Tópicos em Computação Gráfica

Notas de Aula - Fascículo 01
Geometria projetiva bidimensional

Jorge Stolfi

Sumário

1 Introdução

1.1 O que é geometria?

Geometria pode ser definida, informalmente, como o estudo matemático de formas e medidas.

Existem duas maneiras clássicas de se formalizar o estudo da geometria. Na *abordagem axiomática*, objetos geométricos como pontos e linhas são definidos apenas indiretamente, por meio de certas propriedades fundamentais — os *axiomas* — que eles satisfazem "por definição". Na *abordagem analítica*, os objetos geométricos são identificados com ênuplas de números — suas *coordenadas* — ou por conjuntos de ênuplas que satisfazem certas condiçãoes algébricas.

O exemplo original da abordagem axiomática é a *geometria euclidiana* (de Euclides, filósofo grego, 383–328 A.C.). Nesta abordagem, os objetos primitivos são pontos, retas, círculos, esferas, e planos, e figuras derivadas dos mesmos. Estes objetos são por conectados por certas *relações de incidencia* que dizem se um ponto A está ou não numa reta (ou círculo) B, e de certas *construções* que permitem produzir novos objetos a partir de objetos dados ou previamente construídos. Estes objetos e suas incidências satisfazem por definição um pequeno conjunto de axiomas, incluindo, por exemplo, "dois pontos distintos definem uma única reta,"(Postulado 1 de Euclides) e "duas retas que não são paralelas se encontram em algm ponto." (Postulado 5). Figuras mais complexas podem ser definidas em termos desses objetos primitivos; e propriedades mais complexas podem ser demonstradas a partir desses postulados.

A abordagem analítica surgiu com a *geometria cartesiana* (de René Descartes, matemático francês, 1596–1650). Nesta teoria, um ponto é por definição um par de números reais. Uma reta é o conjunto de tais pares cujas componentes satisfazem uma certa equação de primeiro grau. Um círculo é definido analogamente por uma equação de segundo grau.

Não vamos entrar aqui em discussões filosóficas sobre qual das duas abordagens é a mais 'fundamental", mais "pura", mais "elegante", etc. Do ponto de vista estritamente matemático, elas são equivalentes, no sentido que todos os conceitos que podem ser definidos numa também podem ser definidos na outra. Em particular, na geometria euclidiana podemos representar números reais por pontos numa reta; e podemos somar e multiplicar esses "números" por meio de construções com régua e compasso. Supondo-se que seja permitido falar em seqüências infinitas de pontos, podemos desenvolver toda a teoria da análise real dentro da geometria euclidiana. Reciprocamente, os postulados da geometria euclidiana podem ser demonstrados algebricamente na geometria cartesiana.

Por outro lado, existem diferenças técnicas nas duas abordagens, que fazem com que uma seja melhor que a outra para certas finalidades. Na verdade elas se complementam, e ambas são intensamente usadas em computação gráfica e geometria computacional.

1.2 Geometria projetiva

Uma parte importante da computação gráfica e áreas afins (como visão computacional) diz respeito à relação entre a geometria tridimensional de uma cena, e sua projeção em imagens bidimensionais (sintéticas ou fotografadas). Para tratar deste assunto, é necessário completar o espaço euclidiano com pontos no infinito; ou seja, trabalhar com *geometria projetiva* em vez de geometria euclidiana. Na verdade, para poder definir corretamente certas noções — como segmento, semi-espaço, e objeto convexo — é preciso substituir a geometria projetiva "clássica" pela *geometria projetiva orientada.* Trabalhar no espaço projetivo orientado traz inúmeras vantagens práticas, além das mencionadas acima.

1.3 Coordenadas cartesianas

Um ponto do plano euclidiano pode ser representado no computador por suas *coordenadas cartesianas*: um par de números reais (X, Y), medidos ao longo de dois eixos ortogonais em relação a alguma origem fixa. Com esta representação, o plano euclidiano pode ser identificado com o conjunto $\mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$. Da mesma forma, um ponto no espaço euclidiano pode ser representado por uma tripla de coordenadas cartesianas (X, Y, Z), ficando assim o espaço identificado com o conjunto $\mathbb{R}^3 = \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$.

Coordenadas cartesianas e a geomertria euclidiana, apesar de bem conhecidas e bastante usadas, tem certas desvantagens do ponto de vista algorítmico. A principal é que elas não não conseguem represenar pontos no infinito. Esta limitação obriga os algoritmos geométricos a tratar separadamente muitos casos particulares.

Por exemplo, considere uma função que calcula a intersecção de duas retas dadas. Na geometria euclidiana, este problema tem três casos diferentes: as retas coincidem (têm infinitos pontos em comum), são paralelas (não têm nenhum ponto em comum), ou estão em posição genérica (têm exatamente um ponto em comum). Se tivéssemos uma representação adequada para pontos no infinito, poderíamos em princípio tratar os dois últimos casos como um só.

Ou, então, suponha que queremos calcular a intersecção de dois ou mais semi-planos dados. No caso "normal" (mais fácil de tratar), o resultado dessa operação é um polígono. Na geometria euclidiana, entretanto, temos que considerar vários casos "excepcionais": a intersecção pode ser uma faixa limitada por duas retas paralelas, ou uma região infinita limitada por duas semi-retas e alguns segmentos, etc. Sem o conceito de pontos no infinito, precisamos inventar representações especiais, e portanto algoritmos especiais, para tratar cada um desses casos.

Outras desvantagens da geometria cartesiana serão vistas mais adiante. Devido a essas desvantagens, em geometria computacional e computação gráfica é quase sempre mais conveniente trabalhar com uma representação mais sofisticada de pontos e retas, que descreveremos no próximo capítulo.

2 O plano projetivo orientado

2.1 Coordenadas homogêneas

Por definição, as *coordenadas homogêneas* de um ponto (X, Y) de $\mathbb{R}^2$, é qualquer tripla $[w, x, y]$ de números reais tais que $w > 0$, $X = x/w$, e $Y = y/w$.

Por exemplo, as coordenadas homogêneas do ponto com coordenadas cartesianas $(3, 5)$ podem ser $[2, 6, 10]$, $[10, 30, 50]$, $[0.2, 0.6, 1.0]$, ou uma infinidade de outras triplas. Mais precisamente, as coordenadas homogêneas do ponto (X, Y) são qualquer tripla da forma $[w, wX, wY]$ com $w > 0$; wm particular, $[1, X, Y]$. A coordenada w, que funciona como um fator de escala para as outras duas coordenadas x e y, é chamada de *peso*.

