Se o grafo é orientado, podemos dizer, mais especificamente, que uma aresta $e$ com extremos $(u, v)$ *sai* (ou *parte*) do vértice $u$ e *entra* (ou *chega*) no vértice $v$. Isto define duas relações de $\mathcal{E}G$ para $\mathcal{V}G$, a *relação de saída* e a *relação de chegada*.

### 13.3.2 Adjacência

Dois vértices $u, v$ são ditos *adjacentes* ou *vizinhos* em um grafo $G$ se e somente se existe uma aresta de $G$ cujos extremos são $u$ e $v$. Esta relação (simétrica) entre vértices é a *relação de adjacência* (*não orientada*) do grafo.

Se $G$ é um grafo orientado, pode-se dizer que um vértice $u$ *domina* ou *atinge* outro vértice $v$ se e somente se existe uma aresta de $G$ com origem $u$ e destino $v$. Esta relação é a *relação de adjacência orientada* ou de *dominância* do grafo $G$.

Observe que, se as arestas são definidas como pares ordenados de vértices (veja seção 13.2.2), a relação de adjacência orientada é simplesmente o conjunto $\mathcal{E}G$; e a relação de adjacência não orientada é o fecho simétrico da mesma.

### 13.3.3 Grau do vértice

Em um grafo $G$, definimos o *grau* de um vértice $v$ como o número de arestas de $G$ incidentes a $v$. Nesta definição, cada laço deve ser contado duas vezes. Denotaremos o grau por $d_G(v)$. (Nesta e em outras notações, vamos omitir o subscrito "$_G$" quando o grafo estiver determinado no contexto.)

Se o grafo $G$ é orientado, podemos também definir o *grau de entrada* e o *grau de saída* de um vértice $v$ como o número de arestas que entram em $v$ ou saem de $v$, respectivamente. Denotaremos esses números por $d_G^+(v)$ e $d_G^-(v)$, respectivamente. Note que cada laço é contado uma vez em ambos os graus. Nesse caso, temos que $d_G(v) = d_G^+(v) + d_G^-(v)$.

**Teorema 13.1:** Em qualquer grafo $G = (\mathcal{V}G, \mathcal{E}G, \mathcal{F}G)$, a soma dos graus de todos os vértices é igual ao dobro do número de arestas. Isto é

$$\sum_{v \in \mathcal{V}G} d_G(v) = 2\,|\mathcal{E}G|$$

**Prova:**

Cada aresta (laço ou não) contribui duas unidades na soma dos graus.

**Fim.**

Para grafos orientados, o mesmo argumento permite concluir o seguinte:

**Teorema 13.2:** Em qualquer grafo orientado $G = (\mathcal{E}V, \mathcal{E}G, \mathcal{F}G)$, a soma dos graus de entrada (ou de saída) de todos os vértices é igual ao número de arestas. Isto é

$$\sum_{v \in \mathcal{V}G} d_G^+(v) = \sum_{v \in \mathcal{V}G} d_G^-(v) = |\mathcal{E}G|$$

Uma consequência do teorema 13.1 é

**Corolário 13.3:** Em todo grafo $G = (\mathcal{V}G, \mathcal{E}G, \mathcal{F}G)$, o número de vértices de grau ímpar é par.

**Prova:**

Sejam $P$ o conjunto dos vértices de grau par e $I$ o conjunto dos vértices de grau ímpar. Então

$$\sum_{v \in \mathcal{V}G} d_G(v) = \sum_{v \in P} d_G(v) + \sum_{v \in I} d_G(v) = 2\,|\mathcal{E}G|$$

logo

$$\sum_{v \in I} d_G(v) = 2\,|\mathcal{E}G| - \sum_{v \in P} d_G(v)$$

O lado direito da equação acima é par. Como a soma de parcelas ímpares é par somente se o número de parcelas for par, concluímos que o $|I|$ é par.

**Fim.**

Os símbolos $\Delta_G$ e $\delta_G$ são frequentemente usados para denotar o maior e o menor grau dos vértices, respectivamente, de um grafo $G$.

### 13.3.4 Grafos regulares

Um grafo $G$ é *regular* se todos os seus vértices tem o mesmo grau. Em particular se o grau dos vértices é $r$ então $G$ é chamado *r-regular*— regular de grau $r$. Veja a figura 13.5. Note que um grafo $G$ é $r$-regular se e somente se $\Delta_G = \delta_G = r$. Se o grafo $G$ é orientado os graus de entrada e saída devem ser iguais.

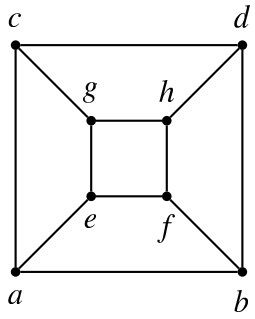



Figura 13.5: O grafo do cubo, um grafo simples 3-regular.

### 13.3.5 Grafos completos

Um grafo $G$ é chamado *completo* se não tem laços e existe exatamente uma aresta entre cada par de vértices. Note que um grafo completo é sempre um grafo simples e $(n-1)$ -regular.

**Exercício 13.5:** Quantas arestas tem um grafo completo com $n$ vértices?

**Exercício 13.6:** Encontre um limite superior para o número de arestas de um grafo simples.

**Exercício 13.7:** Quantas arestas possui um grafo $k$-regular com $n$ vértices?

**Exercício 13.8:** Desenhe todos os grafos não orientados sem arestas paralelas com vértices $\{1,2,3,4,5\}$ que são regulares de grau 2.

**Exercício 13.9:** Desenhe todos os grafos orientados sem arestas paralelas com vértices $\{1,2,3,4\}$ que são regulares de grau 2.

**Exercício 13.10:** Se $G$ possui vértices $v_1, v_2, \ldots, v_n$, a sequência $(dv_1, d_{v_2}, \ldots, d_{v_n})$ é denominada *sequência de graus* de $G$.

1. Existe um grafo com a seguinte sequência de graus: 3,3,3,3,5,6,6,6,6?
2. Existe um grafo com a seguinte sequência de graus: 1,1,3,3,3,3,5,6,8,9?
3. Existe um grafo *simples* com a sequência de graus do item 2?

## 13.4 Percursos em grafos

### 13.4.1 Passeios, trilhas e caminhos

Um *passeio* em um grafo $G$ é uma sequência $P = (v_0, e_1, v_1, \ldots, e_k, v_k)$, onde cada $v_i$ é um vértice de $G$, cada $e_i$ é uma aresta de $G$, e os extremos de $e_i$ são $v_{i-1}$ e $v_i$. O inteiro $k$ é o *comprimento do passeio*, denotado por $|P|$. Quando o grafo é simples podemos definir o passeio apenas pela sequência de seus vértices.

Em particular, um passeio pode ter apenas um vértice e nenhuma aresta, $P = (v_0)$. Tal passeio é dito *trivial*, e seu comprimento é zero.

Dizemos que o passeio $P$ *passa por*, *visita*, ou *atravessa* cada uma das arestas $\{e_1, e_2, \ldots, e_k\}$. Dizemos também que $P$ *visita* os vértices $\{v_0, v_1, \ldots, v_k\}$, *começa* no vértice $v_0$, *termina* no vértice $v_k$ e *passa por* ou *atravessa* cada um dos vértices $v_1, v_2, \ldots, v_{k-1}$. O vértice $v_0$ é o *início* do passeio, $v_k$ é o término, e $\{v_1, v_2, \ldots, v_{k-1}\}$ são os *vértices intermediários* ou *internos* do passeio.

Note que a mesma aresta e/ou o mesmo vértice podem ocorrer mais de uma vez; e que o mesmo vértice pode ser ao mesmo tempo início e/ou término e/ou vértice intermediário do passeio. Portanto um passeio de comprimento $k$ visita no máximo $k + 1$ vértices distintos, e tem no máximo $k - 1$ vértices internos.

Se as arestas $e_1, e_2, \ldots, e_k$ são todas distintas o passeio é chamado de *trilha*. Note que uma trilha pode repetir vértices.

Um *caminho* em um grafo é um passeio que não repete vértices. É facil ver que um caminho não pode visitar mais de uma vez a mesma aresta, portanto todo caminho também é uma trilha.

Note que um caminho de comprimento $k$ visita exatamente $k + 1$ vértices distintos e tem exatamente $k - 1$ vértices internos.

**Exercício 13.11:** Um passeio trivial é uma trilha? É um caminho?

### 13.4.2 Inversão e concatenação e de passeios

Seja $P = (v_0, e_1, v_1, \ldots, e_k, v_k)$ um passeio qualquer em um grafo $G$. O *passeio inverso*, que denotaremos por $P^{-1}$, é a sequência dos mesmos vértices e arestas na ordem contrária, isto é $(v_k, e_k, v_{k-1}, e_{k-1}, \ldots, v_1, e_1, v_0)$.

Sejam $P = (v_0, e_1, v_1, \ldots, e_k, v_k)$ e $Q = (w_0, f_1, w_1, \ldots, f_k, w_k)$ dois passeios em um grafo $G$, tais que o término $v_k$ de $P$ coincide com o início $w_0$ de $Q$. Nesse caso definimos a *concatenação* de $P$ com $Q$ como sendo a sequência $(v_0, e_1, v_1, \ldots, e_k, v_k, f_1, w_1, \ldots, f_k, w_k)$, que denotaremos por $P \cdot Q$. É facil ver que $P \cdot Q$ também é um passeio em $G$. Se o término de $P$ não coincide com o início de $Q$, a concatenação $P \cdot Q$ não é definida.

**Exercício 13.12:** Qual é a relaçao entre $|P|$, $|Q|$, e $|P \cdot Q|$?

**Exercício 13.13:** Se $P \cdot Q$ está definido e é igual a $P$, o que podemos dizer sobre $P$ e $Q$?

**Exercício 13.14:** Se $P \cdot Q^{-1}$ está definido, o que podemos dizer sobre $P$ e $Q$?

**Exercício 13.15:** Seja $G$ um grafo, e sejam $u, v$ dois vértices quaisquer de $G$. Prove que existe um **passeio** de $u$ para $v$ em $G$ se e somente se existe um **caminho** de $u$ para $v$ em $G$.

**Exercício 13.16:** Prove a seguinte afirmação, ou mostre um contra exemplo: Se $P$ e $Q$ são caminhos em um grafo $G$, e o término de $P$ é igual ao início de $Q$, então a concatenação $P \cdot Q$ é um caminho em $G$.

### 13.4.3 Circuitos e ciclos

Dizemos que um passeio $P = (v_0, e_1, v_1, \ldots, e_k, v_k)$ com $k \geq 1$ é *fechado* se $v_0 = v_k$, isto é, se ele começa e termina no mesmo vértice.

Um *circuito* ou *ciclo* em um grafo $G$ é um passeio fechado $(v_0, e_1, v_1, \ldots, e_{k-1}, v_{k-1}, e_k, v_k)$ com $k \geq 1$ que não repete vértices nem arestas exceto $v_0 = v_k$.

Um circuito ou ciclo de comprimento $k$ é chamado um *$k$-ciclo* ou *$k$-circuito*. Um *grafo ciclo* ou *grafo circuito* é um grafo onde existe um circuito que passa por todos os vértices e todas as arestas. Um grafo sem circuitos é chamado grafo *acíclico*.

**Exercício 13.17:** Um passeio trivial é um passeio fechado? É um circuito?

**Exercício 13.18:** Seja $P$ um passeio fechado $(v_0, e_1, v_1, \ldots, e_k, v_k)$ com $k \geq 1$ tal que $(v_0, e_1, v_1, \ldots, e_{k-1}, v_{k-1})$ constitui um caminho. O passeio $P$ é um circuito?

**Exercício 13.19:** Seja $P$ um passeio fechado $(v_0, e_1, v_1, \ldots, e_k, v_k)$ com $k \geq 1$ que não repete vértices exceto $v_0 = v_k$. O passeio $P$ é um circuito?

**Exercício 13.20:** Um grafo ciclo é regular?

**Exercício 13.21:** Prove que um grafo $G$ possui uma trilha fechada se e somente se ele possui um circuito.

**Exercício 13.22:** Seja $G$ um grafo onde todo vértice tem grau maior ou igual a 2. Prove que $G$ tem um circuito.

### 13.4.4 Passeios orientados

A definição de passeio da seção 13.4.1 não leva em conta a orientação das arestas, e portanto é geralmente usada em grafos não orientados. Se o grafo $G$ é orientado, podemos definir *passeio orientado* como sendo um passeio $(v_0, e_1, v_1, \ldots, e_k, v_k)$ que respeita a orientação de cada aresta; isto é, onde cada aresta $e_i$ tem origem $v_{i-1}$ e término $v_i$. Os conceitos de trilha, caminho, e circuito orientado são definidos da mesma forma.

**Exercício 13.23:** Se $P$ é um passeio orientado, o passeio inverso $P^{-1}$ pode ser orientado? E se $P$ for um circuito?

**Exercício 13.24:** Seja $G$ um grafo orientado, e sejam $u, v$ dois vértices quaisquer de $G$. Prove que existe um **passeio** orientado de $u$ para $v$ em $G$ se e somente se existe um **caminho** orientado de $u$ para $v$ em $G$.

## 13.5 Subgrafos

Um grafo $H$ é um *subgrafo* de outro grafo $G$ se $\mathcal{V}H \subseteq \mathcal{V}G$, $\mathcal{E}H \subseteq \mathcal{E}G$, e cada aresta de $\mathcal{E}H$ tem os mesmos extremos em $H$ e em $G$. Se $G$ é orientado, $H$ também precisa ser orientado e as arestas precisam ter também a mesma orientação. Ou seja, $\mathcal{F}H$ é a restrição $\mathcal{F}G$ a $\mathcal{E}H$. Veja a figura 13.6. Dado o grafo $G$, cada subgrafo $H$ é completamente determinado pelos conjuntos $\mathcal{V}H$ e $\mathcal{E}H$. Se $\mathcal{V}H = \mathcal{V}G$ o subgrafo $H$ é chamado *subgrafo gerador* ou *subgrafo espalhado*.

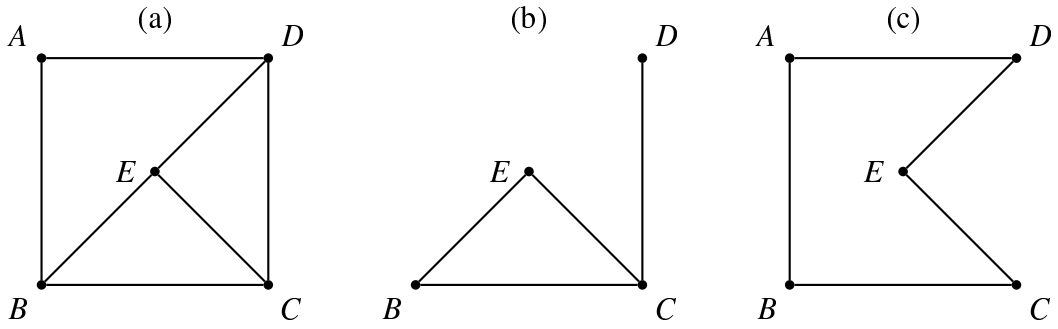



Figura 13.6: (a) Um grafo. (b) Um dos seus subgrafos. (c) Um subgrafo gerador.

Se $X$ é um subconjunto de $\mathcal{V}G$, define-se o *subgrafo de G induzido por X*, denotado por $G[X]$, como sendo o maior subgrafo de $G$ cujo conjunto de vértices é $X$. Isto é, o subgrafo com esses vértices cujas arestas são todas as arestas de $G$ que possuem ambos os extremos em $X$. Veja a figura 13.7.

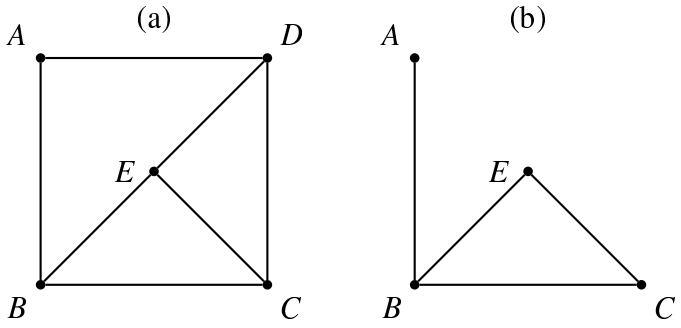



Figura 13.7: (a)Um grafo $G$. (b) O subgrafo induzido $G[X]$ onde $X = \{A, B, C, E\} \subseteq \mathcal{V}G$.

Analogamente, se $Y$ é um subconjunto de $\mathcal{E}G$, o *subgrafo de G induzido por Y*, também denotado por $G[Y]$, é o menor subgrafo de $G$ cujas arestas são $Y$. Isto é, o subgrafo que possui apenas essas arestas e os vértices que são extremos delas. Veja a figura 13.8(a).

Finalmente, se $P = (v_0, e_1, v_1, \ldots, v_n, e_n)$ é um passeio em um grafo $G$, definimos o *subgrafo induzido por P* como sendo o subgrafo $G[P]$ cujos vértices são exatamente $\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ e cujas arestas são exatamente $\{e_1, \ldots, e_n\}$. Veja a figura 13.8(b).

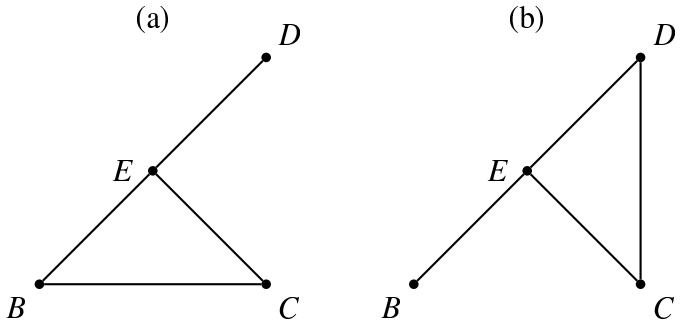



Figura 13.8: (a) O subgrafo induzido $G[Y]$ onde $G$ é o grafo da figura 13.7 e $Y = \{(B,C),(B,E),(C,E),(D,E)\} \subseteq \mathcal{E}G$. (d) O subgrafo induzido $G[P]$ onde $P$ é o passeio $(B,E,D,C,E)$.

### 13.5.1 União e intersecção de subgrafos

As operações booleanas de conjuntos de união e intersecção podem ser estendidas para os subgrafos de um grafo. Por exemplo, se $H$ e $K$ são subgrafos de um mesmo grafo $G$, o *grafo união* $H \cup K$ tem vértices $\mathcal{V}(H \cup K) = \mathcal{V}H \cup \mathcal{V}K$ e arestas $\mathcal{E}(H \cup K) = \mathcal{E}H \cup \mathcal{E}K$; sendo que toda aresta deste grafo tem os mesmos extremos no grafo $H \cup K$ e no grafo $G$. A intersecção $H \cap K$ de dois subgrafos $H$ e $K$ é definida de maneira análoga. Veja a figura 13.9. Estas definiçoes valem para grafos de qualquer tipo, orientados ou não, simples ou não.