Dito de outra forma, se $[w, x, y]$ são as coordenadas homogêneas de um ponto, então $[\alpha q, \alpha x, \alpha y]$ também são coordenadas homogêneas desse mesmo ponto, para todo $\alpha > 0$.

Repare na notação: usaremos sempre parenteses $(*, *)$ para coordenadas cartesianas, e colchetes $[*, *, *]$ para coordenadas homogêneas. Observe também que as coordenadas homogêneas individuais w, x e y de um ponto não tem valor definido. Elas só tem sentido juntas, na forma de uma tripla $[w, x, y]$.

Ex. 2.1: Traduza os seguintes pontos de coordenadas cartesianas para homogêneas:

(a) $(0, 0)$ (b) $(1, 0)$

(c) $(0, 1)$ (d) $(5, 6)$

Ex. 2.2: Traduza os seguintes pontos de coordenadas homogêneas para cartesianas:

(a) $[1,0,0]$	(b) $[1,1,0]$	(c) $[1,0,1]$
(d) $[1,2,3]$	(e) $[2,5,6]$	(f) $[2,0,0]$

Ex. 2.3: Escreva o ponto $(1/2, 3/5)$ em coordenadas homogêneas *inteiras*.

Ex. 2.4: O que acontece com o ponto $[w, x, y]$ quando x e y permanecem constantes, e o peso w tende para 0? E quando w tende para $+\infty$?

Ex. 2.5: Descreva a trajetória do ponto $[1+t^2, 1-t^2, 2t]$ quando t varia de $-\infty$ a $+\infty$.

2.2 Pontos infinitos

Observe que quando o peso w tende para zero, com x e y fixos, o ponto $[w, x, y]$ tende a se afastar infinitamente da origem, na direção do vetor (x, y). É natural portanto considerar uma tripla homogênea $[0, x, y]$, com peso nulo, como sendo um ponto infinitamente distante da origem — um *ponto infinito* — na direção do vetor (x, y). Informalmente, podemos denotar esse ponto por $\infty(x, y)$.

O comprimento do vetor (x, y) é irrelevante, desde que não seja zero; isto é, as coordenadas $[0, \alpha x, \alpha y]$ representam o mesmo ponto infinito, para todo $\alpha > 0$. Note que esta é a mesma equivalência de coordenadas homogêneas que vale para os *pontos finitos* tem peso w positivo. Por outro lado, em muitas situações, o sentido do vetor é importante. Assim, por definição, as triplas $[0, x, y]$ e $[0, -x, -y]$ representam pontos infinitos distintos.

De agora em diante, usaremos o termo “ponto” tanto para pontos finitos quanto infinitos.

A tripla $[0, 0, 0]$ é um caso especial. A experiência mostra que não vale a pena tentar interpretá-la como um ponto; é melhor decretar que essa tripla é inválida.

Ex. 2.6: Escreva as coordenadas homogêneas do ponto infinito cuja direção faz um ângulo de θ radianos com o eixo das abscissas.

2.3 O outro lado do plano

Se as triplas homogêneas $[w, x, y]$ com peso w positivo são pontos finitos (pontos de $\mathbb{R}^2$), e as com peso nulo são pontos infinito, que significado podemos dar para as triplas com peso negativo?

Por estranho que pareça, é melhor interpretar essas triplas como pontos que, tendo passado “além do infinito”, foram parar no “outro lado” do plano.

Informalmente, imaginamos que o plano é uma folha infinita de papel; e que, para cada posição (X, Y), existem dois pontos do plano, sobrepostos mas distintos, um em cada lado da folha. O ponto na frente da folha, como vimos, tem coordenadas homogêneas $[1, X, Y]$ ou $[w, wX, wY]$ para qualquer $w > 0$. Por definição, o ponto que está atrás da folha, na mesma posição, tem coordenadas homogêneas $[-1, -X, -Y]$, ou $[w, wX, wY]$ para qualquer $w < 0$. $w \neq 0$ descreve um ponto de coordenadas cartesianas $(x/w, y/w)$; sendo que, na nova interpretação, o ponto está na frente da folha se $w > 0$, e no verso se $w < 0$.

O *plano projetivo orientado*, denotado por $\mathbb{T}^2$, é o conjunto de todos os pontos finitos em ambos os lados da folha, mais os pontos no infinito. Mais formalmente:

Definição. Os *pontos de* $\mathbb{T}^2$ são todas as triplas $[w, x, y]$ de números reais exceto $[0, 0, 0]$; com a ressalva que duas triplas são o mesmo ponto se e somente se uma é um múltiplo positivo da outra.

Em particular, se $[w, x, y] \neq [0, 0, 0]$, as triplas $[w, x, y]$ e $[-w, -x, -y]$ denotam pontos diferentes de $\mathbb{T}^2$. Diremos que esses dois pontos são *coincidentes* mas não iguais, e que um o *antípoda* do outro. Em geral, denotaremos o antípoda de um ponto p por $\neg p$: ou seja, $\neg[w, x, y] = [-w, -x, -y]$.

Cada ponto $[w, x, y]$ de $\mathbb{T}^2$ pertence a um destes três subconjuntos:

- os *pontos no aquém*, com $w > 0$;
- os *pontos no infinito*, com $w = 0$; e
- os *pontos no além*, com $w < 0$.

Observe que o antípoda de um ponto no aquém um ponto do além, e vice-versa; e o antípoda $\neg[0, x, y]$ de um ponto no infinito é outro ponto $[0, -x, -y]$ no infinito, distinto do primeiro.

Por definição, se $w \neq 0$, as coordenadas cartesianas do ponto finito $[w, x, y]$ (no aquém ou além) são $(x/w, y/w)$. Segue-se que todo par de coordenadas cartesianas (X, Y) define *dois* pontos, coincidentes porém distintos, um em cada lado do papel. Esses pontos têm coordenadas homogêneas $[w, wX, wY]$ (no aquém) e $[-w, -wX, -wY]$ (no além), para qualquer $w > 0$.

Também por definição, se $w = 0$ e $(x, y) \neq (0, 0)$, o ponto no infinito $[w, x, y]$ está infinitamente distante, na direção do vetor (x, y), visto de qualquer ponto no aquém; e na direção $(-x, -y)$, visto de qualquer ponto do além.