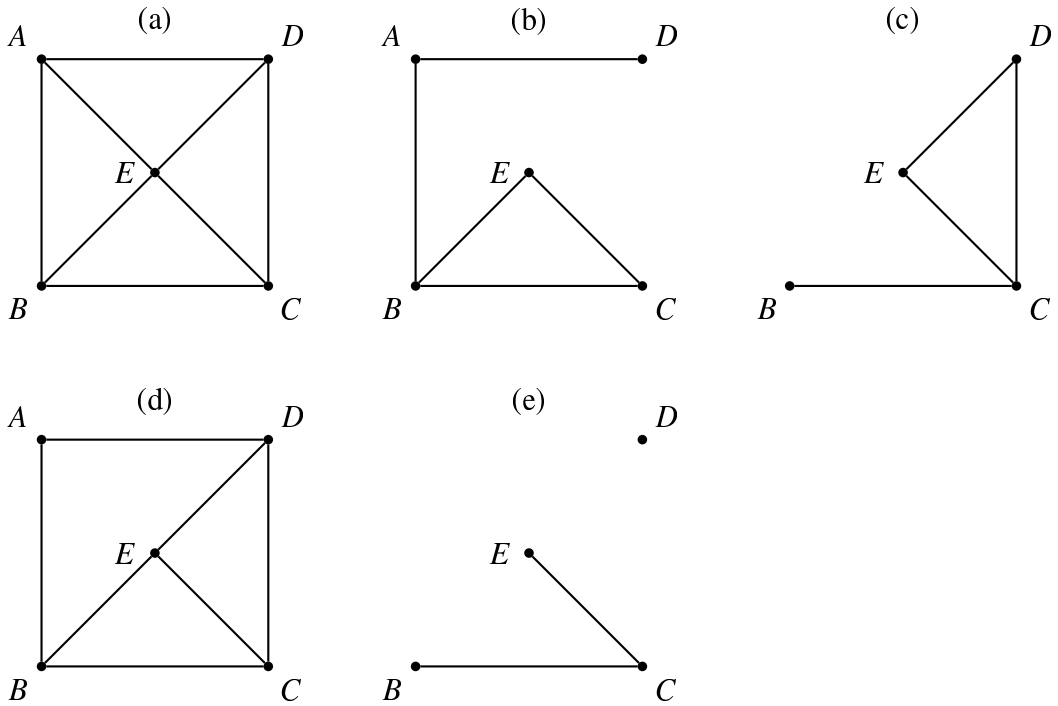



Figura 13.9: (a) Um grafo $G$. (b) Um dos seus subgrafos $H$. (c) Um dos seus subgrafos $K$. (d) O grafo $H \cup K$. (e) O grafo $H \cap K$.

**Exercício 13.25:** Sejam $H$ e $K$ subgrafos de um grafo $G$. Prove que $H \cup K$ e $H \cap K$, como definidos acima, são subgrafos de $G$. Em particular, prove que, no grafo resultante, os extremos de toda aresta pertencem ao conjunto dos vértices.

Por outro lado, a operação de diferença de conjuntos não tem uma adaptação natural para grafos. Porém, se $Y$ é subconjunto $\mathcal{E}G$, denotamos por $G \setminus Y$ o subgrafo de $G$ que tem vértices $\mathcal{V}G$ e arestas $\mathcal{E}G \setminus Y$. Além disso, se $X$ é um subconjunto de $\mathcal{V}G$, denotamos por $G \setminus X$ os subgrafo $G[\mathcal{V}G \setminus X]$. Note que esta operação retira de $G$ todos os vértices em $X$ e todas as arestas que tem alguma ponta em $X$.

**Exercício 13.26:** Seja $Y \subseteq \mathcal{E}G$. Prove que $G \setminus Y \neq G[\mathcal{V}G \setminus Y]$.

### 13.5.2 Grafos complementares

Dois grafos simples não orientados $G$ e $H$ são ditos *complementares* se eles tem o mesmo conjunto de vértices $V$, e para qualquer par de vértices distintos $u, v \in V$, a aresta $\{u, v\}$ está em $G$ se e somente se ela não está em $H$. No caso de grafos simples orientados, vale a mesma definição, com o par ordenado $(u, v)$ em vez de $\{u, v\}$. Veja a figura 13.10. Dito de outra forma, dois grafos simples $G$ e $H$ são complementares se e somente se $\mathcal{V}G = \mathcal{V}H$, $\mathcal{E}H \cap \mathcal{E}G = \emptyset$, e $\mathcal{E}H \cup \mathcal{E}G$ são todos os pares de vértices distintos. O grafo complementar de um grafo simples $G$ é chamado de *complemento* de $G$ e denotado por $\bar{G}$. Observe que $G \cup \bar{G}$ é o grafo simples completo com vértices $\mathcal{V}G$.

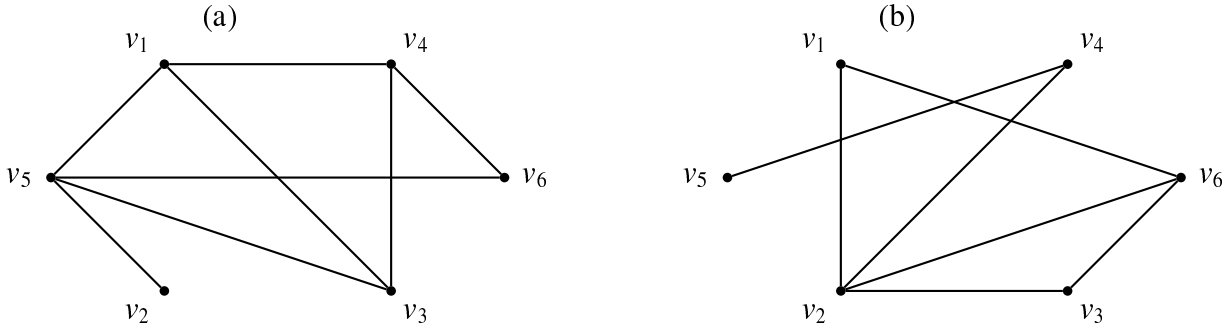



Figura 13.10: (a) Um grafo $G$. (b) O seu complemento $\bar{G}$

**Exercício 13.27:** Formule a seguinte afirmação em termos de grafos, e prove sua validade: "Em qualquer grupo de 6 pessoas, existem três que se conhecem mutuamente, ou três que se desconhecem mutuamente."

## 13.6 Representação matricial de grafos

### 13.6.1 Matriz de adjacência

A *matriz de adjacência* de um grafo finito $G$ é simplesmente a representação matricial da sua relação de adjacência. Ou seja, escolhida uma ordenação total $v_0, v_1, \ldots, v_{n-1}$ dos vértices de $G$, construímos a matriz booleana $M$ de $n$ linhas e $n$ colunas onde $M_{ij}$ é **V** se e somente se $\mathcal{E}G$ inclui

uma aresta com extremos $(v_i, v_j)$ no caso orientado, ou $\{v_i, v_j\}$ no caso não orientado. Observe que, neste segundo caso, a matriz será simétrica ($M_{ij} = M_{ji}$ para quaisquer $i$ e $j$).

Se as arestas de um grafo são definidas como pares de vértices (ordenados ou não), então o grafo $G$ é completamente determinado pela lista ordenada de vértices $v_0, v_1, \ldots, v_{n-1}$ e pela correspondente matriz de adjacência (orientada ou não). Na verdade, dada uma lista ordenada de $n$ vértices, qualquer matriz booleana $n \times n$ determina um grafo orientado com esses vértices; e qualquer matriz simétrica determina um grafo não orientado.

Se a definição permite arestas múltiplas, a matriz booleana de adjacências não é mais suficiente para representar completamente o grafo. Para tal fim, podemos entretanto usar uma matriz $M$ onde cada elemento $M_{ij}$ é um número natural, especificamente o número de arestas com extremos $(v_i, v_j)$ ou $\{v_i, v_j\}$, conforme o caso. Porém, esta representação ainda não permite saber *quais* arestas ligam esses dois vértices.

### 13.6.2 Matriz de incidência

A *matriz de incidência* de um grafo finito não orientado $G$ é simplesmente a representação matricial da sua relação de incidência. Ou seja, escolhida uma ordenação total $v_0, v_1, \ldots, v_{n-1}$ dos vértices de $G$ e uma ordenação total $e_0, e_1, \ldots, e_{m-1}$ das arestas, construímos a matriz booleana $M$ de $n$ linhas e $m$ colunas onde $M_{ik}$ é $\mathbf{V}$ se, e somente se o vértice $v_i$ é um extremo da aresta $e_k$.

Dadas as listas de vértices e arestas, a matriz de incidência determina completamente o grafo, mesmo quando este possui laços ou arestas paralelas.

> **Exercício 13.28:** Seja $G$ um grafo não orientado sem laços, e $M$ sua matriz de incidência, construída a partir de enumerações dadas de seus vértices e arestas. Se considerarmos $\mathbf{V} = 1$ e $\mathbf{F} = 0$, quanto vale a soma dos elementos da linha $i$ de $M$? E a soma dos elementos da coluna $k$? E a soma de todos os elementos? O que acontece se o grafo tiver laços?

Se $G$ é um grafo orientado, podemos construir duas matrizes de incidência. Na *matriz de entrada* (ou *chegada*) $M^+$, o elemento $M^+_{ik}$ é $\mathbf{V}$ se e somente se a aresta $e_k$ entra no vértice $v_i$. A *matriz de saída* $M^-$ é definida de maneira análoga.

Em algumas aplicações, é conveniente combinar estas duas matrizes em uma única matriz $M$ cujos elementos são inteiros no conjunto $\{+1, 0, -1\}$; sendo que $M_{ik}$ é $+1$ se $e_k$ entra em $v_i$, $-1$ se $e_k$ sai de $v_i$, e 0 se $e_k$ não incide em $v_i$. Ou seja, $M_{ik} = M^+_{ik} - M^-_{ik}$, supondo que $\mathbf{V} = 1$ e $\mathbf{F} = 0$. Entretanto, esta representação somente pode ser usada se o grafo não tiver laços.

## 13.7 Isomorfismos de grafos

Observe na figura 13.11 os grafos $G_1$, $G_2$ e $G_3$ tem a mesma estrutura, diferindo apenas nos "nomes" dos vértices e das arestas, e na maneira como estão desenhados; enquanto que o grafo $G_4$ tem uma estrutura diferente. (Por exemplo, $G_4$ é o único que tem um circuito de comprimento 4.)

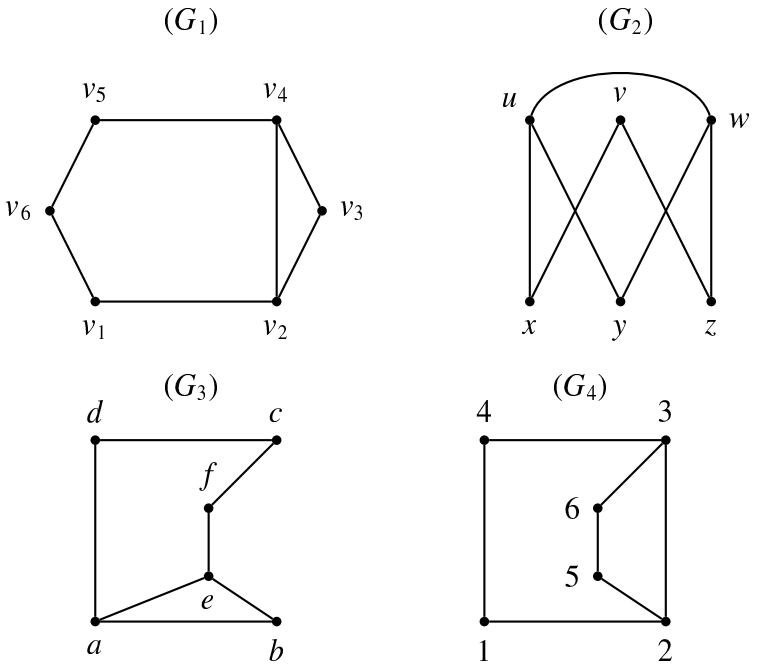
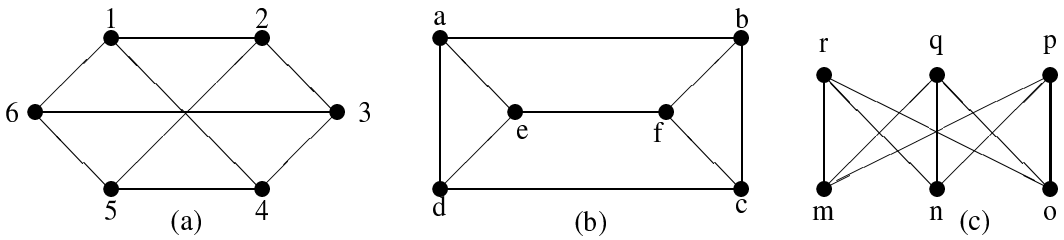



Figura 13.11: $(G_1)$, $(G_2)$, $(G_3)$ grafos com mesma estrutura. $(G_4)$ grafo com estrutura diferente de $(G_1)$, $(G_2)$ e $(G_3)$.

O conceito de "mesma estrutura" pode ser formalizado da seguinte maneira. Dizemos que dois grafos $G$ e $H$ são *isomorfos* se existem bijeções $f : \mathcal{V}G \to \mathcal{V}H$ e $g : \mathcal{E}G \to \mathcal{E}H$ tais que um vértice $v$ é extremo de uma aresta $e$ no grafo $G$ se e somente se $f(v)$ é extremo da aresta $g(e)$ no grafo $H$. No caso de grafos orientados, a direção da aresta tem que ser preservada também: a aresta $e$ entra no (resp. sai do) vértice $v$ em $G$ se e somente se $g(e)$ entra em (resp. sai de) $f(v)$. Ou seja, as funções $f$ e $g$ preservam as relações de incidências entre vértices e arestas. Se os grafos são simples, é suficiente que exista uma função bijetora $f : \mathcal{V}G \to \mathcal{V}H$ que preserva as adjacências dos vértices. Se $G$ e $H$ são o mesmo grafo, dizemos que $f$ é um *automorfismo* de $G$.

Escrevemos $G \cong H$ para indicar que $G$ e $H$ são isomorfos. Quando isto ocorre, qualquer propriedade de $G$ que pode ser definida apenas em termos de incidências também será uma propriedade de $H$. Por esta razão, isomorfismo é um dos conceitos mais importantes da teoria dos grafos.

**Exercício 13.29:** Os grafos abaixo são isomorfos? Relacione-os dois a dois. Demonstre que são isomorfos, se o forem; caso contrário justifique porque não o são.




Dados dois grafos $G$ e $H$, com $\mathcal{V}G = \mathcal{V}H = n$, verificar se $G$ e $H$ são isomorfos é um problema difícil. Uma maneira é na força bruta, ou seja analizar todas as $n!$ bijeções de $\mathcal{V}G$ para $\mathcal{V}H$ e verificar se alguma delas satisfaz a condição de isomorfismo. Há algoritmos mais

eficientes, mas todos os métodos conhecidos podem demorar demais em certos casos, mesmo para grafos relativamente pequenos.

É fácil provar (veja o exercício 13.30) que o isomorfismo é uma relação de equivalência entre grafos. Uma classe de equivalência desta relação é o conjunto de todos os grafos que tem um determinado diagrama (isto é, uma determinada estrutura) , independentemente dos "rótulos" dos vértices e das arestas.

Por esse motivo, cada uma dessas classes é chamada de *grafo não rotulado*; e os grafos que vimos até agora podem então ser chamados de *grafos rotulados*. Este conceito se aplica a qualquer um dos tipos de grafos definidos na seção 13.2 (simples,orientado, etc.).

Pode-se verificar que todos os grafos simples completos com $n$ vértices são isomorfos entre si. Portanto, para cada natural $n$, existe apenas um grafo não rotulado completo com $n$ vértices, que é geralmente denotado por $K_n$.

As figuras 13.12 e 13.13 mostram todos os grafos simples (rotulados) com vértices $\{1, 2, 3\}$, e todos os grafos simples *não rotulados* com três vértices, respectivamente. Observe que vários dos grafos da figura 13.12 são isomorfos, e portanto correspondem ao mesmo diagrama da figura 13.13.

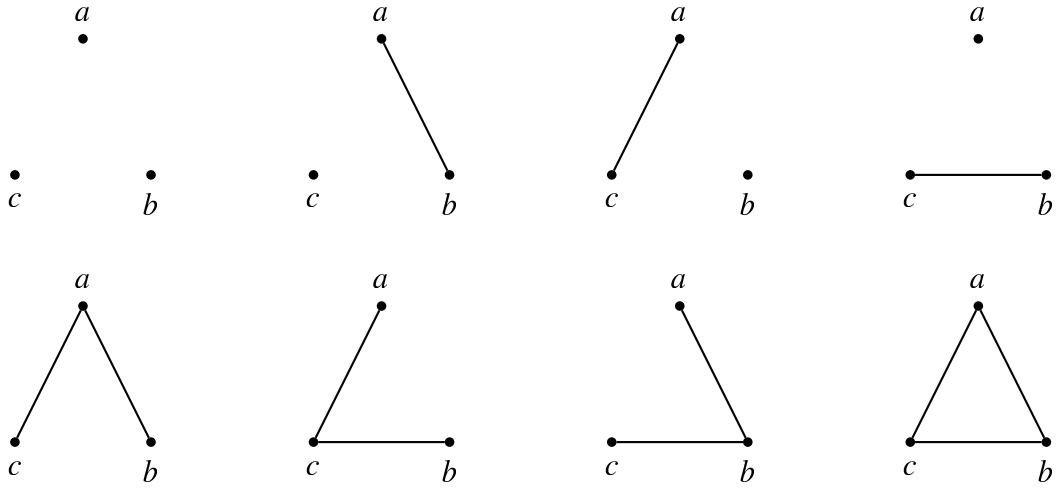



Figura 13.12: Grafos rotulados com três vértices.

Figura 13.13: Grafos não rotulados com três vértices.

**Exercício 13.30:** Prove que isomorfismo é uma relação de equivalência entre grafos.

**Exercício 13.31:** Prove que se $G$ e $H$ não são orientados e tem arestas paralelas, então $G \cong H$ se e somente se existe uma bijeção entre $\mathcal{V}\,G$ e $\mathcal{V}\,H$ que preserva adjacências: isto é, dois vértices $u, v$ são adjacentes em $G$ se e somente $f(u)$ e $f(v)$ são adjacentes em $H$.

**Exercício 13.32:** Prove que a afirmação do exercício 13.31 não é verdade se $G$ e $G$ possuem arestas paralelas.

### 13.7.1 Contagem de grafos

Existem $2^{n(n-1)/2}$ grafos (orientados) simples com $n$ vértices dados. Para justificar esta fórmula, basta observar que cada um dos $\binom{n}{2} = n(n-1)/2$ pares (ordenados) de vértices pode ser ou não aresta do grafo.

Se levarmos em conta isomorfismos — isto é, se contarmos grafos simples *não rotulados* com $n$ vértices — o número é bem menor. Veja a tabela 13.1.

Tabela 13.1: Número de grafos simples com $n$ vértices.

| $n$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | ... |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Rotulados | 1 | 1 | 2 | 8 | 64 | 1.024 | 32.768 | 2.097.152 | ... |
| Não rotulados | 1 | 1 | 2 | 4 | 34 | 156 | 1.044 | 12.346 | ... |

Um algoritmo que permite calcular o número de grafos simples não rotulados com $n$ vértices (a segunda linha da tabela 13.1) foi encontrada por George Pólya em 1935 [7, 8], mas é bastante complexa e foge do escopo deste livro.

## 13.8 Conexidade

### 13.8.1 Conexidade em grafos não orientados

Seja $G$ um grafo não orientado, Dizemos que um vértice $u \in \mathcal{V}G$ está *conectado* ou *ligado* em $G$ a um vértice $v \in \mathcal{V}G$ se e somente se existe um passeio em $G$ com início $u$ e término $v$. Isto equivale a dizer que existe um caminho em $G$ de $u$ para $v$ (veja o exercício 13.15)

Dizemos que um grafo é *conexo* se ele não é vazio e quaisquer dois de seus vértices são conectados.

As *componentes* (*conexas*) de um grafo $G$ são os subgrafos conexos de $G$ que são maximais na relação "$\subseteq$" ("é subgrafo de"). Uma propriedade importante das componentes é a seguinte:

**Teorema 13.4:** Um subgrafo $H$ de um grafo não orientado $G$ é uma componente conexa de $G$ se e somente se $H$ é conexo, e toda aresta de $\mathcal{E}G$ que tem um extremo em $\mathcal{V}H$ está em $\mathcal{E}H$ (e portanto tem os dois extremos em $\mathcal{V}H$).

**Prova:**

Para demonstrar a parte "somente se", seja $H$ uma componente conexa de $G$. Por definição, $H$ é conexo. Seja $e$ uma aresta qualquer de $\mathcal{E}G$ que tem uma ponta $u$ em $\mathcal{V}H$. Seja $v$ a outra ponta de $e$, e seja $H'$ o subgrafo de $G$ com vértices $\mathcal{V}H' = \mathcal{V}H \cup \{v\}$ e $\mathcal{E}H' = \mathcal{E}H \cup \{e\}$. O grafo $H'$ é conexo, pois qualquer vértice $w \in \mathcal{V}H$ está conectado a $u$, e $u$ está conectado a $v$ pela aresta $e$. Mas, pela definição de componente, $H$ é maximal dentre os subgrafos conexos de $G$ sob $\subseteq$. Portanto, como $H \subseteq H'$, devemos ter $H = H'$; ou seja $e \in \mathcal{E}H$ e $v \in \mathcal{V}G$.