Ex. 2.7: Para cada um dos pontos seguintes, dê as coordenadas cartesianas, e diga se o ponto está no aquém ou no além:

(a) $[1, -2, 3]$ (b) $[1, 2, -3]$ (c) $[-1, 2, 3]$

(d) $[-1, -2, -3]$ (e) $[1, 0, 0]$ (f) $[-1, 0, 0]$

Ex. 2.8: Dê coordenadas homogêneas para os pontos do aquém e do além cujas coordenadas cartesianas são:

(a) $(0, 0)$ (b) $(2, 3)$ (c) $(-2, -3)$ (d) $(-2, 3)$

Ex. 2.9: Qual a relação geométrica entre os pontos $[w, x, y]$ e $[-w, x, y]$? (Suponha $w > 0$.)

Ex. 2.10: Sejam w x, e y números reais não nulos. Considere as oito triplas homogêneas $[\alpha w, \beta x, \gamma y]$, onde $\alpha, \beta, \gamma \in \{+1, -1\}$. Quantos pontos distintos estão representados por essas triplas? Quais pares de pontos são antípodas entre si?

2.4 O modelo plano de $\mathbb{T}^2$

O plano projetivo orientado $\mathbb{T}^2$ pode ser modelado por duas cópias do plano cartesiano $\mathbb{R}^2$ (o aquém e o além), mais uma cópia do círculo unitário $\mathbb{S}^1$ (os pontos non infinito). Veja a figura 1. O ponto $[w, x, y]$ está no aquém se $w > 0$, e no além se $w < 0$; em ambos os casos, suas coordenadas cartesianas são $(x/w, y/w)$. O ponto é infinito se $w = 0$; nesse caso, ele é representado pelo ponto do círculo correspondente à direção do vetor (x, y).

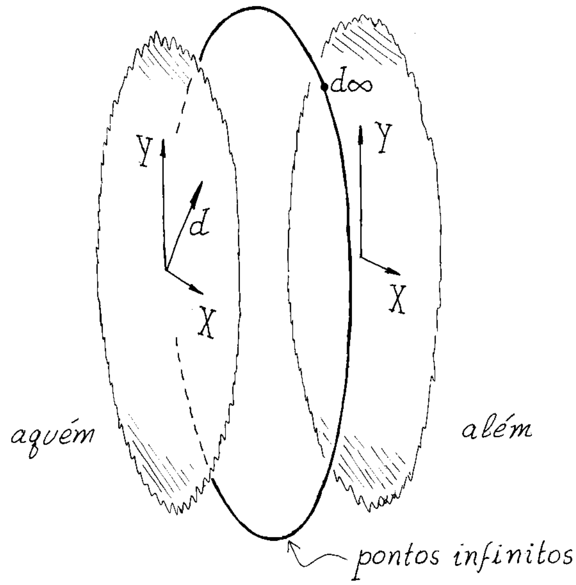

Figura 1: O plano projetivo de dois lados.

Reciprocamente, um ponto finito do plano de dois lados com coordenadas cartesianas (X, Y) tem coordenadas homogêneas $[1, X, Y]$ se ele está no aquém, e $[-1, -X, -Y]$ se está no além. Um ponto no infinito na direção do vetor (X, Y), visto do aquém, tem coordenadas homogêneas $[0, X, Y]$.

Neste modelo, pontos finitos antípodas $[w, x, y]$ e $[-w, -x, -y]$ são pontos correspondentes, um no aquém e um no além, com as mesmas coordenadas cartesianas $(x/w, y/w)$; enquanto que os pontos antípodas infinitos $[0, x, y]$ $[0, -x, -y]$ correspondem a pontos opostos do círculo.

2.5 Convenções gráficas

Muitas das ilustrações de figuras geométricas de $\mathbb{T}^2$ neste trabalho serão baseadas neste modelo plano. Pontos com mesmas coordenadas cartesianas serão desenhados sobrepostos; para distinguir os dois lados do plano, usaremos pontos cheios ($\bullet$), linhas cheias, e áreas hachuradas para o aquém, e pontos vazios ($\circ$), linhas tracejadas, e áreas pontilhadas para o além. Veja a figura 2.

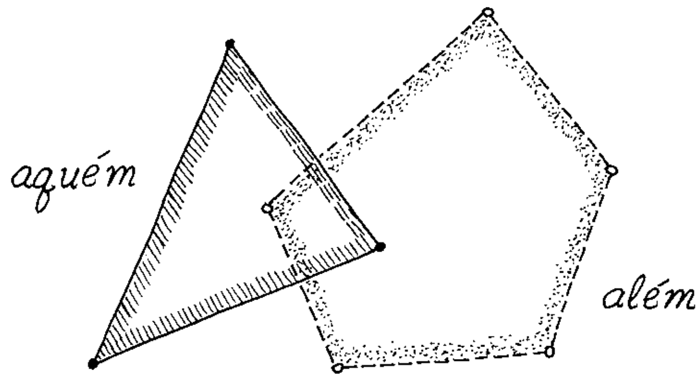

Figura 2: Convenções gráficas para os dois lados do plano.

Ex. 2.11: Desenhe os dois triângulos cujos vértices são dados a seguir, segundo as convenções da figura 2.

(a)	$[1, 0, 0]$	$[1, 2, 0]$	$[2, 3, 5]$
(b)	$[-1, 1, 0]$	$[-1, 2, 2]$	$[-1, 2, -3]$

Ex. 2.12: Usando as convenções da figura 2, desenhe a trajetória dos pontos abaixo, quando t varia conforme indicado:

(a) $[1/t, 1, 2]$, para t de 1 a 0;

(b) $[-1/t, 1, 2]$, para t de 1 a 0;

(c) $[1, 1 + t, 2 + 3t]$, para t de 0 a $+\infty$;

(d) $[t, 1 + t, 2 + 3t]$, para t de -1 a $+1$.