Para demonstrar a recíproca, suponha que $H$ é um subgrafo conexo de $G$, e toda aresta de $\mathcal{E}G$ que tem um extremo em $\mathcal{V}H$ está em $\mathcal{E}H$. Vamos mostrar que $H$ é maximal dentre os subgrafos conexos de $G$. Seja $H'$ um subgrafo conexo de $G$ tal que $H \subseteq H'$. Vamos

mostrar que $H' = H$. Por definição de grafo conexo, $H$ não é vazio. Seja portanto $u$ um vértice de $H$, e $v$ um vértice qualquer de $H'$. Como $H'$ é conexo, existe um passeio $(v_0, e_1, v_1, \ldots, v_n)$ em $H'$ tal que $v_0 = u$ e $v_n = v$. Como $e_1$ tem uma ponta ($u$) em $\mathcal{V}H$, ela está em $H$ e portanto a outra ponta $v_2$ está em $\mathcal{V}H$. Desta forma, por indução em $i$, provamos que $v_i$ está em $\mathcal{V}H$ para todo $i$, e portanto $v$ está em $H$. Concluímos assim que $\mathcal{V}H' = \mathcal{V}H$. Portanto, toda aresta $e \in \mathcal{E}H'$ tem as duas pontas em $\mathcal{V}H$; pela hipótese, $e$ está em $\mathcal{E}H$, e concluímos que $\mathcal{E}H' = \mathcal{E}H$. Portanto $H' = H$, ou seja $H$ é maximal.

**Fim.**

O teorema 13.4 implica que cada componente de um grafo $G$ é essencialmente um grafo independente, sem interseção ou ligação com as outras componentes.

Observe que um grafo é conexo se e somente se ele tem exatamente uma componente conexa. Em particular, o grafo vazio não é conexo. Alguns autores usam o termo *desconexo* para um grafo com duas ou mais componentes. Um grafo sem arestas é dito *totalmente desconexo*.

Seja $e$ uma aresta de um grafo $G$. O grafo $G \setminus \{e\}$ ou tem o mesmo número de componentes conexas que $G$, ou tem uma componente a mais. No segundo, caso dizemos que a aresta $e$ é uma *aresta de corte*. Observe que, se retirarmos uma aresta de corte de um grafo conexo, obtemos um grafo desconexo.

**Exercício 13.33:** Prove que, em qualquer grafo não orientado $G$, a relação "está conectado a" é uma relação de equivalência.

**Exercício 13.34:** Sejam $H$ e $K$ dois subgrafos conexos de um grafo $G$. Demonstre que $H \cup K$ é conexo se e somente se $\mathcal{V}H \cap \mathcal{V}K \neq \emptyset$.

**Exercício 13.35:** Demonstre que um grafo $G$ é conexo se e somente se existe um vertice $u \in \mathcal{V}G$ tal que todo vértice $v \in \mathcal{V}G$ está ligado a $u$.

**Exercício 13.36:** Seja $G$ um grafo e $u$ um vértice qualquer de $G$. Prove que a componente de $G$ que contém $u$ é $G[U]$, onde $U$ é o conjunto de todos os vértices que estão ligados a $u$ em $G$.

**Exercício 13.37:** Prove que uma aresta $e$ de um grafo $G$ é uma aresta de corte se e somente se $e$ não pertence a nenhum ciclo de $G$.

### 13.8.2 Conexidade em grafos orientados

Um grafo orientado $G$ é *fortemente conexo* se, para quaisquer dois vértices $u, v \in V$, existe um passeio orientado de $u$ para $v$ e de $v$ para $u$. Isto equivale a dizer que existe um caminho orientado de $u$ para $v$ e de $v$ para $u$ (veja o exercício 13.24.)

Um subgrafo fortemente conexos de um grafo orientado $G$ que não está contido em nenhum outro subgrafo fortemente conexo de $G$ é, por definição, uma *componente fortemente conexa* de $G$. Isto é, as componentes fortemente conexas de $G$ são os subgrafos fortemente conexos de $G$ que são maximais sob "$\subseteq$".

Ao contrário do que ocorre em grafos não orientados, uma componente fortemente conexa $H$ de um grafo $G$ não é necessariamente "isolada" das outras componentes. Pode existir uma (ou

mais) aresta $e$ de $G$ que não está em $\mathcal{E}H$ mas tem origem ou destino em $\mathcal{V}H$. (Nesse caso é fácil provar que o outro extremo de $e$ não está em $\mathcal{V}H$.)

Portanto, pode-se ver que as componentes fortemente conexas de um grafo orientado $G$ não coincidem com as componentes conexas do grafo não orientado $G'$ que é obtido de $G$ ignorando-se as orientações das arestas. Em particular, se $G'$ é conexo, $G$ pode não ser fortemente conexo. Neste caso, diz-se que $G$ é *fracamente conexo*.

## 13.9 Árvores

Uma *árvore* é um grafo conexo acíclico. Árvores são muito importantes, em computação e em outras áreas, e tem inúmeras propriedades interessantes. Por exemplo, a maneira mais econômica de interligar um conjunto de computadores e *switches* por cabos é formando uma árvore.

Observe que uma árvore é necessariamente um grafo simples.

**Teorema 13.5:** Em uma árvore quaisquer dois vértices são ligados por um único caminho.

**Prova:**

Sejam $T$ uma árvore e $u$ e $v$ dois vértices de $T$. Como $T$ é conexo existe um caminho $P$ ligando o vértice $u$ ao vértice $v$. Suponhamos, por contradição, que este caminho não é único, ou seja, existe um caminho $Q$, distinto de $P$ ligando o vértice $u$ ao vértice $v$. Como os caminhos são distintos existe uma aresta $e$ que ocorre em $P$ e não em $Q$. Podemos escrever então $P = P_1 \cdot (x, e, y) \cdot P_2$ onde $x$ e $y$ são os extremos de $e$. Considere agora o subgrafo $H$ de $G$ que consiste de todos os vértices e arestas de $P$ e de $Q$, exceto a aresta $e$. A concatenação $P_1^{-1} \cdot Q \cdot P_2^{-1}$ é um passeio que visita todos os vértices de $H$. Portanto $H$ é conexo. Logo existe um caminho $R$ em $H$ de $x$ para $y$ que não passa por $e$. A concatenação $R \cdot (y, e, x)$ é portanto um circuito em $T$. Isto contradiz a definição de árvore. Portanto concluímos que o caminho $P$ é único.

**Fim.**

Outra propriedade de árvores que precisaremos mais adiante é a seguinte:

**Corolário 13.6:** Seja $G$ uma árvore e $e$ uma aresta de $G$. O grafo $G \setminus \{e\}$ tem exatamente duas componentes conexas.

**Prova:**

Sejam $u$ e $v$ os extremos de $e$, e seja $H = G \setminus \{e\}$. Pelo teorema 13.5, o único caminho entre $u$ e $v$ em $G$ é $(u, e, v)$. Portanto em $H$ não existe caminho entre $u$ e $v$, implicando que $H$ é desconexo.

Por outro lado, todo vértice $x$ de $G$ está ligado a $u$ por um um único caminho $P(x)$. Se esse caminho não passa por $e$, então ele é um caminho em $H$. Se ele passa por $e$, então $P(x) = P'(x) \cdot (v, e, u)$, e portanto $P'(x)$ é um caminho de $x$ para $v$ em $H$. Concluímos que todo vértice de $H$ está ligado em $H$ ao vértice $u$ ou ao vértice $v$. Portanto $H$ tem exatamente duas componentes conexas: a que contém $u$, e a que contém $v$.

**Fim.**

Este corolário implica que toda aresta de uma árvore é uma aresta de corte.

**Teorema 13.7:** Seja $G$ uma árvore com $|\mathcal{V}G| = n$ e $|\mathcal{E}G| = m$ então $m = n - 1$.

**Prova:**

Vamos provar este teorema por indução no número de vértices. Observe que, como um grafo conexo não pode ser vazio, uma árvore tem pelo menos um vértice.

- *Base:* Se $n = 1$, então qualquer aresta de $G$ seria um laço, e portanto formaria um circuito. Portanto $G$ tem zero arestas, e a afirmação é verdadeira.
- *Hipótese de indução:* Para todo $k < n$, uma árvore com $k$ vértices tem $k - 1$ arestas.
- *Passo:* Supondo que $n \geq 2$ e a hipótese de indução, vamos provar que toda árvore $G$ com $n$ vértices tem $n - 1$ arestas. Como $G$ é conexo, ele deve ter pelo menos uma aresta $e = (u, v)$. Considere o subgrafo $H = G \setminus \{e\}$. Pelo lema 13.6, $H$ tem exatamente duas componentes conexas, $H_1$ e $H_2$. Sejam $n_1 = |\mathcal{V}H_1|$ e $n_2 = |\mathcal{V}H_2|$; note que $n_1 + n_2 = n$, $n_1 < n$, e $n_2 < n$. Portanto, pela hipotese de indução, $H_1$ tem $n_1 - 1$ arestas, e $H_2$ tem $n_2 - 1$ arestas. Logo o número de arestas de $G$ é $(n_1 - 1) + (n_2 - 1) + 1 = n_1 + n_2 - 1 = n - 1$.

**Fim.**

**Exercício 13.38:** Seja $G$ um grafo, e $t$ uma aresta de $G$ tal que $G \setminus \{t\}$ é uma árvore. Prove que $G$ tem exatamente um subgrafo-circuito (um subgrafo conexo não vazio $H$ com $|\mathcal{E}H| = |\mathcal{V}H|$.)

**Exercício 13.39:** Suponha provado que um grafo com $n$ vértices é uma árvore se e somente se ele é conexo e tem exatamente $n - 1$ arestas.

- a Prove que, se $G$ é uma árvore e $t$ é uma aresta qualquer de $G$, então $G \setminus \{t\}$ tem exatamente duas componentes que são árvores.
- b Prove que todo grafo árvore tem ou um vértice de grau 0, ou pelo menos dois vértices de grau 1.

**Exercício 13.40:** Sejam $g_1, \ldots, g_n$ ($n \geq 2$) inteiros positivos tais que $\sum_{i=1}^{n} g_i = 2n - 2$.

- a) Mostre que se $n \geq 3$ então existem $i$ e $j$ tais que $g_i = 1$ e $g_j \geq 2$.
- b) Mostre por indução em $n$ que existe alguma árvore com $n$ vértices e com sequência de graus $(g_1, \ldots, g_n)$ dada, não necessariamente ordenada.

## 13.10 Grafos bipartidos

Seja $G = (\mathcal{V}G, \mathcal{E}G, \mathcal{F}G)$ um grafo. Uma *bipartição* de $\mathcal{V}G$ é um par não ordenado de subconjuntos $\mathcal{V}^- G$ e $\mathcal{V}^+ G$ de $\mathcal{V}G$, tais que $\mathcal{V}^- G \cup \mathcal{V}^+ G = \mathcal{V}G$ e $\mathcal{V}^- G \cap \mathcal{V}^+ G = \emptyset$ e toda aresta do grafo tem um extremo em $\mathcal{V}^- G$ e o outro em $\mathcal{V}^+ G$. Um grafo $G$ com uma bipartição $\mathcal{V}^- G$, $\mathcal{V}^+ G$ é chamado um *grafo bipartido*.

Um *grafo bipartido completo* é um grafo bipartido no qual todo vértice de $\mathcal{V}^- G$ é adjacente a todo vértice de $\mathcal{V}^+ G$.

Verifica-se que uma condição necessária e suficiente para que um grafo $G = (\mathcal{V}G, \mathcal{E}G, \mathcal{F}G)$ tenha uma bipartição é que ele não possua ciclos de comprimento ímpar.

Pode-se verificar (veja o exercício 13.41) que, para cada par de números naturais $m$ e $n$, existe apenas um grafo não rotulado bipartido completo cuja bipartição tem $m$ vértices em um conjunto e $n$ vértices no outro. Esse grafo não rotulado é geralmente denotado por $K_{m,n}$.

**Exercício 13.41:** Prove que dois grafos bipartidos completos $G$ e $H$ são isomorfos se e somente se existirem bipartições $\mathcal{V}^- G, \mathcal{V}^+ G$ de $G$ e $\mathcal{V}^- H, \mathcal{V}^+ H$ de $H$ tais que $\left|\mathcal{V}^- G\right| = \left|\mathcal{V}^- H\right|$ e $\left|\mathcal{V}^+ G\right| = \left|\mathcal{V}^+ H\right|$.

**Exercício 13.42:** Quando é que um grafo bipartido completo é regular?

## 13.11 Grafos eulerianos

Para mostrar que o problema das pontes de Königsberg não tem solução, Euler primeiro modelou o mapa da figura 13.2 por um grafo $G$ não orientado, onde cada vértice representava uma região de terra firme (uma margem do rio ou uma ilha), e cada aresta representava uma ponte entre as duas regiões representadas pelos seus extremos (veja figura 13.14). Neste modelo, o problema pede um passeio no grafo $G$ que atravessa exatamente uma vez cada aresta de $\mathcal{E}G$, ou seja, uma trilha que atravessa por todas as arestas. Uma trilha com esta propriedade é chamada de *trilha euleriana* ou *trilha de Euler* do grafo $G$. Se a trilha é fechada ela é chamada de *tour euleriano* ou *tour de Euler*. Um grafo é dito *euleriano* se ele contém um tour de Euler.

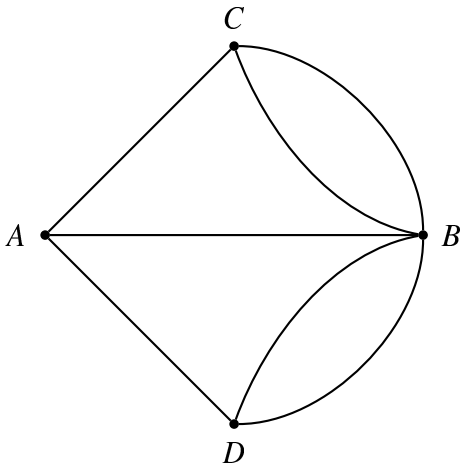



Figura 13.14: Grafo das pontes de Königsberg

No seu artigo de 1736, Euler fez mais do que resolver o problema da cidade de Königsberg. Ele encontrou uma condição necessária e suficiente para que um grafo qualquer $G$ tenha um tour euleriano:

**Teorema 13.8:** Um grafo conexo tem um tour de Euler se e somente se ele não tem vértices de grau ímpar.

A demonstração da parte "somente se" do teorema é o exercício 13.44. A prova da parte "se" do enunciado é mais trabalhosa e foge do escopo deste livro.

Outro quebra-cabeças clássico que recai no mesmo problema de grafos é desenhar cada um dos diagramas da figura 13.15 sem levantar o lápis do papel e sem traçar duas vezes a mesma linha. Cada desenho pode ser modelado por um grafo $G$, onde os vértices são os extremos isolados de linhas ou pontos onde três ou mais linhas se encontram, e as arestas são as linhas ligando esses pontos. Nesse caso, o que se pede é uma *trilha euleriana*, uma trilha (não necessariamente fechada) que passa por todas as arestas de $G$. O seguinte teorema é um corolário do teorema de Euler:

**Corolário 13.9:** Um grafo conexo tem uma trilha de Euler se, e somente se, ele tem no máximo dois vértices de grau ímpar.

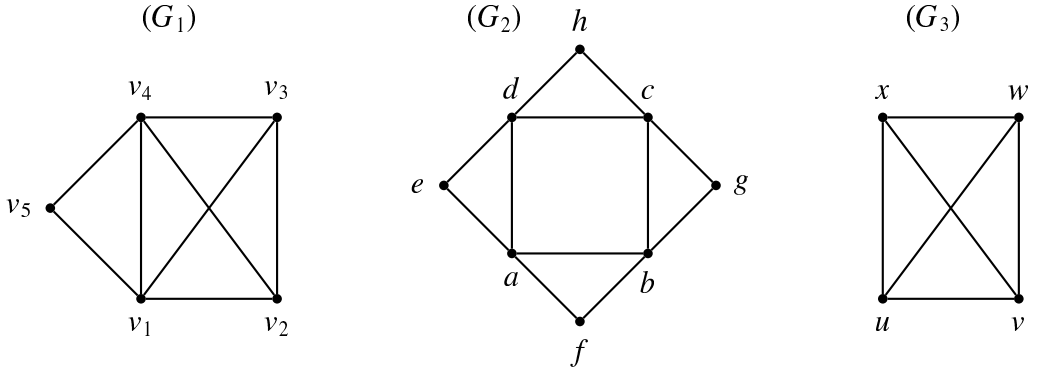



Figura 13.15: $(G_1)$ e $(G_2)$ grafos com trilhas eulerianas e $(G_3)$ grafo sem trilha euleriana.

**Exercício 13.43:** Para que valores de $n$ um grafo completo com $n$ vértices tem um tour de Euler?

**Exercício 13.44:** Seja $G$ um grafo conexo. Se $G$ tem um tour de Euler então $G$ não tem vértices de grau ímpar.

**Exercício 13.45:** Seja $G = (V, E)$ um grafo simples conexo e que não é euleriano. Foram propostos os seguintes métodos para construir um grafo euleriano $H$ que contém $G$ como um subgrafo. Quais dos métodos descritos abaixo constroem corretamente o grafo $H$? Justifique sucintamente.

a) Acrescente um novo vértice, ligando-o a cada vértice de grau ímpar de $G$ através de uma aresta.

b) Acrescente um novo vértice, ligando-o a cada vértice de $G$ através de uma aresta.

c) Escolha um vértice arbitrário de $G$ e acrescente novas arestas ligando este vértice a todos os vértices de grau ímpar de $G$.

d) Duplique cada aresta de $G$.

e) Acrescente arestas a $G$ até obter um grafo completo com $|V|$ vértices.

## 13.12 Grafos hamiltonianos

Considere o seguinte quebra-cabeças: o Rei Artur precisa designar os assentos para seus 24 Cavaleiros em volta da Távola Redonda. Mas nem todos eles são amigos; e é importante que cada cavaleiro seja colocado entre dois de seus amigos.

Podemos descrever as relações de amizade como um grafo simples $G$ onde os vértices são os Cavaleiros e existe uma aresta entre dois Cavaleiros se eles são amigos (e portanto podem sentar lado a lado). Veja por exemplo a figura 13.16.

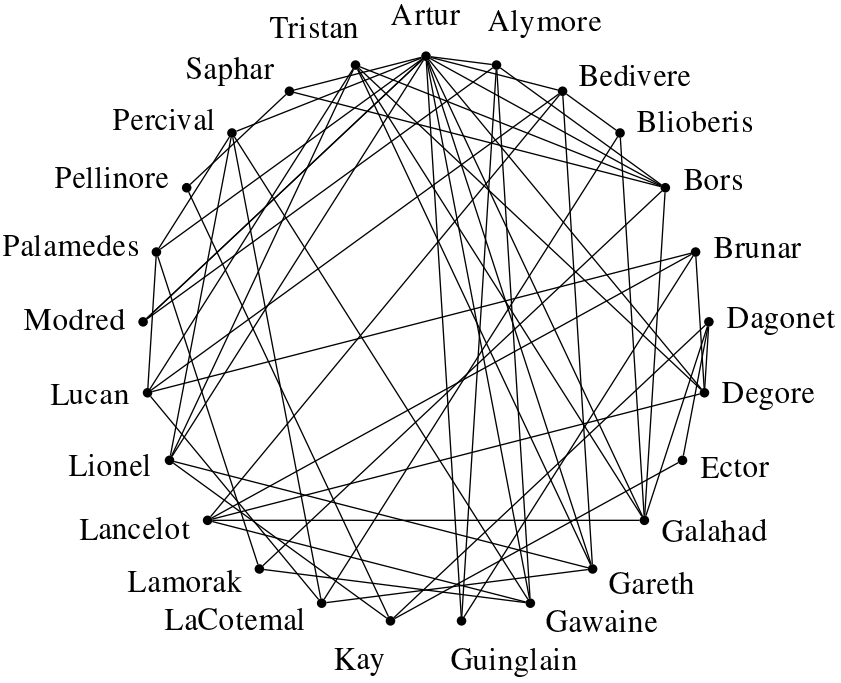



Figura 13.16: O grafo de amizades dos Cavaleiros da Távola Redonda.

Pode-se ver que a solução do quebra-cabeças é um circuito nesse grafo $G$ que passa por todos os seus vértices; ou seja, um passeio fechado que passa exatamente uma vez em cada vértice. Veja a figura 13.17.

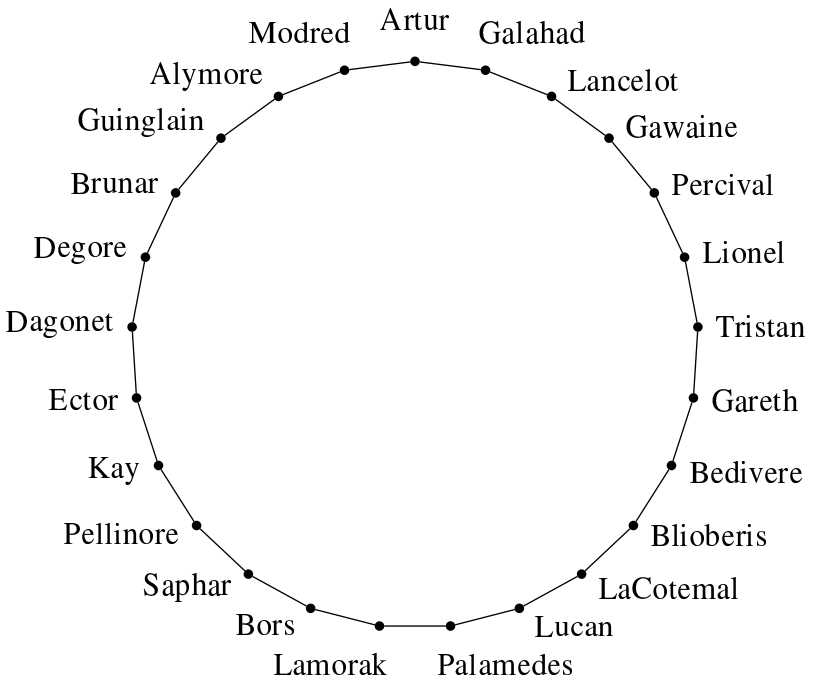



Figura 13.17: Uma solução para o problema do Rei Artur.

Um circuito com essas propriedades é chamado de *circuito hamiltoniano* do grafo $G$. Este nome homenageia o matemático irlandês William Rowland Hamilton (1805–1861). Em 1856 ele descreveu, em uma carta a um colega, um jogo para duas pessoas baseado no grafo $G$ da figura 13.18, derivado do dodecaedro. Nesse jogo, uma pessoa escolhe um caminho $P$ qualquer de cinco vértices no grafo $G$, e a outra deve encontrar um circuito em $G$ que começa com $P$ e passa por todos os vértices.

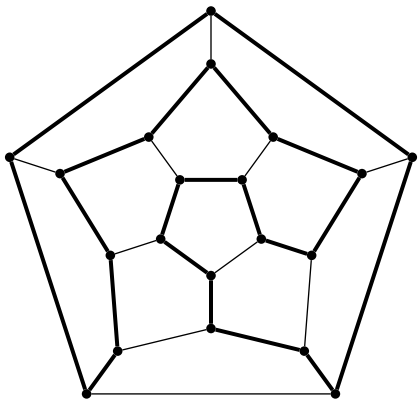


Figura 13.18: O grafo $G$ do jogo de Hamilton.

Um grafo que possui pelo menos um circuito hamiltoniano é chamado de *grafo hamiltoniano*. A figura 13.19 mostra alguns exemplos de grafos hamiltonianos (com os respectivos circuitos) e de grafos não hamiltonianos.

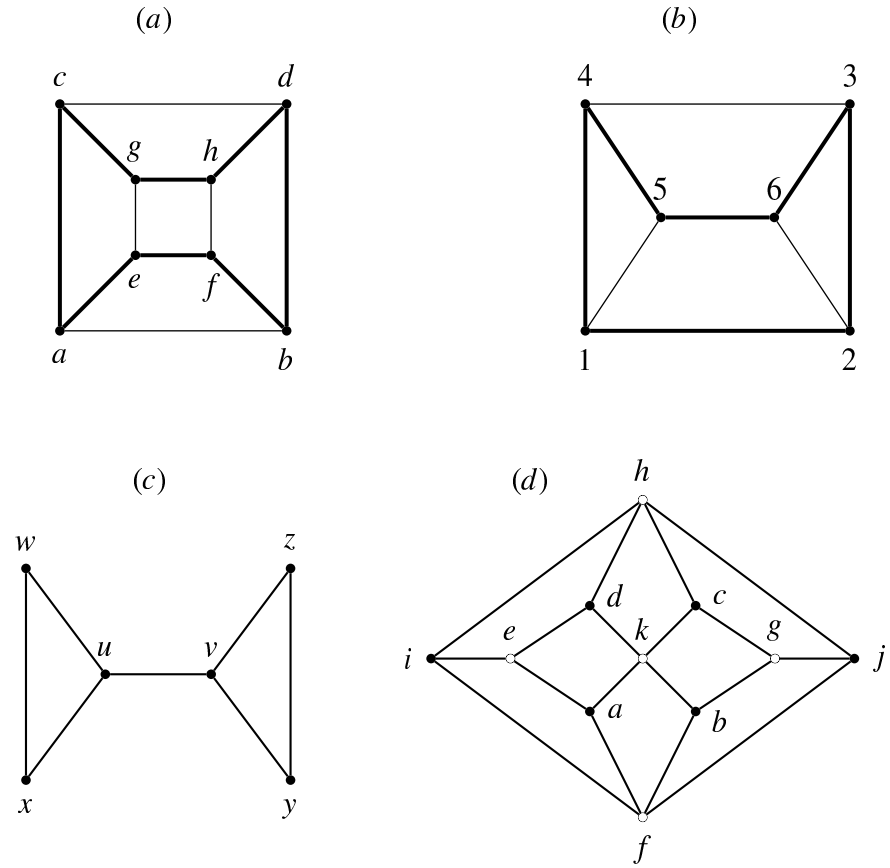



Figura 13.19: (*a*) e (*b*) grafos hamiltonianos e (*c*) e (*d*) grafos não hamiltonianos.

Há vários argumentos que podem ser usados para demonstrar que um grafo não é hamiltoniano. Por exemplo, se $G$ tem um vértice de grau 1, então $G$ não é hamiltoniano. No exemplo da figura 13.19(c), pode-se ver que qualquer passeio que visite os vértices $u$ e $v$ deve repetir a aresta $a$, e portanto não pode ser um circuito. No exemplo da figura 13.19(d), pode-se observar que os cinco vértices brancos e os seis vértices pretos formam uma bipartição $\mathcal{V}^- G, \mathcal{V}^+ G$ de $G$. Como os dois conjuntos tem cardinalidades diferentes, podemos concluir que não há circuito que passe por todos os vértices.

Um grafo completo $K_n$ sempre tem um circuito hamiltoniano se $n \geq 3$. Uma condição suficiente para que um grafo $G$ seja hamiltoniano é que $|\mathcal{V}G| \geq 3$ e cada vértice tenha grau pelo menos $|\mathcal{V}G|/2$. Entretanto, esta condição não é necessária. A demonstração deste teorema (e muitas outras condições necessárias ou suficientes para um grafo ser hamiltoniano) pode ser encontrada em textos de teoria de grafos [2, 3].

Em contraste com os grafos eulerianos, não se conhece nenhum algoritmo eficiente para encontrar um circuito hamiltoniano em um grafo $G$ dado. Na verdade, não se conhece nenhuma condição necessária e suficiente para saber se um grafo é hamiltoniano que seja fácil de testar.

Um caminho que visita todos os vértices de um grafo $G$ é chamado *caminho hamiltoniano* de $G$.

**Exercício 13.46:** Um cofre tem uma fechadura elétrica acionada por três chaves, cada uma das quais pode estar em duas posições indicadas por '0' e '1'. A porta abre somente se as três chaves estiverem em uma combinação secreta específica, por exemplo '011'. Um ladrão que não conhece o segredo quer tentar todas as combinações mexendo em apenas uma chave de cada vez, no menor tempo possível. Modele o problema em um grafo e encontre uma solução para o mesmo. Faça o mesmo para um cofre com quatro chaves.

**Exercício 13.47:** Um *poliedro* é um sólido geométrico limitado por polígonos planos. A todo poliedro $K$ corresponde um grafo $G$ tal que $\mathcal{V}G$ é o conjunto dos vértices (cantos) de $K$, $\mathcal{E}G$ é o conjunto das arestas (quinas) de $P$ e as pontas de cada aresta são as mesmas em $G$ e em $K$. Os *poliedros platônicos* são poliedros cujas faces, vértices, arestas e ângulos são todos iguais. Existem apenas cinco poliedros platônicos: o tetraedro, o cubo, o octaedro, o icosaedro, e o dodecaedro regulares. Desenhe os grafos desses poliedros e determine quais deles possuem um circuito hamiltoniano,

**Exercício 13.48:** Dê exemplos de:

1. Um grafo euleriano que não é hamiltoniano.
2. Um grafo hamiltoniano que não é euleriano.

**Exercício 13.49:** Demonstre que se $G$ é um grafo bipartido com um número ímpar de vértices, então $G$ não é um grafo hamiltoniano.

**Exercício 13.50:** Considere um tabuleiro de xadrez. Um cavalo pode, através de seus movimentos no jogo de xadrez, passar por todas as casas do tabuleiro e retornar à casa de onde partiu? Responda esta questão considerando um "tabuleiro" $4 \times 4$, $5 \times 5$, $7 \times 7$, $8 \times 8$. Sugestão: O exercício 13.49 poderá auxiliar em alguns desses casos.

**Exercício 13.51:** Prove, por indução, que o $n$-cubo é um grafo hamiltoniano.

## 13.13 Grafos planares

Um quebra-cabeças clássico pede para ligar três casas a três centrais de serviço — água, esgoto e internet banda-larga — sem que nenhuma dessas ligações cruze qualquer outra. Veja a figura 13.20.

O problema pede para desenhar um grafo $G$ (neste caso, o grafo completo bipartido $K_{3,3}$) no plano, de modo que nenhuma aresta cruze outra aresta ou passe por um vértice que não é seu extremo. Um desenho deste tipo é chamado de *representação planar* do grafo $G$. Se $G$ pode ser desenhado desta forma, dizemos que ele é um grafo *planar*.

Nem todo grafo é planar. A figura 13.21 mostra exemplos de grafos planares e não planares.

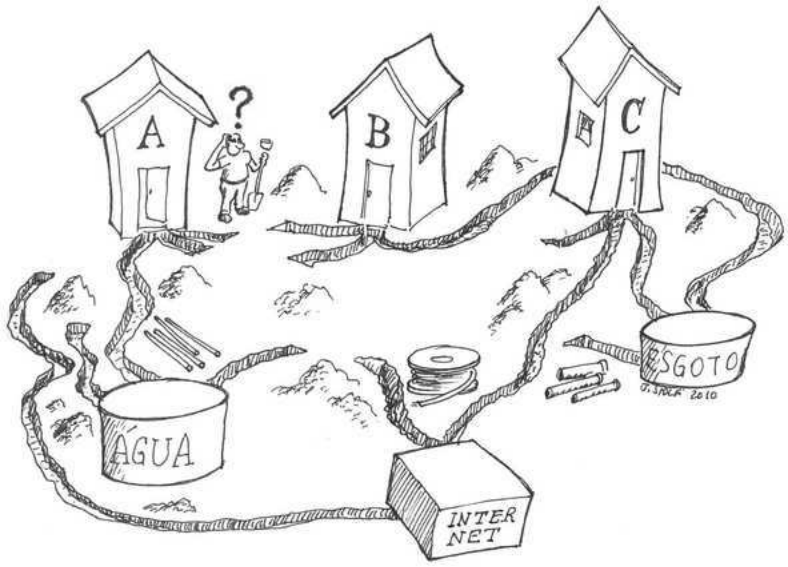



Figura 13.20: O problema das três casas e três serviços.

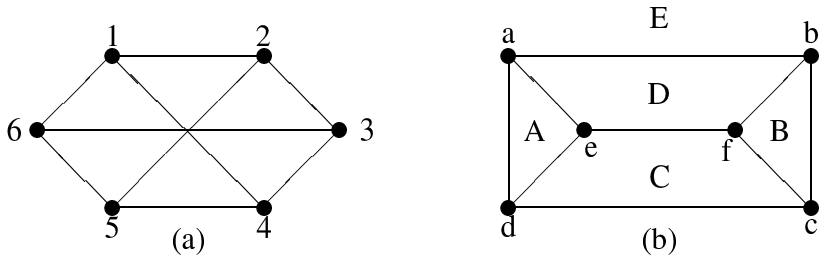



Figura 13.21: (a) Um grafo não planar. (b) Um grafo planar.

Uma representação planar de um grafo divide o plano em uma ou mais regiões, separadas pelos desenhos dos vértices e arestas. Essas regiões são chamadas de *faces* da representação. Na figura 13.21(b) há cinco faces ($A$,$B$,$C$,$D$,$E$). Note que uma dessas regiões — a *face externa* $E$ — tem tamanho infinito, as demais tem tamanho finito.

A teoria dos grafos planares é bastante extensa e necessita de conhecimentos de topologia do espaço $\mathbb{R}^2$ que fogem ao escopo deste livro. Portanto indicaremos apenas alguns resultados importantes sobre este tema, sem demonstração.

**Teorema 13.10:** Seja $\hat{G}$ uma representação planar de um grafo $G$. Uma aresta $e$ de $G$ pertence a um circuito se, e somente se, ela separa duas faces distintas de $\hat{G}$.

**Corolário 13.11:** Um grafo é uma árvore se e somente se ele tem uma representação planar com uma única face.

### 13.13.1 A fórmula de Euler para grafos planares

Um mesmo grafo planar $G$ pode ter várias representações planares bem diferentes. Na figura 13.22, por exemplo, no primeiro desenho as faces $A, B, C, D$ tem 3, 3, 5 e 5 lados, respectivamente, enquanto que no segundo as faces $A', B', C', D'$ tem 3, 3, 4 e 6 lados, respectivamente.

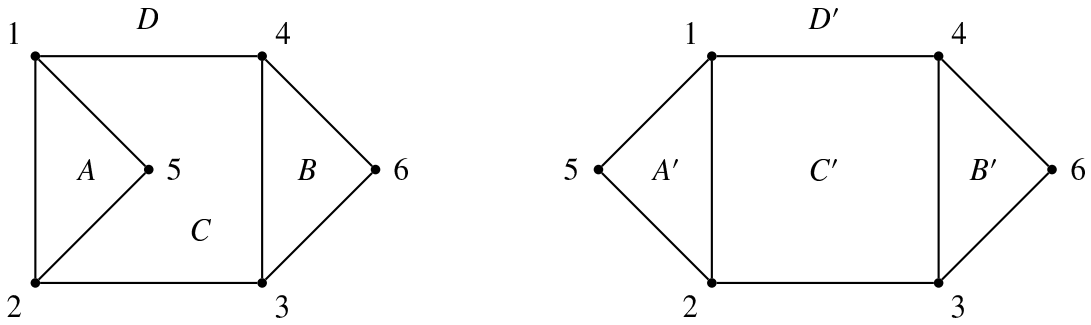



Figura 13.22: Duas representações planares do mesmo grafo.

No entanto, Euler descobriu que toda representação planar de um mesmo grafo $G$ tem o mesmo número de faces. Este resultado foi expresso pelo seguinte teorema:

**Teorema 13.12:** [Fórmula de Euler] Seja $\hat{G}$ uma representação planar de um grafo simples e conexo $G$. Seja $f$ o número de faces de $\hat{G}$. Então $f = e - v + 2$, onde $v = |\mathcal{V}G|$ e $e = |\mathcal{E}G|$.

**Prova:**

Vamos provar usando indução no número de faces de $\hat{G}$. Se $f = 1$ então, pelo teorema 13.11, $G$ é uma árvore. Nesse caso, pelo teorema 13.7, temos $e = v - 1$. Portanto o enunciado vale para $f = 1$.

Suponhamos agora que $f$ é um inteiro maior ou igual a 2 e que a afirmação é verdadeira para todas as representações planares de grafos simples com o número de faces menor que $f$. Seja $\hat{G}$ uma representação de um grafo conexo e planar $G$ com $f$ faces. Escolha uma aresta $a$ de $G$ que não seja uma aresta de corte. Logo $a$ pertence a algum circuito de $G$ (veja o exercício 13.37) e pelo teorema 13.10, ela separa duas faces distintas de $\hat{G}$. Então retirando a aresta $a$ de $\hat{G}$ obtemos uma representação $\hat{G}'$ do subgrafo $G - a$. Observe que $G - a$ é conexo e que $\hat{G}'$ tem $f' = f - 1$ faces, pois as duas faces de $\hat{G}$ separadas por $a$ tornam-se uma face em $\hat{G}'$. Sejam $v' = v$ e $e' = e - 1$ o número de vértices e arestas do grafo $G - a$. Por hipótese de indução temos que

$$f' = e' - v' + 2$$

ou seja

$$(f - 1) = (e - 1) - v + 2$$

e portanto

$$f = e - v + 2$$

**Fim.**

Uma consequência da fórmula de Euler é que um grafo planar não pode ter muitas arestas. Mais precisamente:

**Corolário 13.13:** Seja $G$ um grafo planar, simples e conexo, com pelo menos três vértices. Então $|\mathcal{E}G| \leq 3|\mathcal{V}G| - 6$.

O corolário 13.13 permite concluir que o grafo completo $K_5$ não é planar, pois para ele temos $|\mathcal{V}K_5| = 5$, $|\mathcal{E}K_5| = 10$, e $10 > 3 \cdot 5 - 6 = 9$.

**Corolário 13.14:** Seja $G$ um grafo planar, simples e conexo, com pelo menos três vértices. Se $G$ não possui ciclos de comprimento 3, então $|\mathcal{E}G| \leq 2|\mathcal{V}G| - 4$.

Este corolário permite concluir que $K_{3,3}$ não é planar, pois ele não tem ciclos de comprimento 3, tem $\left|\mathcal{V}K_{3,3}\right| = 6$, $\left|\mathcal{E}K_{3,3}\right| = 9$, e $9 > 2 \cdot 6 - 4 = 8$. Observe que este resultado mostra que o problema das três casas e três serviços não tem solução.

### 13.13.2 O teorema de Kuratowski

A definição de grafo planar usa o conceito de curvas desenhadas no plano $\mathbb{R}^2$, e portanto sai do domínio da matemática discreta (grafos) para o domínio da matemática contínua (geometria e topologia do plano). Entretanto, em 1930, o matemático polonês Kasimierz Kuratowski (1896–1980) descobriu que é possível caracterizar os grafos planares apenas em termos discretos.

Para apresentar esse resultado precisamos do conceito de *subdivisão de um grafo*. Dizemos que um grafo simples $H$ é uma *subdivisão* de outro grafo simples $G$ se $\mathcal{V}G \subseteq \mathcal{V}H$, e para cada aresta $e \in \mathcal{E}G$ existe um caminho $C_e$ em $H$ ligando os extremos $e$; sendo que toda aresta de $\mathcal{E}H$ e todo vértice de $\mathcal{V}H \setminus \mathcal{V}G$ ocorre em exatamente um destes caminhos. (Ou seja, se e somente se $H$ pode ser obtido de $G$ inserindo-se zero ou mais vértices novos ao longo de cada aresta.) Veja a figura 13.23.

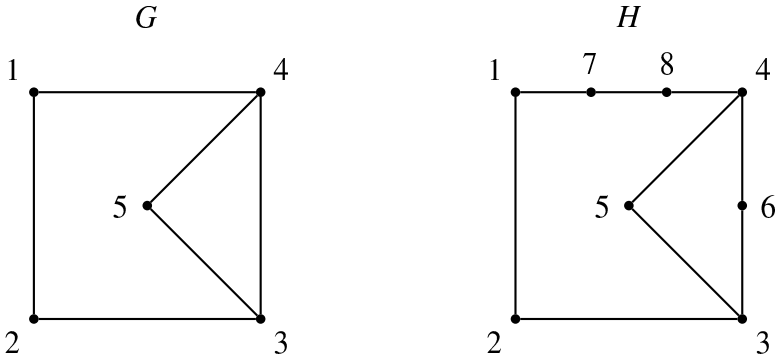



Figura 13.23: Um grafo $G$ e uma subdivisão $H$ de $G$.