2.6 O modelo esférico de $\mathbb{T}^2$

A estrutura do plano projetivo orientado pode ser melhor entendida através de um *modelo esférico*, que consiste na superfície $\mathbb{S}^2$ da esfera unitária de $\mathbb{R}^3$ com centro na origem — isto é, $\mathbb{S}^2 = \{\, (w, x, y) \;:\; w^2 + x^2 + y^2 = 1 \,\}$. Especificamente, o ponto de $\mathbb{T}^2$ com coordenadas homogêneas $[w, x, y]$ é representado pelo ponto de $\mathbb{S}^2$ com coordenadas cartesianas

$$\frac{1}{\sqrt{w^2 + x^2 + y^2}}(w, x, y) \tag{1}$$

Reciprocamente, o ponto (w, x, y) da esfera corresponde ao ponto $[w, x, y]$ de $\mathbb{T}^2$. Esta fórmula equivale a tomar, para cada ponto de $\mathbb{T}^2$, a única tripla homogênea $[w, x, y]$ que é "normalizada", no sentido de satisfazer $w^2 + x^2 + y^2 = 1$.

Geometricamente, a fórmula (1) equivale a interpretar a tripla homogênea $[w, x, y]$ como o ponto de $\mathbb{R}^3$ com coordenadas cartesianas (w, x, y), e projetar este ponto sobre a esfera $\mathbb{R}^2$, na direção do centro da mesma. Veja a figura 3.

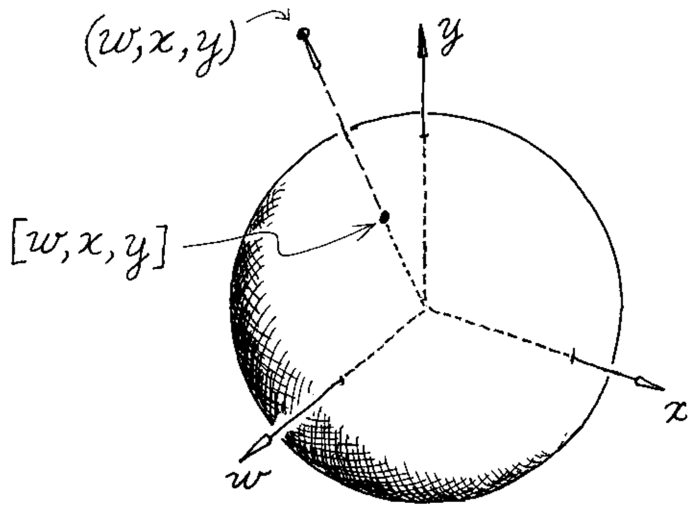

Figura 3: O modelo esférico de $\mathbb{T}^2$.

Ex. 2.13: Indique graficamente a posição dos seguintes pontos no modelo esférico de $\mathbb{T}^2$.

(a) $[1, 0, 0]$ (b) $[-1, 0, 0]$ (c) $[1, 1, 0]$

(d) $[2, 3, 5]$ (e) $[2, -3, -5]$ (f) $[-2, 3, 5]$

(g) $[0, 3, 5]$ (h) $[0, -3, -5]$ (i) $[0, 3, -5]$

No modelo esférico, o aquém e o além de $\mathbb{T}^2$ são representados pelos hemisférios de $\mathbb{S}^2$ com $w > 0$ e $w < 0$, respectivamente. A origem do aquém, $[1, 0, 0]$, é o ponto $(1, 0, 0)$ da esfera; e a do além é $(-1, 0, 0)$. Os pontos no infinito de $\mathbb{T}^2$ estão no "equador" da esfera, onde a mesma é cortada pelo plano $w = 0$ de $\mathbb{R}^3$. Neste modelo, o antípoda de um ponto p é o ponto diametralmente oposto a p na esfera.

2.7 Correspondência entre os modelos

A correspondência entre o modelo esférico e o modelo plano é definida implicitamente pelas fórmulas que relacionam as coordenadas homogêneas de um ponto de $\mathbb{T}^2$ com as coordenadas cartesianas de sua representação em cada modelo. Essa correspondência equivale à projeção de cada hemisfério de $\mathbb{S}^2$ ($w > 0$ e $w < 0$) na cópia correspondente de $\mathbb{R}^2$ (aquém ou além). Nos dois casos, devemos imaginar a cópia de $\mathbb{R}^2$ tangente à esfera $\mathbb{S}^2$ no ponto $(1, 0, 0)$, com os eixos paralelos aos eixos x e y de $\mathbb{R}^3$. A projeção é feita a partir do centro da esfera. Veja a figura 4.

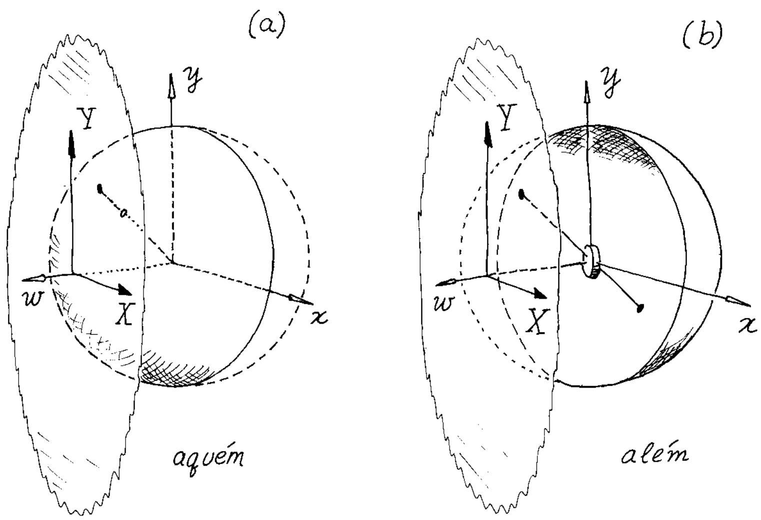

Figura 4: Correspondência entre os modelos plano e esférico de $\mathbb{T}^2$.

No caso do aquém, projetamos o hemisfério $w > 0$ no plano, a partir do centro da esfera. Veja a figura 4(a). No caso do além, projetamos o hemisfério $w < 0$ sobre o plano *através* do centro da esfera. Veja a figura 4(b). Observe como esta projeção faz com que o além do modelo esférico fique rodado de 180° em relação ao além do modelo plano, de modo que a topologia natural da esfera torna-se a topologia descrita na seção 2.8.

Nos dois modelos, os pontos infinitos (com $w = 0$) são representados por uma cópia do círculo unitário:

$$\{\,(x,y)\;:\;x^2+y^2=1\,\}\qquad\text{(modelo plano)}$$
$$\{\,(0,x,y)\;:\;x^2+y^2=1\,\}\qquad\text{(modelo esférico)}$$

A correspondência entre estes dois círculos é a óbvia.