**Teorema 13.15:** [Teorema de Kuratowski] Um grafo $G$ é planar se e somente se ele não contém um subgrafo que seja isomorfo a uma subdivisão do $K_5$ ou do $K_{3,3}$.

**Exemplo 13.1:** A figura 13.24(a) mostra o chamado *grafo de Petersen* (estudado pelo matemático dinamarquês Julius Petersen, 1839–1910) que denotaremos por $P$. Seja $H$ o subgrafo de $P$ formado pelos vértices e arestas cheias, que está redesenhado na figura 13.24(b). Neste desenho é fácil ver que $H$ é isomorfo a uma subdivisão do grafo completo $K_{3,3}$ ilustrado na figura 13.24(c). Note, por exemplo, que o caminho $(e, a, f)$ de $H$ corresponde à aresta $(1, 4)$ de $K_{3,3}$.

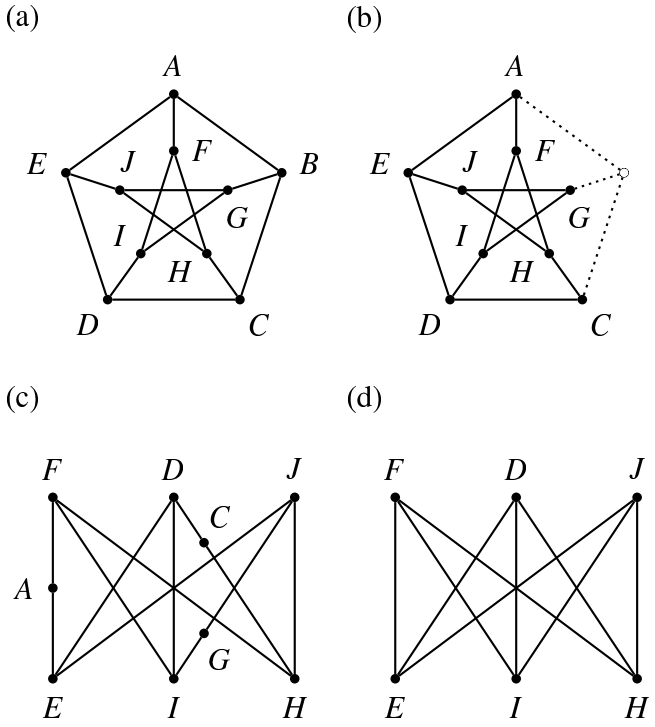



Figura 13.24: (a) o grafo de Petersen. (b,c) O subgrafo $G \setminus \{B\}$ desenhado de duas maneiras diferentes. (d) um grafo $K_{3,3}$ que subdividido dá $G \setminus \{B\}$.

**Exercício 13.52:** Assinale com **V** ou **F** as afirmações que são verdadeiras ou falsas respectivamente:

- todo subgrafo de um grafo planar é planar.
- todo subgrafo de um grafo não-planar é não-planar.
- todo grafo que contém um grafo planar (como subgrafo) é planar.
- todo grafo que contém um grafo não-planar (como subgrafo) é não-planar.

**Exercício 13.53:** Para que valores de $n$, $K_n$ é planar?

**Exercício 13.54:** Para quais valores de $r$ e $s$ ($r \leq s$) o grafo bipartido completo $K_{r,s}$ é planar?

### 13.13.3 Grafo dual

Seja $\hat{G}$ uma representação planar de um grafo $G$, e seja $H$ um grafo definido da seguinte maneira:

- Os vértices de $H$ são as faces de $\hat{G}$;
- As arestas de $H$ são as arestas de $G$;
- Uma aresta $e$ tem extremos nos vértices $A$ e $B$ em $H$ se e somente se ela é parte da fronteira entre as faces $A$ e $B$ em $\hat{G}$.

Verfica-se que $H$ também é um grafo planar, e tem uma representação planar $\hat{H}$ tal que cada vértice de $\hat{H}$ está dentro da face correspondente de $\hat{G}$, e vice-versa; e que uma aresta $e'$ em $\hat{H}$ cruza uma aresta $e''$ de $\hat{G}$ se, e somente se, $e' = e''$. Veja a figura 13.25. Neste caso, diz-se que $\hat{G}$ e $\hat{H}$ são *representações planares duais*, e que $G$ e $H$ são *grafos duais*.

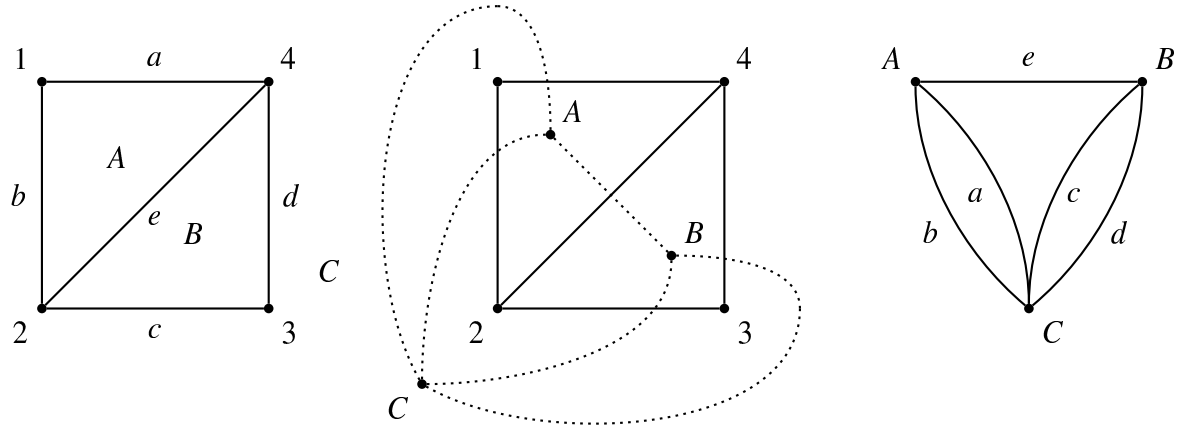



Figura 13.25: Uma representação planar $\hat{G}$ de um grafo $G$ (esq.) e sua representação planar dual $\hat{H}$ (dir.).

Para cada afirmação sobre uma representação planar $\hat{G}$ há uma afirmação equivalente sobre a representação dual $\hat{H}$, onde os conceitos de face e vértice trocam de papéis. Por exemplo, dizer que $\hat{G}$ possui um vértice de grau 5 equivale a dizer que $\hat{H}$ possui uma face com cinco lados (levando em conta que uma mesma aresta pode contribuir com dois lados). Aplicando esta correspondência a teoremas já provados podemos obter outros teoremas, às vezes nada óbvios, que não precisam ser demonstrados.

## 13.14 Coloração de grafos

### 13.14.1 Coloração de mapas

É costume em mapas pintar os países (estados, municípios, etc) com cores variadas, de tal forma que estados que tem fronteira comum tenham cores diferentes — a fim de tornar as fronteiras mais visíveis. Uma questão antiga é quantas cores diferentes são necessárias para esse fim. A experiência sugere que três cores são insuficientes, mas quatro cores bastam (desde que cada país seja um único território contínuo). Será que existe algum mapa que precisa de cinco (ou mais) cores?

Em 1852 esta questão foi colocada como um problema matemático pelo aluno inglês Francis Guthrie (1831–1899), e foi amplamente divulgada pelo seu professor Augustus De Morgan. Em 1879, o matemático inglês Alfred Kempe (1849–1922) publicou uma demonstração de que quatro cores eram suficientes. Porém, em 1890 foi observado que havia uma falha na demonstração de Kempe. Uma demonstração correta foi obtida apenas em 1976, por Kenneth Appel e Wolfgang

Haken. Essa demonstração causou bastante controvérsia, pois os autores reduziram o problema a 2000 casos separados, e utilizaram um programa de computador para enumerar e verificar todos esses casos. Por esse motivo muitos matemáticos se recusaram a considerar a demonstração válida, e ela foi publicada somente em 1989. Em 1996 Robertson, Sanders, Seymour e Thomas conseguiram simplificar a demonstração reduzindo a lista para "apenas" 633 casos. (Hoje demonstrações usando computador tornaram-se ferramentas importantes em matemática.)

Um mapa de países pode ser visto como uma representação planar $\hat{G}$ de um grafo $G$: cada vértice de $G$ é um ponto do mapa onde três ou mais países tem fronteira comum, e cada aresta é um trecho de fronteira entre dois países ligando dois desse pontos. Na representação dual $\hat{H}$ de $\hat{G}$, cada vértice é um país e existe uma aresta ligando dois países se, e somente se, eles tem um trecho de fronteira em comum. Portanto, o resultado de Appel e Haken pode ser reformulado como segue

**Teorema 13.16:** [Teorema das quatro cores] Se $H$ é um grafo planar é sempre possível colorir seus vértices com quatro cores, de modo que quaisquer dois vértices adjcentes tenham cores distintas.

### 13.14.2 Coloração de grafos em geral

O problema das quatro cores é um caso particular de uma questão mais geral sobre grafos arbitrários (não necessariamente planares).

Definimos uma *k-coloração* de um grafo simples $G$ como uma atribuição de $k$ cores aos vértices de tal forma que vértices adjacentes não tem a mesma cor. O *número cromático* de $G$ é o menor número $k$ de cores tal que $G$ tem uma $k$-coloração. Denotaremos por $\chi(G)$ o número cromático de um grafo $G$.

É fácil ver que o número cromático de $G$ é 2 se e somente se $G$ é bipartido, e que o número cromático do grafo completo $K_n$ é $n$. O teorema das quatro cores diz que o número cromático de um grafo planar é no máximo 4.

Ainda não se conhece um algoritmo eficiente para determinar o número cromático de um grafo simples $G$ arbitrário. Entretanto, existe um teorema que limita esse número:

**Teorema 13.17:** Seja $G$ um grafo simples e $\Delta$ o maior dos graus de seus vértices. O número cromático de $G$ é no máximo $\Delta + 1$.

**Exercício 13.55:** Qual é o número cromático do grafo ciclo com cinco vértices ($C_5$)? E do grafo ciclo com $n$ vértices ($C_n$) em geral?

**Exercício 13.56:** Qual é o número cromático do grafo completo bipartido $K_{p,q}$, para $p,\ q \geq 1$?

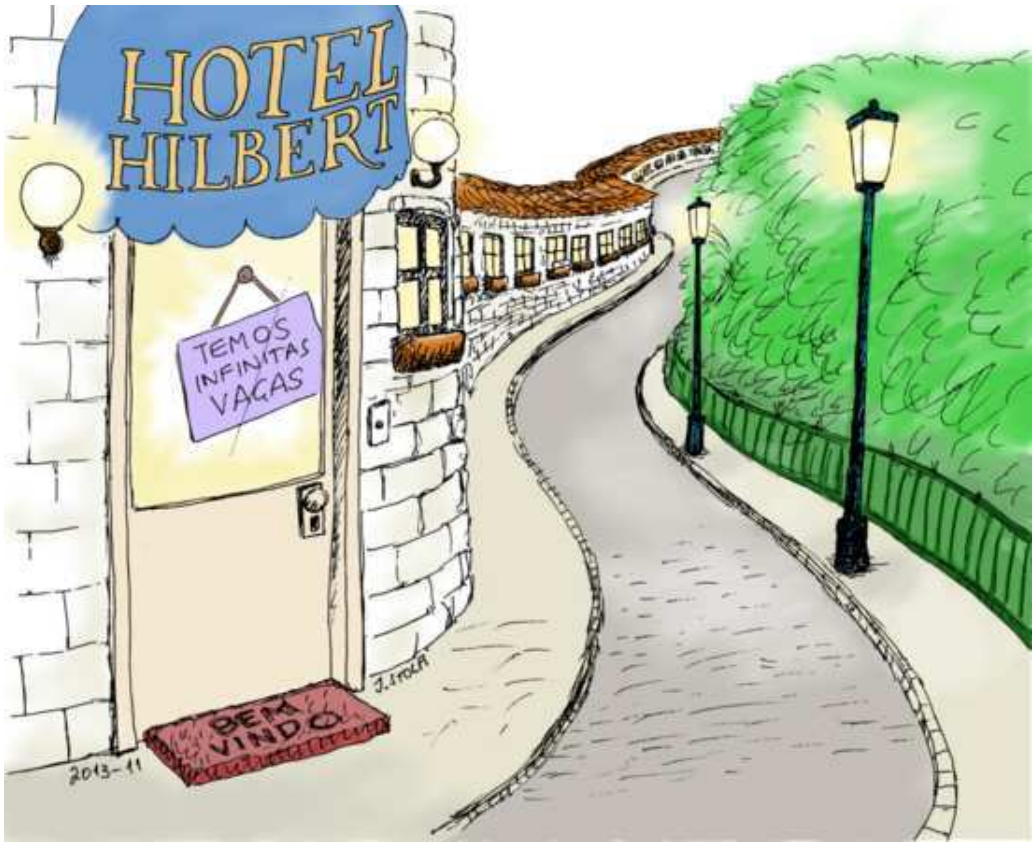
**Exercício 13.57:** Seja $G$ um grafo com pelo menos uma aresta. Prove que $G$ é um grafo bipartido se, e somente se, o número cromático de $G$ é dois.

**Exercício 13.58:** Seja $G$ um grafo planar com $n$ vértices. Prove, usando indução, que os vértices de $G$ podem ser pintados com 6 cores.

**Exercício 13.59:** Prove o teorema 13.17 usando indução no número de vértices do grafo.

# Capítulo 14

# Cardinalidade de conjuntos




No capítulo 2 definimos informalmente a cardinalidade de conjuntos finitos, mas só agora temos condições de dar uma definição mais precisa de cardinalidade, inclusive para conjuntos infinitos.

**Definição 14.1:** Sejam $A$ e $B$ dois conjuntos. Se existir uma função bijetora $f : A \to B$, então dizemos que $A$ e $B$ *tem a mesma cardinalidade*. Denotaremos este fato por $A \sim B$.

Pode-se provar que "$\sim$" é uma relação de equivalência. As classes de equivalência da relação "$\sim$" são chamadas de *cardinalidades* ou *números cardinais*. A cardinalidade de um conjunto $A$ é geralmente denotada por $|A|$ ou $\#A$. Portanto temos que $A \sim B$ se e somente se $|A| = |B|$.

**Exercício 14.1:** Prove que $\sim$ é uma relação de equivalência.

## 14.1 Conjuntos finitos

Para cada número natural $n$ definimos $I_n = \{i \in \mathbb{N} : i < n\}$. Por exemplo, $I_5 = \{0, 1, 2, 3, 4\}$. Um conjunto $A$ é dito *finito* se existe um número natural $n$ tal que $A \sim I_n$. Neste caso, dizemos que $n$ é o número de elementos de $A$.

É fácil ver que dois conjuntos finitos tem a mesma cardinalidade se e somente se eles tem o mesmo número de elementos. Portanto a cardinalidade de um conjunto finito pode ser identificada com seu número de elementos.

Observe que, de acordo com a definição, o conjunto vazio $\emptyset$ é finito e $|\emptyset| = 0$.

**Exercício 14.2:** Prove que

- para todo número natural $m$ e $n$, se $I_n \sim I_m$ então $m = n$.
  (Sugestão: use indução em n.)
- se $A$ é finito, então existe exatamente um número natural tal que $I_n \sim A$.

## 14.2 Conjuntos infinitos

Para certos conjuntos $A$, não existe uma bijeção de $A$ para $I_n$, para nenhum $n \in \mathbb{N}$. Exemplos incluem o próprio conjunto $\mathbb{N}$, bem como $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ e $\mathbb{R}$. Dizemos que estes conjuntos são *infinitos*.

Poderíamos supor que, como no caso dos conjuntos finitos, os subconjuntos próprios de um conjunto infinito $A$ tem cardinalidades estritamente menores que $|A|$. Porém, os exemplos abaixo mostram que isso não é verdade:

**Exemplo 14.1:** Seja $\mathbb{E} \subset \mathbb{N}$ o conjunto dos números naturais pares, $\{2k : k \in \mathbb{N}\}$. Considere a funçao $f : \mathbb{N} \to \mathbb{E}$ definida por $f(n) = 2n$. A função $f$ é uma bijeção do conjunto dos naturais no conjunto dos números pares. Portanto $\mathbb{N} \sim \mathbb{E}$ e portanto a cardinalidade de $\mathbb{N}$ é a mesma que $\mathbb{E}$.

Ou seja, é possível retirar elementos de um conjunto infinito sem alterar sua cardinalidade. Verifica-se que esta é uma propriedade geral de conjuntos infinitos. Inclusive, muitos autores usam esta propriedade como definição, dizendo que um conjunto $A$ é infinito se e somente se ele tem um subconjunto próprio $B$ tal que $A \sim B$.

O exemplo acima foi enunciado pelo matemático alemão David Hilbert (1862–1943) na forma de uma anedota: um hotel com infinitos quartos, todos ocupados, de repente recebe infinitos novos hóspedes, e precisa arrumar quartos para eles.

Dois outros exemplos importantes são os seguintes:

**Exemplo 14.2:** Considere a funçao $f : \mathbb{N} \to \mathbb{Z}$ definida por

$$f(n) = (-1)^n \left\lfloor \frac{n+1}{2} \right\rfloor = \begin{cases} k & \text{se } n \text{ é par } (n = 2k) \\ -(k+1) & \text{se } n \text{ é ímpar } (n = 2k+1) \end{cases} \tag{14.1}$$

A tabela abaixo ilustra a função $f$

| $n$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7... |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f(n)$ | 0 | −1 | 1 | −2 | 2 | −3 | 3 | −4... |

Esta função é uma bijeção de $\mathbb{N}$ para $\mathbb{Z}$, e portanto $\mathbb{N} \sim \mathbb{Z}$.

**Exemplo 14.3:** Considere a função $f : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ definida pela fórmula

$$f(u, v) = \frac{(u + v)(u + v + 1)}{2} + u \tag{14.2}$$

A tabela abaixo ilustra a função $f$. Ela associa a cada par $(u, v)$ um número natural na sequência, segundo diagonais sucessivas:

| | | $v$ | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | ... |
| | 0 | 0 | 1 | 3 | 6 | 10 | ... |
| | 1 | 2 | 4 | 7 | 11 | ... | |
| $u$ | 2 | 5 | 8 | 12 | ... | | |
| | 3 | 9 | 13 | ... | | | |
| | 4 | 14 | ... | | | | |
| | ⋮ | ⋮ | | | | | |

Verifica-se que esta função é uma bijeção de $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ para $\mathbb{N}$, e portanto $\mathbb{N} \times \mathbb{N} \sim \mathbb{N}$.

**Exemplo 14.4:** Considere a função $f : [0, 1] \to [1, 3]$ definida por $f(x) = 2x + 1$. Verifica-se que esta função é uma bijeção do intervalo $[0, 1]$ para o intervalo $[1, 3]$, e portanto concluímos que $[0, 1] \sim [1, 3]$. Por raciocínio análogo, podemos concluir que todos os intervalos fechados $[a, b]$ de números reais tem a mesma cardinalidade.

Podemos demonstrar também que

**Teorema 14.1:** Para todo inteiro positivo $n$, $\mathbb{N}^n \sim \mathbb{N}$ .

A demonstração pode ser feita por indução em $n$, usando a função $f$ do exemplo 14.3, e a bijeção $g$ entre os conjuntos $\mathbb{N}^n$ e $(\mathbb{N}^{n-1}) \times \mathbb{N}$, definida por

$$g((a_1, a_2, \ldots, a_n)) = ((a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}), a_n)$$

para toda ênupla $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ em $\mathbb{N}^n$.

**Exercício 14.3:** Demonstre o teorema 14.1.

Outro resultado importante é o seguinte:

**Teorema 14.2:** Seja $X$ um conjunto finito não vazio, e $X^*$ o conjunto de todas as sequências finitas de elementos de $X$, isto é $X^* = \cup_{k \in \mathbb{N}} X^k$. Então $X^* \sim \mathbb{N}$.