2.8 Topologia de $\mathbb{T}^2$

Informalmente, definir a topologia de um espaço matemático S consiste em definir os limites de seqüências infinitas de pontos de S; ou, o que dá no mesmo, em definir a noção de continuidade para curvas de S (funções de $\mathbb{R}$ para S).

Por definição, a topologia de $\mathbb{T}^2$ é a mesma do modelo esférico. Uma seqüência de pontos de $\mathbb{T}^2$ converge para um limite a se e somente se as projeções desses pontos na esfera convergem para a projeção de a.

Ex. 2.14: Para cada uma das seqüências a seguir, determine os pontos limite, quando i tende para infinito:

(a) $[1, i, i^2]$ (b) $[1, -i, i^2]$

(c) $[1, i, \sin i]$ (d) $[1/i, 1, 2]$

(e) $[1/i, 1/(i+1), 1/(i+3)]$ (f) $[i^3, i^4, i^2]$

Ex. 2.15: Quais das seqüências abaixo converge, quando i tende para infinito:

(a) $[(-1)^i, 1, i]$.
(b) $[1, 1, i(-1)^i]$.
(c) $[(-1)^i, 1, i(-1)^i]$.

Da mesma forma, uma trajetória em $\mathbb{T}^2$ é contínua se e somente se a curva correspondente no modelo esférico é contínua. Note que, neste modelo, o aquém e o além são adjacentes, separados pelos pontos no infinito; e que estes são topologicamente equivalentes aos pontos finitos. O modelo mostra também que o conjunto de todos os pontos no infinito têm a topologia do círculo $\mathbb{S}^1$.

Ex. 2.16: Prove que uma função $c(t)$ de algum intervalo $I \subseteq \mathbb{R}$ para $\mathbb{T}^2$ é contínua se e somente se existirem três funções contínuas $w(t)$, $x(t)$, e $y(t)$, que não se anulam todas para um mesmo $t \in I$, tais que $c(t) = [w(t), x(t), z(t)]$.

Ex. 2.17: Encontre três funções $w(t)$, $x(t)$, e $y(t)$ que *não* são contínuas num intervalo $I \subseteq \mathbb{R}$, mas são tais que $c(t) = [w(t), x(t), z(t)]$ é uma curva contínua em $\mathbb{T}^2$.

Ex. 2.18: Quais das funções de t definidas abaixo são contínuas no intervalo aberto $(0 \,\_\, 1)$? Quais delas podem ser estendidas para o intervalo $[0 \,\_\, 1]$, mantendo a continuidade?

(a) $[1,\ t,\ t^2]$
(b) $[t,\ t^2,\ t^3]$
(c) $[t,\ t^2,\ \sin t]$
(d) $[t - 1/2,\ 1,\ 2]$
(e) $[t,\ 1,\ \sin(1/t)]$

A projeção do modelo esférico no modelo plano, descrita na seção **??**, explica o comportamento peculiar dos pontos no infinito deste último modelo. Em particular, ela explica porque uma trajetória contínua que passa do aquém para o além, num único instante, sempre vai para o infinito numa direção d, e reaparece no infinito, vindo da direção $-d$. No modelo esférico, não ocorre nada de especial nesse instante.

Ex. 2.19: Considere a curva $c(t) = [1 - 2t, 2t, 4t^2 - 1]$, onde t varia entre 0 e 1. Determine o ponto onde essa curva está no infinito, e o valor de t correspondente. Desenhe a trajetória dessa curva no modelo esférico e no modelo plano, distinguindo pontos do aquém e do além conforme convencionado acima.

3 Retas

3.1 Equação homogênea de uma reta

Em geometria analítica aprendemos que uma linha reta do plano é definida por três coeficientes A, B, C, tais que um ponto genérico p de coordenadas cartesianas (X, Y) está na reta se e somente $AX + BY + C = 0$.

Traduzindo esta equação para coordenadas homogêneas, concluímos que um ponto finito $p = [w, x, y]$ está nessa reta se e somente se $A(x/w)+B(y/w)+C = 0$, isto é, $Ax+By+Cw = 0$.

3.2 Coeficientes homogêneos

A fórmula homogênea de uma reta, acima, fica mais elegante se rebatizarmos os coeficientes A, B, e C de $\mathcal{X}$, $\mathcal{Y}$, e $\mathcal{W}$, e colocarmos $\mathcal{W}$ em primeiro lugar. Podemos então dizer que uma linha é definida por três *coeficientes homogêneos* $\langle\mathcal{W}, \mathcal{X}, \mathcal{Y}\rangle$, sendo que o ponto genérico $p = [w, x, y]$ está nessa linha se e somente $\mathcal{W}w + \mathcal{X}x + \mathcal{Y}y = 0$.

Por exemplo, a linha $\langle 1, 2, 3\rangle$ passa por todos os pontos $[w, x, y]$ tais que $1w+2x+3y = 0$; ou, em termos cartesianos, todos os pontos (X, Y) tais que $2X + 3Y + 1 = 0$.

Ex. 3.1: Escreva a equação cartesiana da reta com coeficientes homogêneos $\langle 2, 3, 5\rangle$.

Ex. 3.2: Escreva os coeficientes homogêneos da reta cuja equação cartesiana é $3X - 2Y = 6$.

Ex. 3.3: Quais são os coeficientes homogêneos dos eixos cartesianos X e Y?

Ex. 3.4: Determine as condições algébricas sobre os coeficientes $\langle\mathcal{W}, \mathcal{X}, \mathcal{Y}\rangle$ que caracterizam:

(a) retas horizontais;
(b) retas verticais;
(c) retas que passam pela origem.

3.3 Pontos infinitos de uma reta

Na geometria cartesiana, a reta com equação $\mathcal{W}w + \mathcal{X}x + \mathcal{Y}y = 0$ somente está definida se pelo menos um dos coeficientes $\mathcal{X}$ ou $\mathcal{Y}$ é diferente de zero. Nessas condições, é fácil verificar que essa reta é perpendicular ao vetor $(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$.

Observamos, além disso, que a equação da reta pode ser satisfeita também pelos pontos no infinito $[0, \mathcal{Y}, -\mathcal{X}]$ e $[0, -\mathcal{Y}, \mathcal{X}]$. Estes são os dois pontos no infinito nas direções dos vetores $(\mathcal{Y}, -\mathcal{X})$ e $(-\mathcal{Y}, \mathcal{X})$, que, sendo perpendiculares a $(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$, são paralelos à reta. Ou seja, no plano projetivo orientado $\mathbb{T}^2$, toda reta paralela a um vetor $d = (x, y)$ contém os pontos infinitos $\infty d = [0, x, y]$ e $\infty(-d) = [0, -x, -y]$.