**Prova:**

Seja $m = |X|$. Note que $|X^n| = m^n$. Seja $f_n$ uma bijeção qualquer do conjunto $X^n$ para o conjunto $\{0, 1, \ldots, m^n - 1\}$. Considere a função $g : X^* \to \mathbb{N}$, definida por

$$g(x) = \left( \sum_{k=0}^{n-1} m^k \right) + f_n(x)$$

para todo $n \in \mathbb{N}$ e toda sequência $x \in X^n$. Em particular,

$$\begin{array}{lll}
\text{se } x \in X^0 & \text{então } g(x) = f_0(x) & = 0; \\
\text{se } x \in X^1 & \text{então } g(x) = 1 + f_1(x) & \in \{1, \ldots, 1 + (m-1)\}; \\
\text{se } x \in X^2 & \text{então } g(x) = 1 + m + f_2(x) & \in \left\{1 + m, \ldots, 1 + m + (m^2 - 1)\right\}; \\
\text{se } x \in X^3 & \text{então } g(x) = 1 + m + m^2 + f_3(x) & \in \left\{1 + m + m^2, \ldots, 1 + m + m^2 + (m^3 - 1)\right\};
\end{array}$$

e assim por diante. Pode-se ver que a função $g$ é uma bijeção de $X^*$ para $\mathbb{N}$, e portanto $X^* \sim \mathbb{N}$.

**Fim.**

Observe que este teorema não se aplica ao conjunto das sequências *infinitas* sobre um conjunto finito $X$. Um contra-exemplo será visto na seção 14.4.

## 14.3 Conjuntos enumeráveis e contáveis

Um conjunto é dito *enumerável* se ele tem a mesma cardinalidade dos números naturais. Dizemos que um conjunto é *contável* se ele é finito ou enumerável.

Observe que um conjunto $A$ é enumerável se, e somente se é possível listar os elementos do conjunto como uma sequência infinita $a_0, a_1, a_2, \ldots$; isto é, podemos indexá-los pelos números naturais.

**Exemplo 14.5:** O conjunto $\mathbb{N} \times \{i\}$, para qualquer $i \in \mathbb{N}$, é enumerável. Para provar esta afirmação, considere a função $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N} \times \{i\}$ tal que $f(j) = (j, i)$ para todo $j \in \mathbb{N}$, que é trivialmente bijetora.

**Exemplo 14.6:** Todo subconjunto $A$ de $\mathbb{N}$ é contável. Se $A$ é finito, ele é contável. Se $A$ não é finito, considere a função bijetora $f : A \to \mathbb{N}$ onde $f(a)$ é número de elementos de $A$ que são menores que $a$, para todo $a \in \mathbb{N}$.

**Exemplo 14.7:** Se $B$ é um conjunto contável, todo subconjunto $C \subseteq B$ é contável. Para provar este fato, considere uma bijeção $f$ de $\mathbb{N}$ para $B$. Seja $A$ o subconjunto $f^{-1}(C)$ de $\mathbb{N}$. Pelo exemplo 14.6, $A$ é contável. A restrição de $f$ a $A$ é uma bijeção de $A$ para $C$, e portanto $C$ também é contável.

**Exercício 14.4:** Prove que $\mathbb{Z} \times \mathbb{N}$ e $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ são enumeráveis.

Conjuntos contáveis podem ser combinados de diversas maneiras e ainda continuam contáveis. Pode-se provar que a união de dois conjuntos contáveis é um conjunto contável. Por indução, o mesmo vale para a união de qualquer número finito de conjuntos contáveis. Mais ainda:

**Teorema 14.3:** Seja $X$ um conjunto enumerável cujos elementos são conjuntos enumeráveis, disjuntos dois a dois. A união de todos os elementos de $X$ é enumerável.

**Prova:**

Como $X$ é enumerável, podemos indexar seus elementos com números naturais, $X_0$, $X_1$, .... Como cada conjunto $X_i$ é enumerável, podemos também indexar seus elementos com números naturais, $x_{i,0}$, $x_{i,1}$, ....

Seja então $Y$ a união de todos esses conjuntos, $Y = \cup_{i \in \mathbb{N}} X_i$, e considere a função $g : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to Y$ tal que $g(i, j) = x_{i,j}$ para quaisquer $i$ e $j$ em $\mathbb{N}$. Esta função é uma bijeção, pois para todo elemento $y$ de $Y$ existe um único $i$ tal que $y \in X_i$, e um único $j$ tal que $y = x_{i,j}$. Portanto $Y \sim \mathbb{N} \times \mathbb{N}$, ou seja $Y \sim \mathbb{N}$ pelo exemplo 14.3.

**Fim.**

Usando este resultado, pode-se provar que, se $X$ é um conjunto contável cujos elementos são conjuntos contáveis (não necessariamente disjuntos), a união de todos os elementos de $X$ é contável.

**Exercício 14.5:** Prove que o conjunto $\mathbb{Q}$ dos números racionais é contável. (Dica: todo número racional pode ser escrito de maneira única como uma fração $m/n$ onde $m$ é inteiro e $n$ é um inteiro positivo, relativamente primo com $m$.)

**Exercício 14.6:** Prove todo conjunto infinito tem um subconjunto enumerável.

**Exercício 14.7:** Prove que, se $A$ é infinito, então para qualquer $n \in \mathbb{N}$ existe um subconjunto de $A$ com cardinalidade $n$.

**Exercício 14.8:** Prove que um conjunto $A$ é contável se e somente se existe uma função de $\mathbb{N}$ para $A$ sobrejetora em $A$ (não necessariamente injetora).

**Exercício 14.9:** Seja $X$ um conjunto contável. Prove que, para todo número natural $n$, $X^n$ é um conjunto contável.

## 14.4 Cardinalidade dos números reais

Em vista dos exemplos acima, poderíamos ser levados a acreditar que todos os conjuntos infinitos têm a mesma cardinalidade, ou seja, que existe apenas um tipo de "infinito". Essa conjetura foi derrubada pelo matemático Georg Cantor em 1879, que mostrou que os conjuntos $\mathbb{N}$ e $\mathbb{R}$ tem cardinalidades diferentes. Este fato decorre do seguinte teorema:

**Teorema 14.4:** O intervalo aberto $(0, 1) = \{ x \in \mathbb{R} : 0 < x < 1 \}$ não é contável.

**Prova:**

O conjunto $(0, 1)$ não é finito, portanto precisamos demonstrar apenas que ele não é enumerável. Seja $f$ uma função qualquer de $\mathbb{N}$ para $(0, 1)$ Para cada número real $f(i)$, considere uma representação decimal infinita $a_i = 0, a_{i0}a_{i1}a_{i2}\ldots$ do mesmo. Temos então uma lista infinita de sequências infinitas de algarismos

$$\begin{array}{rcccl} f(0) & = & a_0 & = & 0, a_{00}a_{01}a_{02}\ldots \\ f(1) & = & a_1 & = & 0, a_{10}a_{11}a_{12}\ldots \\ f(2) & = & a_2 & = & 0, a_{20}a_{21}a_{22}\ldots \\ \vdots & & & & \end{array}$$

Observe que alguns números reais tem duas representações distintas deste tipo, uma delas terminando com uma sequência infinita de zeros, e a outra com uma sequência infinita de noves. Por exemplo, o número $1/4$ pode ser escrito como $0,250000\ldots$ ou $0,249999\ldots$. Isto ocorre se, e somente se, o número é uma fração da forma $m/10^n$, com $m$ e $n$ inteiros, $m \neq 0$ e $n \geq 0$. Se $f(i)$ é um destes números, escolhemos para $a_i$ qualquer das duas representações, arbitrariamente. Todos os outros números reais tem uma, e apenas uma, representação decimal.

Observe também que as sequências $0,000000\ldots$ e $0,999999\ldots$ representam os números 0 e 1, respectivamente, e portanto não estão no intervalo aberto $(0, 1)$. Porém, exceto por esses dois casos, toda representação decimal infinita que começa com $0,\ldots$ representa algum número real no intervalo $(0, 1)$.

Considere agora a representação decimal infinita $b = 0, b_0 b_1 b_2 \ldots$ onde

$$b_i = \begin{cases} 4 & \text{se } a_{ii} \neq 4 \\ 5 & \text{se } a_{ii} = 4 \end{cases}$$

A representação infinita $b$ não aparece na lista acima, pois ela difere de cada $a_i$ na posição $i$ depois da vírgula. Como $b$ usa apenas algarismos 4 e 5 depois da vírgula, o número real $b^*$ que ela representa não é nem 0 nem 1, e portanto está no intervalo aberto $(0, 1)$. Uma vez que $b$ não termina nem em infinitos zeros nem em infinitos noves, o número $b^*$ tem apenas essa representação, e portanto ele é diferente do número real $f(i)$, para todo $i$ em $\mathbb{N}$.

Concluímos que nenhuma função $f$ de $\mathbb{N}$ para $(0, 1)$ pode ser sobrejetora. Logo $(0, 1)$ não é enumerável.

**Fim.**

A técnica usada nesta demonstração para encontrar o contra exemplo $b^*$ é conhecida como *método da diagonalização* (ou *método da diagonalização de Cantor*). Este método é muito usado em lógica matemática e na teoria da computação.

Não é difícil encontrar uma bijeção entre o intervalo aberto $(0, 1)$ e o conjunto dos números reais $\mathbb{R}$ (Veja exercício 14.10). Portanto, em vista do teorema 14.4 a cardinalidade de $\mathbb{R}$ é estritamente maior que a cardinalidade de $\mathbb{N}$. Na verdade, pode-se demonstrar [14] que

$$|\mathbb{P}(\mathbb{N})| = |\mathbb{R}| \tag{14.3}$$

**Exercício 14.10:** Prove que $(0, 1) \sim \mathbb{R}$.

**Exercício 14.11:** Seja $\mathcal{F}$ o conjunto de todas as funções de $\mathbb{N}$ para o conjunto $\{1, 2\}$. Usando a técnica de diagonalização de Cantor, prove que o conjunto $\mathcal{F}$ não é enumerável.

## 14.5 Comparação de cardinalidades

Sejam $A$ e $C$ conjuntos. Definimos a relação $C$ *domina* $A$ e escrevemos $A \preceq C$ se existe um conjunto $B$ tal que $A \sim B$ e $B \subseteq C$. Em outras palavras, $A \preceq C$ se e somente se existe uma função injetora de $A$ para $C$.

**Exemplo 14.8:** Seja $\mathbb{C}$ o conjunto dos números primos, e $\mathbb{M}$ o conjunto dos quadrados perfeitos, $\left\{n^2 : n \in \mathbb{N}\right\}$. Observe que a função $f$ de $\mathbb{C}$ para $\mathbb{M}$ definida por $f(p) = p^2$ é uma função injetora. Portanto, concluímos que $\mathbb{C} \preceq \mathbb{M}$.

Em particular, para quaisquer conjuntos $A, B$ tais que $A \subseteq B$, a função identidade $I_A$ é uma função injetora de $A$ para $B$; portanto concluímos que $A \subseteq B$ implica $A \preceq B$. Em particular, $A \preceq A$ para qualquer conjunto $A$; ou seja, $\preceq$ é uma relação reflexiva. Prova-se também que, se $A \preceq B$ e $B \preceq C$, então $A \preceq C$; isto é, $\preceq$ é transitiva. (Veja exercício 14.12)

Finalmente, prova-se que, se $A \preceq B$ e $B \preceq A$, então $A \sim B$ (isto é, $A$ e $B$ tem a mesma cardinalidade). Porém, a demonstração deste fato (devida a Cantor, Schröder e Bernstein) [14] foge do escopo deste livro. Outro resultado cuja prova não cabe aqui é que, dados quaisquer dois conjuntos $A$ e $B$, pelo menos uma das condições $A \preceq B$ e $B \preceq A$ deve ser verdadeira.

Pode-se verificar também (veja exercício 14.13) que se $A \sim A'$, $B \sim B'$, e $A \preceq B$, então $A' \preceq B'$. Portanto a relação $\preceq$ entre conjuntos depende apenas de suas cardinalidades, e não dos conjuntos em si. Podemos então substituir $\preceq$ por uma relação entre cardinalidades. Em vista das propriedades acima, esta é uma relação de ordem total, que denotaremos por $\leq$. Ou seja, dizemos *a cardinalidade de A é menor ou igual à de C*, e escrevemos $|A| \leq |B|$, se e somente se $A \preceq B$.

Se $|A| \leq |B|$, mas $|A| \neq |B|$, dizemos que a cardinalidade de $A$ é estritamente menor que a cardinalidade de $B$, e denotamos esse fato por $|A| < |B|$.

Para conjuntos finitos, a relação de ordem $\leq$ entre cardinalidades coincide com a relação $\leq$ entre números naturais. É fácil ver também que a cardinalidade de um conjunto finito é sempre maior que a cardinalidade de qualquer subconjunto próprio. Ou seja, para qualquer conjunto finito $A$ e qualquer conjunto $B$, temos $B \subset A \rightarrow |B| < |A|$.

**Exercício 14.12:** Prove que, se $A \preceq B$ e $B \preceq C$, então $A \preceq C$.

**Exercício 14.13:** Prove que se $A \sim A'$, $B \sim B'$ e $A \preceq B$, então $A' \preceq B'$.

### 14.5.1 Teorema de Cantor

Cantor mostrou também o seguinte resultado importante:

**Teorema 14.5:** Para todo conjunto $A$, $|A| < |\mathbb{P}(A)|$.

Dito de outra forma, todo conjunto — finito ou infinito — tem mais subconjuntos do que elementos. Este resultado é óbvio para conjuntos finitos, pois se $|A| = n$ então $|\mathbb{P}(A)| = 2^n$ (vide seção 2.8) e $2^n > n$ para todo natural $n$. A contribuição de Cantor foi mostrar que o resultado vale também para conjuntos infinitos.

**Prova:**

Sejam $A$ um conjunto e $f$ uma função qualquer de $A$ para $\mathbb{P}(A)$, ou seja, uma função $f$ que a cada elemento $a \in A$ associa um subconjunto $f(a) \subseteq A$. Vamos mostrar que $f$ não pode ser uma bijeção de $A$ para $\mathbb{P}(A)$.

Observe que o elemento $a$ pode pertencer ou não ao subconjunto $f(a)$. Considere agora o seguinte conjunto:

$$X = \{\, a \in A : a \notin f(a) \,\}$$

Observe que $X$ é um subconjunto de $A$, logo $X \in \mathbb{P}(A)$. Porém, para todo $a \in A$, temos $f(a) \neq X$, pois se $a \in f(a)$ então $a \notin X$, e se $a \notin f(a)$ então $a \in X$. Portanto $f$ não é sobrejetora em $\mathbb{P}(A)$.

Concluímos que, para qualquer conjunto $A$, não existe nenhuma bijeção de $A$ para $\mathbb{P}(A)$; ou seja, estes dois conjuntos não tem a mesma cardinalidade.

Por outro lado, observe que existe uma bijeção de qualquer conjunto $A$ para o conjunto $A' = \{ \{a\} : a \in A \}$, que é um subconjunto de $\mathbb{P}(A)$. Isto mostra que $|A| \leq |\mathbb{P}(A)|$. Juntando estes dois resultados, concluímos que $|A| < |\mathbb{P}(A)|$.

**Fim.**

Em particular, a cardinalidade de $\mathbb{P}(\mathbb{N})$ é estritamente maior que a de $\mathbb{N}$.

### 14.5.2 A hipótese do contínuo

Depois de mostrar que $|\mathbb{P}(\mathbb{N})| = |\mathbb{R}|$, Cantor conjecturou em 1878 que não é possível definir um conjunto com cardinalidade entre $|\mathbb{N}|$ e $|\mathbb{R}|$ — isto é, estritamente maior que $\mathbb{N}$ mas estritamente menor que $\mathbb{R}$. Esta conjetura ficou conhecida como a *hipótese do contínuo*, e ficou aberta até 1963, quando Paul Cohen (baseado em um teorema provado por Kurt Gödel em 1939) mostrou que, com os axiomas usuais da teoria dos conjuntos, não é possível demonstrar nem essa afirmação nem sua negação. Ou seja, pode-se supor que tais conjuntos existem, ou que não existem — e, nos dois casos, nunca se chegará a uma contradição.

## 14.6 Cardinalidade e Computabilidade

Os conceitos de cardinalidade de conjuntos infinitos permitem responder a questão: "toda função pode ser computada?". Para isto observamos que qualquer programa de computador, em qualquer linguagem, pode ser visto como uma sequência finita de caracteres, tirados de um conjunto finito de caracteres válidos. Então, pelo teorema 14.2,

**Teorema 14.6:** O conjunto de todos os programas em uma dada linguagem de programação é contável.

Por outro lado, temos também o seguinte fato:

**Teorema 14.7:** O conjunto $\mathcal{F}$ de todas as funções de $\mathbb{N}$ para $\mathbb{N}$ não é enumerável.

**Prova:**

Seja $S$ o intervalo $(0, 1) = \{ x \in \mathbb{R} : 0 < x < 1 \}$. Como visto na demonstração do teorema 14.4, todo número $a$ nesse conjunto pode ser representado na notação decimal por uma sequência infinita $0.a_1a_2 \ldots a_n \ldots$ onde cada $a_i$ é um algarismo (um inteiro) entre 0 e 9. Seja $f$ a função com domínio $S$ definida da seguinte maneira: para cada $a \in S$, $f(a)$ é a função de $\mathbb{N}$ para $\mathbb{N}$ que associa cada natural $n$ com o dígito $a_n$ de $a$. Note que $f(a)$ é um elemento de $\mathcal{F}$.

A função $f$ é injetora; pois, se $f(x) = f(y)$, cada dígito decimal de $x$ é igual ao dígito decimal correspondente de $y$, portanto $x = y$. Portanto $f$ é uma bijeção entre $S$ e o conjunto $\mathcal{G} = \text{Img}(f) \subset \mathcal{F}$.

Pelo teorema 14.4, $S$ não é enumerável. Concluímos que $\mathcal{F}$ tem um subconjunto que não é enumerável. Portanto pelo exercício 14.7, $\mathcal{F}$ não é enumerável.

**Fim.**

Diz-se que uma função $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ é *computável* em uma dada linguagem se existe um programa nessa linguagem que, para todo $x \in \mathbb{N}$, devolve $f(x)$ quando seu dado de entrada é $x$.

Seja $C$ o conjunto de todas as funções computáveis de uma dada linguagem. O teorema 14.6 mostra que $|C| \leq |\mathbb{N}|$. Por outro lado o teorema 14.7 mostra que $|\mathcal{F}| > |\mathbb{N}|$. Logo, concluímos que existem funções de $\mathbb{N}$ para $\mathbb{N}$ que não são computáveis.

# Referências Bibliográficas


[1] Béla Bollobás. *Modern Graph Theory*. Springer, 1998.

[2] J. A. Bondy and U. S. R. Murty. *Graph Theory with Applications*. MacMillan, London, 1976.

[3] J. A. Bondy and U. S. R. Murty. *Graph Theory*. Springer, 2008.

[4] Thomas H. Cormen, Charles E. Leiserson, and Ronald L. Rivest. *Introduction to Algorithms*. MIT Press, 1989.

[5] Ronald L. Graham, Donald E. Knuth, and Oren Patashnik. *Matemática Concreta: Fundamentos para Ciência da Computação*. LTC, 1995. Segunda edição.

[6] Paul R. Halmos. *Teoria Ingênua dos Conjuntos*. Editora da USP, 1960.

[7] Frank Harary. *Graph Theory*. Addison Wesley, 1972.

[8] John M. Harris, Jeffry L. Hirst, and Michael J. Mossinghoff. *Combinatorics and Graph Theory*. Springer, 2000.

[9] Thomas L. Heath. *The Thirteen Books of Euclid's Elements*. Dover, 1956. Segunda edição.

[10] David C. Kurtz. *Foudations of Abstract Mathematics*. McGraw-Hill, 1992.

[11] Luiz Henrique Jacy Monteiro. *Elementos de Álgebra*. Ao Livro Técnico, 1969.

[12] Kenneth H. Rosen. *Discrete Mathematics and Its Applications*. McGraw-Hill, 2003. Quinta edição.

[13] J. Plínio O. Santos, Margarida P. Mello, and Idani T. C. Murari. *Introdução à Análise Combinatória*. Editora da UNICAMP, 1995.

[14] Daniel J. Velleman. *How to Prove It: A Structured Approach*. Cambridge University Press, 2006. Segunda edição.

# Índice Remissivo


pi
    algarismos, 29
*n*-upla, *veja* ênupla
água, 231
álgebra, 17
    de Boole, 36
árvore, *veja* grafo árvore
óctupla, *veja* ênupla
órbita, *veja* função permutação, ciclo
índice
    de somatória, *veja* somatória, índice
ângulo
    interno, 80
ênupla, 26, *veja* sequência finita
    definição, 26
    elementos, 26

absurdo, *veja* demonstração,implicação por absurdo
Ackermann
    Wilhelm, 161
Al-Khowarizmi, 17
algarismo, 123, 186
algoritmo
    de Euclides, 17
    demonstração, 15
    geométrico, 15
alunos, 183
ambiguidade, 31, 35, 60
amigo, 52
análise de algoritmos, 17
antecedente, 33
Appel, Kenneth, 61
Appel, Kenneth Ira, 236
Argentina, 30
Aristóteles, 15
arquivo, 116
Arranjo
    circular, 180
    com elementos indistinguíveis, 181
arranjo, 174–175
    contagem, *veja* contagem de arranjos
    de letras, 174
    definição, 174
    e permutação, 175
arroz, 31
Artur, Rei da Inglaterra, 228
associatividade, 41
    da diferença simétrica, 24
    da intersecção, 23
    da união, 23
auto-referência, *veja* proposição auto-referente
axioma, 15, 19, 59, 60
    da aritmética, 76
    de Euclides, 16
    do contínuo, 246

balança, 84, 88
banana, 51, 52, 54, 120
banco de dados, 208
bancos de dados, 112
bandeira, 172
baralho, 169, 176, 182, 184, 185, 204
base neperiana ($e$), 158
bateria, 35
Bayes, Thomas, 201
Bernoulli, Jacob, 83
Bernstein, Felix, 245
bijeção, *veja* função bijetora, 239–247
binômio de Newton, 177
bipartição, 226
bit, 121, 123, 203
    contagem de cadeias, 176
    definição, 204

bloco
de partição, 25
boi, 53
bola, 78, 201
branco, 32
Brasília, 30, 33
Brasil, 29, 30
byte, 203

C (linguagem), 141
cálculo
de predicados, 17, 50
proposicional, 29–47
código genético, 204
círculo, 16, 94, 95
cadeia, *veja* sequência finita
caixa, 116, 117, 201
jeitos de tampar, 136
rotulada, 135
Cantor, Georg, 19
Cantor, Georg Ferdinand Ludwig Philipp, 243, 245, 246
capacidade de armzenamento, *veja* informação, capacidade
capacidade de informação, *veja* informação, capacidade
cardinalidade, *veja* conjunto, 239–247
comparação, 244
contável, 242–243
da união, 185, 242
das sequências finitas, 241
de conjunto finito, 240
de conjunto infinito, 240, 243
de conjuntos finitos, 245
de subconjunto, 242, 243
de subconjuntos, 245
definição, 239
do produto cartesiano, 241, 242
dos inteiros, 240
dos números naturais, 242–243, 246
dos números reais, 241, 243–244, 246
dos pares de inteiros, 242, 243
dos pares de naturais, 241
dos racionais, 243
e computabilidade, 246–247
igualdade, 239
menor, 245
menor ou igual ($\leq$), 244
carro, 171
casa, 32, 33
casas, 31
cavalo, 81, 231
celular, 32
{} (chaves), 20
Chebyshev, *veja* Tchebychev
cheque, 35
ciclo, *veja* função permutação, ciclo
circuito
digital, 208
elétrico, 208
classe
de equivalência, 124–127, 221
representante, 125
de isomorfismo, 221
coeficiente binomial, *veja* combinação
casos especiais, 176
definição, 175
coeficiente multinomial, *veja* combinação múltipla
cofre, 230
Cohen, Paul, 246
Cole, Frank Nelson, 61
coloração, *veja* grafo, coloração
combinação, 175–181
algoritmo, 178
casos especiais, 176
com repetições, *veja* partição rotulada, contagem, *veja* combinação múltipla
contagem, 175
de letras, 175
de respostas em prova, 178
definição, 175
e arranjo, 175
fórmula de Leibniz, 182
fórmula de Newton, 177
fórmula recursiva, 178
identidade de Pascal, 177
múltipla, 182–183
notação, 175
propriedades, 176
simetria, 176

somatória, 178
triângulo de Pascal, 177
complemento, *veja* conjunto, complemento
composição
de relações, *veja* relação, composição
comutatividade, 40
da diferença simétrica, 24
da intersecção, 23
da união, 23
conclusão, 33
condição
necessária, 33
suficiente, 33
conectivo lógico, *veja* operador lógico
em linguagem natural, 31
conetivo lógico, *veja* operador lógico
conjectura, *veja* conjetura
conjetura, 61
aberta, 61
das quatro cores, 61
de Fermat, 61
de Goldbach, 61
de Mersenne, 61
refutação, 73
refutada, 61
conjunção, *veja* operador conjunção
conjunto
cardinalidade, 21, 22, 28, 84, *veja* cardinalidade
complemento, 22, 24, 182
contável, 242–243
continência, 63, 68
de conjuntos, 25
de sequências, 117
definição, 19
diferença, 25, 68
diferença (\), 22
diferença simétrica (△), 22, 24
disjunto, 22, 25
dos subconjuntos, *veja* conjunto potência
enumerável, 242–243
finito, 21, 240
igualdade, 21
infinito, 21, 240
interseção (∩), 22
intersecção, 23–24, 68
leis de De Morgan, 24
notação, 20
operação, 22–24, 27
ordenado, 115, 121
parcialmente, 118
totalmente, 117
parcialmente ordenado, 118
partição, 25, 226
por propriedade, 20
potência, 22, 84, 115, 124, 245
cardinalidade, 25
igualdade, 25
potência ($\mathbb{P}(A)$)
definição, 25
totalmente ordenado, 117
união, 23–24, 68
união (∪), 22
universal, 24, 57, 158
universal ($\mathcal{U}$), 22
vazio, 21, 24, 69, 101, 158
cardinalidade, 21
como elemento, 25
inclusão, 21
partição, 25
potência, 25
vs. sequência, 141
consequência, 33
consequência lógica, 43
$\not\supset$ (não estr. contém), *veja* inclusão
$\not\supseteq$ (não contém), *veja* inclusão
$\subseteq$ (contido), 19
$\supset$ (estr. contém), *veja* inclusão
$\supseteq$ (contém), *veja* inclusão
Contagem
por divisão, 181
contagem, 169–186
arranjos, 175
bijeções, 173
cadeias de bits, 176
combinações, 175
de funções, 171–172
de relações, 170
anti-simétricas, 170
irreflexivas, 170

reflexivas, 170
simétricas, 170
funções
bijetoras, 173
funções sobrejetoras, 175
ordens, 169
permutações, 173–174
união, 185
$\not\subset$ (não estr. contido), *veja* inclusão
$\not\subseteq$ (não contido), *veja* inclusão
$\subset$ (estr. contido), *veja* inclusão
$\subseteq$ (contido), *veja* inclusão
contra-exemplo, 73, 74
contradição, 39, 40, 50
contrapositiva
de implicação, *veja* proposição contrapositiva
copos, 170
cor, 81
cores, 182, *veja* grafo, coloração de faces
corolário, 60
correio, 35, 80
criança, 179
criptografia digital, 17
cubo, 81, 231
cubo perfeito, 71

dado de jogar, 190–192, 195, 201, 203–205
de equivalência, 68
De Morgan, *veja* conjunto, leis de
De Morgan, Augustus, 24, 41, 236
definição, 60
circular, 20
contraditória, 20
definição, 60
recursiva, 117
demonstração, 17, 59–74
construtiva, 70–71, 73
de conjunção, 65
de disjunção, 64
de equivalência, 67–68
de existência e unicidade, 73
de falsidade, 73
de implicação, 62–66
contrapositiva, 64
direta, 62, 65
hipótese disjuntiva, *veja* demonstração por casos
tese conjuntiva, 65
de quantificador existencial, 68, 70–74
de quantificador universal, 64, 66, 68
de unicidade, 73
direta, 63
estratégia, *veja* demonstração, método
existência e unicidade, 72–73
indireta, *veja* prova,implicação por absurdo
método, 61–74
não construtiva, 72
por absurdo, 64, *veja* demonstração,implicação por absurdo, 72
por casos, 65, 66
por computador, 236
por contra-exemplo, 73–74
por contradição, *veja* demonstração,implicação por absurdo
por exemplo, 70
por partes, 65
por vacuidade, 69
quantificador universal, 69–70
técnica, *veja* prova, método
desarranjo, 135
desigualdade
de Bernoulli, 83
dia da semana, 137
diagonal, 80
diagonalização, 241, 243–244
diagrama
de Hasse, 119, 120, 122, 123
de Venn, 23, 24, 27, 68
dicionário, 117, 121
diferença, *veja* conjunto, diferença
de grafos, *veja* grafo, subgrafo, diferença
$\setminus$, *veja* conjunto, diferença
diferença simétrica, *veja* conjunto, diferença simétrica
$\triangle$, *veja* conjunto, diferença simétrica
digitos, 184, 186
dinheiro, 81
Dirichlet, Johann Peter Gustav Lejeune, 84
disco, 110
disjunção, *veja* operador disjunção

exclusiva, 49
disjunção exclusiva
operador, *veja* operador disjunção exclusiva
distributividade, 41
da intersecção, 24
da união, 24
divisão
do plano
por círculos, 162
divisibilidade, 65, 66, 209
divisor, 60, 70
comum, 17
definição, 60
DNA, 204
doce, 179
dodecaedro, 229, 231
domínio, *veja* relação, domínio
de quantificador, 48
mudança, 53–54
omissão, 56
universal, 56
dominó, 165
domingo, 52
dualidade lógica, 46–47

*e*, *veja* base neperiana
eleição, 37
elemento
definição, 19
máximo, *veja* máximo
mínimo, *veja* mínimo
neutro, 40, 158
elemento maximal, *veja* maximal
elemento minimal, *veja* minimal
encomenda, 35
entropia, 205, 206
como medida de uniformidade, 206
máxima, 206
nula, 206
equivalência, 68, *veja* relação de equivalência
de operadores, 46
lógica, 39–44
operador, *veja* operador equivalência
equivalência lógica, 42, 43, 47, 50, 127
escopo
de quantificador, 56
esfera, 110
esgoto, 231
estado
de um sistema, *veja* informação, capacidade
estatística, 17
estrutura de programa, 208
estudante, 50–52
Euclides, 16, 17, 72
Euler, Leonhard, 208
exponencial, 158

fórmula
de Bayes, *veja* inferência bayesiana
de Euler, 232
de Pólya, 222
de Tchebychev, *veja* variável aleatória, teorema de Tchebychev
fórmula de Stirling, 174
fatorial, 78, 138–139, 157, 158, 167, 173
aproximação, 174
crescimento, 173
! (fatorial), 138
fechadura, 230
fecho, 109
geral, 108
reflexivo, 105, 109
simétrico, 106, 109
transitivo, 106, 109
feijão, 31
Fermat, Pierre de, 61
forma normal
conjuntiva, 45–46
disjuntiva, 45–46
FORTRAN, 141
Fourier, Joseph, 143
função, 129–142
bijetora, 134–135, *veja* permutação, 146, 220
característica, 139
chão, *veja* função piso
classes de equivalência, 130
composição, 132–173
contagem, *veja* contagem de funções
contra-domínio, *veja* função, imagem
de Ackermann, 161

definição, 129
definição alternativa, 130
domínio, 130–133
elemento fixo, 135
expressões lógicas, 134
gama, 138
idempotente, 133
igualdade, 130
imagem, 130, 132, 133
de conjunto, 131
imagem inversa
de conjunto, 131
injetora, 133–134, 244
injetora , 134
intersecção, 131, 134
inversa, 131, 134, 135
involução, 136
logaritmo, 133
notação (→), 129
permutação, *veja* permutação, 173
ciclo, 136
fecho reflexivo, 136
fecho transitivo, 136
involução, *veja* função, involução
potência, 136
relação de equivalência, 136
piso ($\lfloor\cdot\rfloor$), 137
potência, 133
potência de, 133
projeção, 133
quadrado, 130
quantificadores, 134
raiz quadrada, 133
relação, 134
relação de equivalência, 130
restrição, 131, 134
seno, 130
sobre, *veja* função sobrejetora
sobrejetora, 134–135, 243
contagem, 175
solo, *veja* função piso
teto ($\lceil\cdot\rceil$), 137

Gödel, Kurt, 246
Γ (função gama), 138

generalização
existencial, 70
universal, 69
geometria, 15–17
Goldbach, Christian, 61
gorila, 52
grafo, 207–237
$k$-coloração, 237
$n$-cubo, 231
árvore, 224, 225, 232
definição, 224
número de arestas, 225
acíclico, 215, 224
adjacência
matriz, *veja* grafo, matriz de adjacência
arco, *veja* grafo, aresta
aresta, 207, 209
antiparalela, 210
de corte, 223
destino, 209
direção, 209
extremos, 209
laço, 210
múltipla, 210, 219
orientação, 209
origem, 209
paralela, 210, 219
ponte, 224
automorfismo, 220
bipartido, 226, 230, 231
caracterização, 226
coloração, 237
completo, 226, 231, 235, 237
conexo, 234
definição, 226
caminho, 214, 215, 224
comprimento, 226
hamiltoniano, 230
orientado, 223
ciclo, *veja* grafo, circuito
circuito, 215, 223, 229, 232, 234, 237
hamiltoniano, 229
coloração, 236–237
de faces, 236
de vértices, 237

complementar, 218
complemento, *veja* grafo complementar
completo, 213, 228, 230, 234, 235
  coloração, 237
componente, 222–224
  fechamento, 222
  fortemente conexa, 223
componentes conexas, 225
conexidade, *veja* grafo conexo
conexo, 222–224, 234
  definição, 222
  fortemente, 223
  fracamente, 224
contagem, 222
convenções do livro, 209
de Hamilton, *veja* grafo hamiltoniano
de Petersen, 234
definição, 209–211
  informal, 207
desconexo, 223
  totalmente, 223
desenho, 207–209, 227, 231
diferença, 223
dual, 235, 237
em computação, 208
euleriano, 226–228, 230, 231
  definição, 226
face, 232, 235
  externa, 232
finito, 210
fortemente conexo, *veja* grafo conexo, fortemente
fracamente conexo, *veja* grafo conexo, fracamente
função
  de incidência, 209
grafo-circuito, 225
grau do vértice, 225
hamiltoniano, 228–231
  definição, 229
  teste, 230
incidência, 211
  matriz, *veja* grafo, matriz de incidência
induzido
  por vértices, 223
infinito, 210
isomorfismo, 219–222, 226, 234
  algoritmo, 220
  definição, 220
  motivação, 219
laço, 210, 211
matriz
  de adjacência, 218
  de entrada, 219
  de incidência, 219
  de saída, 219
número cromático, 237
  limitantes, 237
não orientado, 213
não rotulado, 221
  contagem, 222
  enumeração, 221
nulo, 210
orientado, 209, 213
passeio, 214
  atravessa, 214
  comprimento, 214
  concatenação, 214, 215
  fechado, 215
  início, 214
  inverso, 214
  orientado, 215
  passa por, 214
  término, 214
  trivial, 214, 215
  vértice interno, 214
  visita, 214
percurso, 214–215
planar, 231–236
  coloração, 237
  definição, 231
  dual, *veja* grafo dual
  número de arestas, 233
regular, 213, 215, 226
relação
  de adjacência, 211
  de chegada, 211
  de dominância, 211
  de incidência, *veja* grafo, incidência
  de saída, 211

representação
planar, *veja* grafo,desenho
representação matricial, 218–219
rotulado, 221
contagem, 222
enumeração, 221
sem arestas, 210
sequência
de graus, 213
simples, 210, 213, 224
subdivisão, 234
subgrafo, 216, 222, 225, 234, 235
diferença, 218
espalhado, 216
gerador, 216
intersecção, 217
união, 217, 223
tour
de Euler, *veja* grafo, tour euleriano
euleriano, 226, 228
trilha, 214, 215
de Euler, *veja* grafo, trilha euleriana
euleriana, 226
vértice, 207, 209
adjacente, 211
atinge, 211
conectado, *veja* grafo, vértice ligado, 223
domina, 211
grau, 211, 215, 230
ligado, 222, 223
vizinho, 211
vazio, 223
Guthrie, Francis, 61, 236

hacker, 201
Haken, Wolfgang, 61, 236
Hamilton, William Rowland, 229
Hasse, Helmut, 119
Hilbert, David, 240
hipótese, 33
do contínuo, 246
hotel, 240

icosaedro, 231
idempotência
da intersecção, 24
da união, 24
igualdade
de funções, 130
de sequências, 140
imagem, *veja* relação, contradomínio
de conjunto
por função, *veja* função, imagem de conjunto
inversa, *veja* relação, imagem inversa
implica, *veja* operador implica
implicação, *veja* operador implicação
lógica, 43–44
implicação lógica, 43, 50
inclusão
de conjuntos, 19
definição, 21
estrita
definição, 21
notação ($\subset, \supset$), 21
notação ($\subseteq, \supseteq$), 21
inclusão e exclusão, 185
indução, 20, 75–92, 178, 186
ao contrário, 82
base genérica, 79
boa ordenação, 89–90
completa, 85–91
conjunto, 81
definição, 76
desigualdade, 79, 81
equivalência das formas, 89–91
forte, *veja* indução completa
incorreta, 81–83, 88
motivação, 75
passo genérico, 80
por conjuntos, 78
troca de variável no passo, 80
variações, 78–81
indução completa
base genérica, 86
inferência bayesiana, 201–203
antecedente, 202
consequente, 202
fórmula, 201
interpretação, 203

preconceito, 203
probabilidade
a posteriori, 202, 203
a priori, 202, 203
infinito
como limitante, 27
inflação, 30
informação, 203–206
capacidade, 203–204
*versus* quantidade, 205
aditividade, 204
de sistema físico, 203
de sistemas independentes, 204
quantidade, 203, 205
*versus* capacidade, 205
definição, 205
esperada, *veja* entropia
injeção, *veja* função injetora
instanciação
existencial, 70
universal, 69
integral, 153, 155
inteiro
ímpar, 20, 63, 64, 67, 69, 116
definição, 60
congruência, 124
múltiplo, 123, 124
par, 61–64, 69, 73, 94, 95, 116, 121
definição, 60
pitagórico, *veja* tripla pitagórica
primo, *veja* primo
internet, 208, 231
interseção, *veja* conjunto
∩, *veja* conjunto, interseção
intersecção
de grafos, *veja* grafo, subgrafo, intersecção
intervalo
de números reais, 27
inversa
de implicação, *veja* proposição inversa
de relação, *veja* relação inversa
involução, *veja* função, involução
iteração
de conjunção, 158
de disjunção, 158
de disjunção exclusiva, 158
de intersecção, 158
de operação associativa, 158
de união, 158
vazia, 158