Ex. 3.5: Determine os dois pontos infinitos da reta $\langle 2, 3, 5\rangle$.

Segue-se desta observação que todas as retas paralelas a um mesmo vetor (X, Y) são exatamente todas as retas que passam pelos pontos no infinito $[0, X, Y]$ e $[0, -X, -Y]$. Em consequência, no plano projetivo $\mathbb{T}^2$ duas retas distintas sempre se encontram, *mesmo quando elas são paralelas.*

Do ponto de vista do programador, esta é uma das maiores vantagens das coordenadas homogêneas para computação gráfica. Graças a ela, podemos ignorar muitos casos especiais de paralelismo que precisariam ser testados e tratados à parte se trabalhássemos com coordenadas cartesianas.

3.4 Retas no além

Observe que a equação $\mathcal{W}w + \mathcal{X}x + \mathcal{Y}y = 0$, que define quando um ponto pertence a uma reta, continua válida se negarmos as três coordenadas w, x, y do ponto simultaneamente. Portanto, se uma reta passa por um ponto p, ela também passa pelo seu antípoda $\neg p$.

Ou seja, no modelo plano de $\mathbb{T}^2$, uma reta normalmente consiste de *duas* retas euclidianas coincidentes, uma no aquém e uma no além, com os mesmos coeficientes cartesianos; e mais os dois pontos infinitos, nas duas direções paralelas às retas. Veja a figura 5.

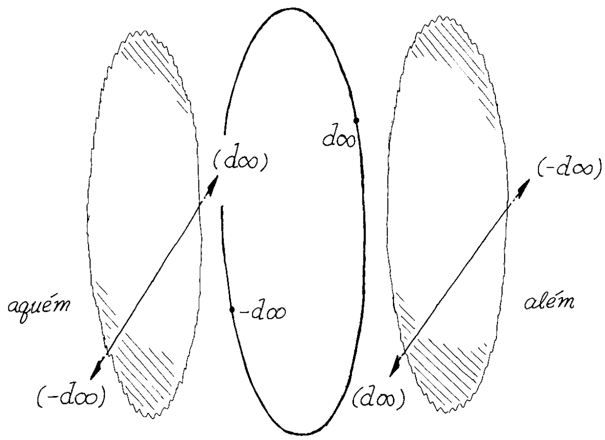

Figura 5: Uma reta, no aquém e no além.

Observe que a reta na figura 5 tem a topologia de um círculo. Um percurso monotônico e contínuo ao longo de de uma reta m consiste em percorrer uma das duas retas euclidianas que constituem m numa certa direção d, passar pelo ponto $d\infty$, percorrer a outra reta euclidiana *na mesma direção* d, e passar pelo ponto $-d\infty$, completando assim o ciclo.

3.5 Posição de ponto contra reta

Quando a fórmula $AX+BY+C$ não é zero, seu sinal pode ser usado para determinar em qual lado da reta se encontra o ponto (X, Y). Este teste é fundamental para muitos algoritmos geométricos, e merece uma notação própria. Portanto, para todo ponto $p = [w, x, y]$ e toda reta $r = \langle \mathcal{W}, \mathcal{X}, \mathcal{Y} \rangle$ de $\mathbb{T}^2$, definimos a *posição de p relativa a r* como sendo

$$r \diamond p = \operatorname{sgn}(\mathcal{W}w + \mathcal{X}x + \mathcal{Y}y) \tag{2}$$

onde $\operatorname{sgn} t$ é o sinal de t — isto é, -1 se $t < 0$, 0 se $t = 0$, e $+1$ se $t > 0$.

Temos então que p está na reta r se e somente se $r \diamond p = 0$. Caso contrário, dizemos que p está no *lado positivo* ou no *lado negativo* de r, conforme o valor de $r \diamond p$.

Ex. 3.6: Determine $r \diamond p$ para cada um dos casos abaixo:

(a) $r = \langle 2, 3, 5\rangle$, $p = [1, 1, -1]$ (b) $r = \langle 2, 3, 5\rangle$, $p = [1, 1, 0]$

(c) $r = \langle 2, 3, 5\rangle$, $p = [1, 1, 1]$ (d) $r = \langle 0, 1, 0\rangle$, $p = [0, 1, 0]$

(e) $r = \langle 0, 1, 0\rangle$, $p = [0, -1, 0]$ (f) $r = \langle 0, 1, 0\rangle$, $p = [0, 0, 1]$

(g) $r = \langle a, b, c\rangle$, $p = [a, b, c]$

Ex. 3.7: Qual a condição algébrica para que a origem do aquém esteja no lado positivo da reta $\langle \mathcal{W}, \mathcal{X}, \mathcal{Y}\rangle$?

Note que o sinal de $r \diamond p$ se inverte se trocarmos os coeficientes $\mathcal{W}, \mathcal{X}, \mathcal{Y}$ por $-\mathcal{W}, -\mathcal{X}, -\mathcal{Y}$. Portanto, apesar dessas duas retas serem *coincidentes* (passarem pelos mesmos pontos), elas não são *iguais*, pois seus lados positivos são diferentes. Ou seja, uma reta de $\mathbb{T}^2$ não é apenas um conjunto dos pontos; ela também possui uma *orientação externa* ou *transversal*, que pode ser entendida como uma atribuição de rótulos '+' e '−' aos dois semiplanos adjacentes.

Por outro lado, as fórmulas $\mathcal{W}w + \mathcal{X}x + \mathcal{Y}y$ e $(\alpha\mathcal{W})w + (\alpha\mathcal{X})x + (\alpha\mathcal{Y})y$ têm o mesmo sinal, para todo $\alpha > 0$ e todo $[w, x, y]$. Portanto, vale para retas a mesma equivalência que vale para pontos: $\langle \mathcal{W}, \mathcal{X}, \mathcal{Y}\rangle$ e $\langle \alpha\mathcal{W}, \alpha\mathcal{X}, \alpha\mathcal{Y}$ representam a mesma reta para todo $\alpha > 0$, enquanto que as retas $r = \langle \mathcal{W}, \mathcal{X}, \mathcal{Y}\rangle$ e sua *oposta* $\neg r = \langle -\mathcal{W}, -\mathcal{X}, -\mathcal{Y}\rangle$ são coincidentes mas distintas, pois $(\neg r) \diamond p = -(r \diamond p)$ para todo ponto p.