Java (linguagem), 141
jogo, 229
jogos de azar, 188

Königsberg, 208, 210, 226
Kempe, Alfred Bray, 236
Knuth
Donald Erwin, 175
Kuratowski, Kasimierz, 234

lógica, 15, 17–18, 29–57, 59–74
clássica, 17
de predicados, 47–57
proposicional, *veja* cálculo proposicional
relação com probabilidade, 192
lâmpada, 191, 205
ladrão, 230
Laplace, Pierre-Simon, 201
laptop, 32
laranja, 171, 176
lei
da adição, 43
da associatividade, 41
da comutatividade, 40
da contrapositiva, 41
da distributividade, 41
da dominação, 40
da idempotência, 40
da identidade, 40
da implicação, 41
da redução ao absurdo, 41, 44
da simplificação, 43
de De Morgan, 41, 51
do modus ponens, 43
do modus tollens, 43
silogismo disjuntivo, 43
silogismo hipotético, 43
Leibniz, Gottfried Wilhelm, 182
leis de absorção, 42
lema, 60

letra, 209
limitante
de somatória, *veja* somatória, majoração
inferior
de sequência, 167
superior
de sequência, 166
linguagem natural
interpretação, 51–53
lista, *veja* sequência finita
logaritmo, 150, 154–158
como função, *veja* função logaritmo
Londres, 29
Lucas, Edouard, 61

máximo, 120–121, 123
de dois números, 66
divisor comum, 17
média
aritmética, 64, 68, 167
geométrica, 167
métodos de demonstração, *veja* demonstração, método
módulo
um inteiro, *veja* inteiro, congruência
uma relação, 124
múltiplo, 60, 65, 70
definição, 60
mínimo, 120–121, 123
de dois números, 66
mãe, 52
maçã, 171, 176
macaco, 29, 51, 54
majoração
de somatória, *veja* somatória, majoração
malha viária, 208
malote, 35
mamífero, 15, 29
mapa, 236
matriz
booleana, 103
composição, 103
conjunção, 104
disjunção, 104
intersecção, 104
produto, 103
união, 104
de relação, 103
quadrada, 73
maximal, 122–123
meninos e meninas, 174
Mersenne, Marin, 61
mesa
redonda, 165
minimal, 122–123
minoração
de somatória, *veja* somatória, majoração
modus ponens, 43, *veja* lei do modus ponens
modus tollens, *veja* lei do modus tollens
moeda, 190, 193, 203, 204
falsa, 84, 88
Moivre, Abraham de, 174
molécula, 208
montanha russa, 174
Montevidéu, 30
morcego, 15, 29
Morgan, *veja* De Morgan
mostrador de quilometragem, 204
multiconjunto, 139–140, 180
multiplicidade, *veja* multiconjunto

$\mathbb{N}$ (números naturais), *veja* número natural
número
ímpar, *veja* inteiro ímpar, 82, 88
de Fibonacci, 160
definição, 88
fórmula, 88
limite superior, 88
operações, 88
potência, 88
produto, 88
somatória, 88
de fibonacci, 163
de Mersenne, 61
divisor, 78
em binário, 88
harmônico, 150, 151, 154, 156
impar
de zeros, 162
inteiro, 64, 88, 240

conjunto ($\mathbb{Z}$), 20
partição, 25
irracional, 64, 72, 73
natural, 76, 240
conjunto ($\mathbb{N}$), 20
par, *veja* inteiro par, 88, 240
pitagórico, *veja* tripla pitagórica
primo, *veja* primo, 86, 88, 159
racional, 63, 64, 126
conjunto ($\mathbb{Q}$), 20
real, 73
conjunto ($\mathbb{R}$), 20
partição, 28
número par, 33
número primo, 17
números
cubos, 186
divisibilidade, 185, 186
quadrados, 186
negação, *veja* operador negação, 53, 56
de quantificador, 50
negação dupla, 40
Newton, Isaac, 177
nome, 172
nota, 81
notação decimal, 123
nucleotídeo, 204

octaedro, 204, 231
odômetro, 204
operação
aritmética, 17
operador
associativo, 36, 41
bicondicional, *veja* operador equivalência
comutativo, 40
condicional, *veja* operador implicação
conjunção, 65
em probabilidade, 190
conjunção (“e”, $\wedge$), 31–32, 35–44, 46, 47
de implicação, 101
diferença, 63
de grafos, *veja* grafo, subgrafo, diferença
disjunção, 65
em probabilidade, 189, 190
disjunção (“ou”, $\vee$), 32, 34–44, 46, 47
disjunção exclusiva, 49
em probabilidade, 189
disjunção exclusiva ($\leftrightarrow$), 35
disjunção exclusiva ($\oplus$), 35–42, 44, 47
disjunção exclusiva (“ou exclusivo”, $\oplus$), 41
distributivo, 41
dual ($\otimes$), 47
elemento neutro, *veja* elemento neutro
equivalência, 60, 68
equivalência ($\leftrightarrow$), 34–35
equivalência (“se e somente se”, $\leftrightarrow$), 41
equivalência (“sse”, $\leftrightarrow$), 35, 36, 38–42, 44, 47
genérico ($\odot$), 47
idempotência, 40
implica (“se”, $\rightarrow$), 33–44, 47
implicação
prova, *veja* prova de implicação
intersecção, 63
de grafos, *veja* grafo, subgrafo, intersecção
lógico, 30–36
não-e (“nand”, $\bar{\wedge}$), 38, 47
não-e (“nor”, $\bar{\wedge}$), 42
não-ou (“nor”, $\bar{\vee}$), 38, 42, 47
negação
em probabilidade, 189
negação (“não”, $\neg$), 32, 34, 35, 37–39, 41–44, 47
precedência, 35–36
união, 63
de grafos, *veja* grafo, subgrafo, união
ordenação, 135

Péter
Rózsa, 161
Pólya, George, 82, 222
palavra, *veja* sequência finita, 209
papagaio, 54
par ordenado, 116, 141
definição, 26
Paradoxo
de Russel, 20
do Barbeiro, 20
paradoxo

do barbeiro, 37
do hotel infinito, 240
dos cavalos, 81
parafuso, 190, 191, 198
parte
de partição, 25
partição, 146
de conjunto, *veja* conjunto, partição
de um conjunto, 125–127
rotulada, 179–180
Pascal, Blaise, 177
PBO, *veja* indução, boa ordenação
Peano, Giuseppe, 76
pentágono
construção, 15
perfeito, 52
Permutação
circular, 180
com elementos indistinguíveis, 181
permutação, 111, 135–136, 172–174
com casal, 173
composição, 135, 136
das faces de um dado, 136
de letras, 172
de termos em somatória, 146
definição, 135, 172
desarranjo, *veja* desarranjo
do conjunto vazio, 173
dos lados de uma tampa, 136
inversa, 135
sem elemento fixo, *veja* desarranjo
$\in$ (pertence), 19
$\notin$ (não pertence), 19
pertinência
em conjunto, 19
pessoa conhecida, 218
Petersen, Julius, 234
PIC, *veja* indução completa
PIF, *veja* indução completa
PIM, *veja* indução, definição
Pitágoras
teorema de, 16
placa de carro, 172
poço de petróleo, 194
polígono
convexo, 80
diagonais, 80
soma de ângulos, 80
poliedro
definição, 231
platônico, 231
polinômio
característico, 163
ponte
de Königsberg, 208, 210, 226
ponto, 16
*poset*, *veja* conjunto parcialmente ordenado
$\ni$ (possui), 19
$\not\ni$ (não possui), 19
postulado, *veja* axioma
potência
de 2, 78
de binômio, 177
de conjunto, *veja* conjunto potência
de função, *veja* função, potência de
Potência cadente, 175
$2^A$, *veja* conjunto potência
$\mathbb{P}(A)$, *veja* conjunto potência
pratos, 165
preconceito, 203
predicado, 47, 60
premissa, 33
presidente, 94
primo, 61, 69–73
definição, 60
princípio
aditivo
da contagem, 183
da boa ordenação, *veja* indução, boa ordenação
da complementaridade, 189
da contagem
aditivo, *veja* princípio aditivo da contagem
subtrativo, *veja* princípio subtrativo da contagem
da exaustão, 189
da exclusão mútua, 189
da inclusão e exclusão, 185–186, 190
da independência, 190, 191
da indução completa, *veja* indução completa

da indução forte, *veja* indução completa
da indução matemática, *veja* indução, definição
das casas de pombos, *veja* princípio dos escaninhos
das gavetas, *veja* princípio dos escaninhos
do pombal, *veja* princípio dos escaninhos
dos escaninhos, 84
multiplicativo
da contagem, 171–172
subtrativo
da contagem, 184
princípio da independência, 193
principio
subtrativo
da contagem, 185
probabilidade, 187–206
a posteriori, *veja* inferência bayesiana, probabilidade a posteriori
a priori, *veja* inferência bayesiana, probabilidade a priori
como percentagem, 188
condicional, 200–201
definição, 200
inversão, 201
justificativa, 200
da conjunção, 190, 191
da disjunção, 190, 191
definição, 188
distribuição, 192
definição, 192
degenerada, 206
entropia, *veja* entropia
uniforme, 188, 190, 206
em jogos de azar, 188
fórmula de Bayes, *veja* inferência bayesiana
inferência bayesiana, *veja* inferência bayesiana
justificativa, 187
princípio da complementaridade, 189
princípio da exaustão, 189
princípio da exclusão mútua, 189
princípio da inclusão e exclusão, 190
princípio da independência, 190, 191
princípio de exclusão e inclusão, 192
relação com lógica, 192
subjetividade, 189
teorema de Bayes, *veja* inferência bayesiana
variável aleatória, *veja* variável aleatória
problema
das quatro cores, *veja* grafo, coloração de faces
produtória, 157–158, 162–163
analogia com somatória, 158
básica, 157
de constante, 157
de exponenciais, 158
de potências, 157
de progressão aritmética, 157, 158
definição, 157
fórmula, 157
majoração, 158
manipulação, 158
vazia, 157
via logaritmos, 158
produtório, *veja* produtória
produto
cartesiano, 124, 129
produto cartesiano, 26–27, 93, 241
ênupla, 26
de *n* conjuntos, 26
de dois conjuntos, 26
definição, 26
iterado, 26
par ordenado, 26
tamanho, 26
progressão
aritmética, 161
definição, 160
incremento, 160
passo, 160
termo inicial, 160
geométrica, 163
definição, 160
razão, 160
termo inicial, 160
proposição
aberta, 47–55
atômica, 30
auto-referente, 37
contraditória, *veja* contradição

contrapositiva, 34, 37
definição, 29–30
fechada, 47, 55
inversa, 34, 37
mais forte, 34
mais fraca, 34
possível, 32
recíproca, 34, 37
simples, 30
tautológica, *veja* tautologia
transformação, 38
viável, 32
prova, 17, *veja* demonstração
de equivalência, 67
de implicação
contrapositiva, 63
por absurdo, 64
por vacuidade, 101
qualidades, 61
Python, 141

$\mathbb{Q}$ (números racionais), *veja* número racional
quádrupla, *veja* ênupla, 110
quíntupla, *veja* ênupla
quadrado perfeito, 66, 69, 71, 94
quando, *veja* operador implica
quantificador
de existência única, 49
em conjunto vazio, 50
escopo, 56
existencial, 48–50, 53, 70
múltiplo, 69
universal, 48, 50, 53
suspensão, 69
quebra-cabeças, 227, 228, 231
queijo, 56

$\mathbb{R}$ (números reais), *veja* número real
régua e compasso, 15
rótulo, 135
raiz quadrada, 93
como função, *veja* função raiz quadrada
como relação, 130
rato, 56
razão áurea, 163
recíproca, *veja* proposição recíproca
recíproco
de um número, 88
recho, 105
recorrência, 160–167
aditiva, 161–162
resolução, 161
linear
homogênea, 163
não homogênea, 165
termo independente, 165
majoração, 166–167
minoração, 166–167
multiplicativa, 162–163
resolução, 161–166
rede, 224
redução ao absurdo, 41, 44, *veja* prova,implicação por absurdo
refutação, *veja* conjectura refutada
regra de inferência, 15
relação, 93–113, 115–127
anti-simétrica, 100, 101, 105, 115, 116, 118, 170
aproximadamente igual, 127
binária, 93
completa, 124
composição, 102, 112, 113, 132, 135
associatividade, 100
com identidade, 98
com inversa, 98
de potências, 100
definição, 96, 97
distibutiva sobre união, 100
domínio, 97
e inclusão, 99
e intersecção, 100
em forma matricial, 103
imagem, 97
inversa da, 99
não-comutatividade, 97
notação alternativa, 98
potência, 99
repetida, *veja* potência
composição ($\circ$), 96–100
conjunção de, 104

contém (⊇), 96
contém estritamente (⊃), 96
contagem, *veja* contagem de relações
contido, 115, 117, 123, 124
contido (⊆), 94
contradomínio, *veja* relação, imagem
de adjacência, 221
de equivalência, 124–127, 132, 221, 223
  classe, *veja* classe de equivalência
  definição, 124
  entre pares, 126, 127
de ordem, 115–123, 245
  alfabética, 117, 121
  definição, 115
  entre pares, 116, 117
  estrita, 116, 117
  lexicográfica, 117
  parcial, 118
  restrição, 116
  subcadeia, 116
  total, 117, 118, 120, 135
  união, 116
definição, 93
dentro de, 116, 117
diagrama, 93
  de Hasse, 119
disjunção de, 104
divide, 120
divisível, 123
divisibilidade, 115
domínio, 94, 95
entre números, 17
fecho, *veja* fecho
fecho simétrico, 211
função, *veja* função
identidade, 95, 101, 124
igual (=), 96
igualdade, 95
imagem, 94, 95
  de conjunto, 131
imagem inversa, 96
  de conjunto, 131
intersecção de, 104
inversa, 95–96, 101, 111, 121, 131, 134, 135
  potência, *veja* relação, potência negativa
irreflexiva, 100, 101, 105, 116, 170
maior, 116
maior ou igual, 121
menor, 94, 116
menor (<), 94, 96
menor ou igual, 115, 117, 121
menor ou igual (≤), 94
menor que, 117
*n*-ária, 110–113
  *i*-ésimo domínio, 110
  definição, 110
  grau, 110
  junção, 111–113
  ordem, 110
  permutação de componentes, 111
  projeção, 110, 111
  restrição, 111
paralela, 124
pertence (∈), 94, 96
possui (∋), 96
potência, 100, 102, 107, 109
  negativa, 100
raiz quadrada, 130
reflexiva, 100, 101, 105, 108, 115, 118, 124, 170
representação matricial, 103–105
restrição, 95, 115, 131
simétrica, 100, 101, 105, 124, 170
sobre, 94
tipos, 100–105
transitiva, 100–102, 115, 116, 118, 119, 124
união de, 104
vazia, 95
repetição, *veja* iteração
representante
  de classe de equivalência, 125
restrição
  de relação, *veja* relação, restrição
retórica, 15
reta, 16
  dividindo plano, 77, 161
  paralela, 16, 124
  perpendicular, 16
reunião, 33

Rio de Janeiro, 29
Robertson, Neil, 61, 236
roleta, 184
ruminante, 53
Russel, Bertrand, 20

séptupla, *veja* ênupla
série, *veja* somatória infinita
Sócrates, 15
sêxtupla, *veja* ênupla
síntese de operadores, 45–46
Sanders, Daniel, 61
Sanders, Daniel P., 236
Schröder, Ernst, 245
se e somente se, *veja* operador eqivalência
selos, 80
seno, 130
sentença declarativa, 29
sequência, 242
  índice, 140, 159
    inicial, 140–142, 159
  bi-infinita, 159
  comprimento, 141
  de bits, 121, 123
  elemento, 159
    índice, 140, 159
    valor, 140, 159
  finita, 140–142
    comprimento, 141
    concatenação, 141, 142
    definição, 140
    notação $(\cdot, \cdot, \ldots)$, 140
    notação $[\cdot, \cdot, \ldots]$, 141
    notação $\langle \cdot, \cdot, \ldots \rangle$, 141
    vazia, *veja* sequência vazia
  igualdade, 140
  infinita, 159–167
    índice inicial, 159
    completando, 160
    definição, 159
    dos primos, 159
    por fórmula, 159
  $n$-ésimo termo, 141
  notação $x_n$, 140
  ordem dos termos, 140
  repetição de termos, 140
  sem ‘e’ repetidos, 164
  termo, 140, 159
    índice, 140, 159
    geral, 159
    valor, 140, 159
  trivial, 26, 141
  vazia, 26, 117, 141
    comprimento, 141
    concatenação, 142
  vs. conjunto, 141
Seymour, Paul, 61
Seymour, Paul D., 236
Shannon, Claude, 203
sigma ($\Sigma$), *veja* somatória
silogismo
  disjuntivo, 43
  hipotético, 43
sistema binário, 204
sistema completo, 46
soma, *veja* somatória
somatória, 143–157, 161–162
  índice, 143, 144, 149
  índice final
    infinito, 156
  associatividade, 146
  básica, 145
  comutatividade, 146
  de ímpares, 144
  de constante, 145
  de cubos, 81
  de exponencial, 145, 147, 148
  de frações, 148
  de números de Fibonacci, 148
  de PG, 78
  de potências, 145–147, 154
  de potências crescentes, 147, 148
  de potências de 2, 145, 147
  de primos, 144, 145
  de progessão geométrica, 151
  de progressão aritmética, 145, 148, 157, 158
  de progressão geométrica, 145, 147, 148, 156, 157
  de quadrados, 147
  de senos, 148

decomposição de domínio, 146
definição, 143
distributividade, 146, 150
divergente, 194
domínio, 144
fórmula, 145
fator comum, 146
fatoração, 150
indice final, 144
indice inicial, 144
infinita, 156–157
dos inversos, 194
limitante, *veja* somatória, majoração
múltipla, 149–150
definição, 149
troca de ordem, 149, 150
majoração, 151–156
pelo maior termo, 151
por indução, 151
por integral, 153–154
por somatória infinita, 156
termo a termo, 151, 154
manipulação, 145–148
minoração, *veja* somatória, majoração
por integral, 155–156
notação, 143
ordem dos termos, 146
produto, 150
propriedades, 145
telescópica, 146–148
termo, 143
troca de índice, 145, 146, 149
troca de domínio, 146, 149
vazia, 144
somatório, *veja* somatória
Stirling, James, 174
sub-conjunto, *veja* inclusão
definição, 21
próprio
definição, 21
sub-palavra, 120
subcadeia, 142
subconjunto, 63
subsequência, 142, 159
Távola Redonda, 228
tabela-verdade, 31–35, 38–42, 44–46
tabuleiro, 165
tampa de caixa, 136
tanque, 35
tatu, 161, 164
tautologia, 38–40, 43, 50
taxa de juros, 29, 30
Tchebychev, Pafnuti, 198
teorema, 16, 60
da infinidade de primos, 72
de Bayes, *veja* inferência bayesiana
de Cantor, 243–244
de Euler
para grafos planares, 232
para tours em grafos, 227
de Fermat, *veja* conjetura de Fermat
de Kuratowski, 234
de Pólya, 222
do deserto de primos, 71
teoria
da computabilidade, 17
da informação, 17, *veja* informação
da probabilidade, 17
de conjuntos, 17
dos conjuntos, 19–28
dos grafos, *veja* grafo
tese, 33
tetraedro, 231
Thomas, Robin, 61, 236
tijolos, 31
torre
de xadrez, 174
trângulo equiângulo, 52
treliça, 208
triângulo, 16
congruência, 16
retângulo, 16
tripla, *veja* ênupla, 110
troca, *veja* permutação
troco, 81

união, *veja* conjunto
de grafos, *veja* grafo, subgrafo, união
∪, *veja* conjunto, união

$\mathcal{U}$, *veja* conjunto universal
urna, 78

vacuidade, 50
valor absoluto, 73
valor lógico, 30
  falso, 158
  verdadeiro, 158
valor-verdade, 30
variáveis independentes, *veja* variável aleatória, independência
variável, 17
  aleatória, 192–200
    contínua, 192
    discreta, 192
  amarrada, 55, 60
  lógica, 31
  livre, 55, 60
variável aleatória
  coeficiente de correlação, *veja* correlação
  correlação, 200
  covariância, 199
  definida por fórmula, 192, 195
  desvio padrão, 198–199
    definição, 198
    teorema de Tchebychev, 198
  esperança, *veja* variável aleatória, valor esperado
  independência, 193
  média, *veja* variável aleatória, valor esperado
  mediana, 196
  moda, 197
  teorema de Tchebychev, 198
  valor esperado, 193–195
    com distribuição uniforme, 194
    função afim, 195
    função linear, *veja* função afim
    função não linear, 195
    infinito, 194
    soma, 195
  valor médio, *veja* variável aleatória, valor esperado
  valor mais provável, *veja* moda
  variância, 197–200
    definição, 197
    função afim, 198
    infinita, 197
    justificativa, 197
    sinal, 197
    soma, 198
  vetorial
    valor esperado, 195
variavel aleatória
  vetorial, 195
Venn, John, 23
voto, 37

xadrez, 174, 231

$\mathbb{Z}$ (números inteiros), *veja* número inteiro
zebra, 53
Zermelo, Ernest, 19
zoológico, 29