3.6 Lados de uma reta no além

Observe que o valor de $r \diamond p$ não é alterado se multiplicarmos as coordenadas homogêneas de p por qualquer $\alpha > 0$. Por outro lado,

$$r \diamond (\neg p) = -(r \diamond p) \tag{3}$$

Segue-se que um ponto p está no lado positivo de r se e somente se o antípoda $\neg p$ está no lado negativo de r. Portanto, o lado positivo de r inclui um dos dois semiplanos do aquém delimitados por r, mais o semiplano *complementar* do além — bem como os pontos no infinito limítrofes desses dois semiplanos, que formam um arco de 180° limitado pelas duas direções paralelas a r. Veja a figura 6.

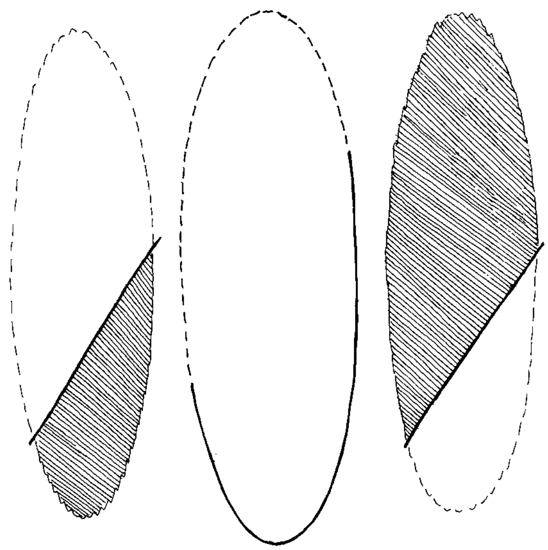

Figura 6: Os dois lados de uma reta.

3.7 As retas no infinito

Na geometria cartesiana, a equação $AX + BY + C = 0$ só define uma reta se pelo menos um dos coeficientes A e B for diferente de zero. Segue-se que uma tripla de coeficientes $\langle \mathcal{W}, \mathcal{X}, \mathcal{Y} \rangle$ define uma reta euclidiana só se $\mathcal{X} \neq 0$ ou $\mathcal{Y} \neq 0$. O que fazer então com triplas de coeficientes da forma $\langle \mathcal{W}, 0, 0 \rangle$?

Supondo $\mathcal{W} \neq 0$, um ponto $[w, x, y]$ de $\mathbb{T}^2$ satisfaz a equação $\mathcal{W}w + 0 \cdot x + 0 \cdot y = 0$ se e somente se ele é um ponto no infinito ($w = 0$). Portanto, podemos interpretar as triplas de coeficientes $\langle \mathcal{W}, 0, 0 \rangle$ com $\mathcal{W} \neq 0$ como *retas no infinito*. Qualquer dessas retas contém todos pontos no infinito, e apenas esses.

Se adotarmos para estas triplas a regra de equivalência acima, elas se reduzem a apenas duas retas distintas, $\Omega = \langle 1, 0, 0 \rangle$ e $\neg\Omega = \langle -1, 0, 0 \rangle$, que diferem apenas na sua orientação. Chamaremos estas de *retas no infinito*, em distinção das demais *retas ordinárias*.

Ex. 3.8: Qual é o lado positivo da reta Ω? E o de $\neg\Omega$?

3.8 As retas de $\mathbb{T}^2$

Observe que a "reta" com coeficientes $\langle 0, 0, 0 \rangle$ é bastante peculiar, pois ela passa por todos os pontos do plano! Para evitar maiores problemas, é melhor decretar que essa tripla de coeficientes é inválida, e não representa nenhuma reta. Em resumo:

Definição. As *retas de* $\mathbb{T}^2$ são todas as triplas reais $\langle \mathcal{W}, \mathcal{X}, \mathcal{Y} \rangle$, exceto a tripla $\langle 0, 0, 0 \rangle$; sendo que duas triplas são consideradas a mesma reta se e somente se uma for um múltiplo positivo da outra.

3.9 Retas no modelo esférico

Lembremos que o vetor unitário (w, x, y) do modelo esférico representa o ponto $[w, x, y]$ de $\mathbb{T}^2$. Portanto, os pontos de $\mathbb{T}^2$ que estão na reta $\langle \mathcal{W}, \mathcal{X}, \mathcal{Y} \rangle$ correspondem a pontos de $\mathbb{S}^2$ que satisfazem a satisfazem a equação $\mathcal{W}w + \mathcal{X}x + \mathcal{Y}y = 0$.

Esta equação define um plano de $\mathbb{R}^3$ que passa pela origem, e portanto corta a esfera num círculo de raio máximo (unitário). Ou seja, uma reta de $\mathbb{T}^2$ corresponde a um círculo máximo de $\mathbb{S}^2$; e é fácil ver que a recíproca também vale. Veja a figura 7.

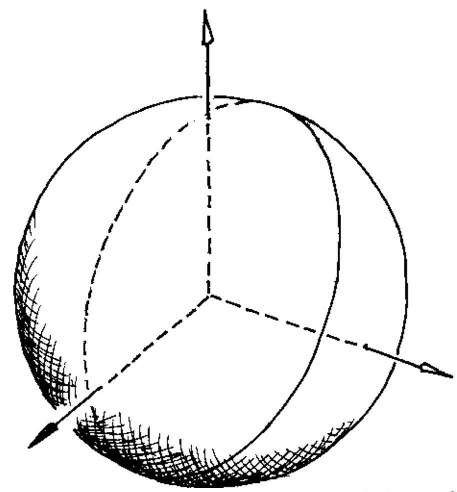

Figura 7: Uma reta no modelo esférico.

Neste modelo, os dois lados de uma reta $\langle \mathcal{W}, \mathcal{X}, \mathcal{Y} \rangle$ são os dois hemisférios definidos pelo círculo máximo correspondente; o lado positivo é o hemisfério que fica na direção do vetor $(\mathcal{W}, \mathcal{X}, \mathcal{Y})$.

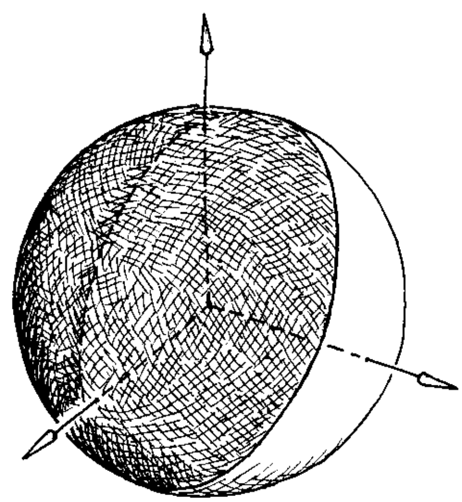

Figura 8: O lado positivo de uma reta no modelo esférico.

Ex. 3.9: Descreva geométricamente o lado positivo de cada uma destas retas:

(a) $\langle 0,1,0\rangle$.

(b) $\langle 0,0,2\rangle$.

(c) $\langle 0,-1,0\rangle$.

(d) $\langle 2,3,-4\rangle$.

Em particular, a reta no infinito Ω corresponde ao círculo máximo determinado pelo plano $w = 0$ de $\mathbb{R}^3$; o aquém e o além de $\mathbb{T}^2$ são os hemisférios com $w > 0$ e $w < 0$, respectivamente.

O modelo esférico mostra claramente que as retas no infinito, apesar de parecerem especiais, têm as mesmas propriedades de incidência que as retas ordinárias, e a mesma topologia — um círculo, que separa $\mathbb{T}^2$ em duas metades topologicamente equivalentes (dois discos discos abertos). Note, em particular, que qualquer caminho contínuo de um lado para o outro de uma reta r, mesmo através do infinito, passa obrigatoriamente por um ponto de r.

Ex. 3.10: Desenhe as seguintes retas no modelo esférico, indicando o lado positivo:

(a)	$\langle 0,1,0\rangle$	(b)	$\langle 0,0,1\rangle$	(c)	$\langle 0,1,1\rangle$
(d)	$\langle 1,2,3\rangle$	(e)	$\langle 1,3,2\rangle$	(f)	$\langle -1,2,3\rangle$
(g)	$\langle 1,-1,-1\rangle$	(h)	$\langle 2,-1,-1\rangle$	(i)	$\langle -10,1,1\rangle$

3.10 O plano projetivo clássico

Para a grande maioria dos matemáticos e geômetras, a frase *plano projetivo* significa um espaço $\mathbb{P}^2$ que contém exatamente a metade dos pontos do nosso espaço $\mathbb{T}^2$, e metade das retas.

Mais precisamente, cada par de pontos antípodas de $\mathbb{T}^2$ corresponde a um único ponto de $\mathbb{P}^2$. Algebricamente, isto equivale a dizer que $[w, x, y]$ e $[\alpha w, \alpha x, \alpha y]$ são o mesmo ponto para todo $w \neq 0$, positivo ou negativo. Da mesma forma, cada par de retas opostas de $\mathbb{T}^2$ corresponde a uma única reta de $\mathbb{P}^2$ — isto é, as retas de $\mathbb{P}^2$ não são orientadas.

O modelo plano de $\mathbb{P}^2$ consiste de uma única cópia do plano cartesiano $\mathbb{R}^2$, e de um círculo de pontos no infinito; sendo que, neste caso, os pontos infinitos nas direções d e $-d$ são considerados o mesmo ponto.

A simplicidade do plano projetivo "clássico" $\mathbb{P}^2$ tem suas vantagens. Por exemplo, as palavras "igual" e "coincidente" significam a mesma coisa, e não existe distinção entre pontos no além e no aquém. Uma trajetória em linha reta vai para o infinito numa direção d, e reaparece imediatamente no infinito na direção $-d$. Em $\mathbb{P}^2$, duas retas distintas se encontram num único ponto, e dois pontos distintos determinam uma única reta; com isto, os axiomas da geometria de $\mathbb{P}^2$ são mais próximos aos da gemetria euclidiana.

Entretanto, trabalhar no plano $\mathbb{P}^2$ também tem muitas desvantagens. Por exemplo, não há distinção entre os dois lados de uma reta, pois quaisquer dois pontos fora da reta podem ser ligados por um caminho contínuo que não cruza a reta — ou seja, toda reta tem apenas um lado. Mais ainda, em $\mathbb{P}^2$ podemos transformar quaisquer triângulo próprio para qualquer outro, de maneira contínua, sem nunca passar por um triângulo degenerado. Isto significa que não podemos definir a orientação de um triângulo. Finalmente, em $\mathbb{P}^2$ não é possível definir o segmento que liga dois pontos dados, pois existem em geral duas maneiras de se ir de um ponto para outro em linha reta, e não é possível distinguir entre essas duas alternativas de maneira consistente. Em conseqüência, não é possível distinguir o interior de um triângulo de seu exterior, e não é possível definir o conceito de figura convexa.

Outra diferença importante entre o plano projetivo clássico $\mathbb{P}^2$ não é uma superfície orientável — pois, quando transportamos um pequeno círculo orientado através do infinito, sua orientação fica invertida. Portanto não podemos definir para todo ponto p de $\mathbb{P}^2$ um sentido de rotação positivo em torno de p, de tal forma que pontos próximos têm sentidos de rotação concordantes.

A experiência mostra que a maioria dos problemas e métodos de geometria computacional que surgem na prética giram em torno dos conceitos de segmento, convexidade, interior, lado, orientação, e derivados. É por esta razão que, em computação gráfica e geometria computacional, os cálculos com coordenadas homogêneas freqüentemente supõem que os sinais das coordenadas são significativos — isto é, usam a geometria de $\mathbb{T}^2$ em vez da de $\mathbb{P}^2$.

4 Operações geométricas básicas

4.1 Dedução de fórmulas homogêneas

De modo geral, qualquer formula da geometria analítica plana pode ser adaptada para coordenadas homogêneas, bastando substituir na mesma X por x/w e Y por y/w. Naturalmente, se a fórmula descreve as coordenadas de um ponto, precisamos também trocar os parênteses da mesma por colchetes, e acrescentar uma coordenada 1 inicial (o peso). Em muitos casos é possível eliminar todas as divisões no resultado, com uma escolha adequada para o peso w.

Em princípio, fórmulas obtidas por este caminho valem apenas para pontos no aquém e retas ordinárias. Porém, às vezes a fórmula resultante pode ser utilizada também para pontos infinitos ou no além.

Numa fórmula consistente, as coordenadas homogêneas do resultado devem ser funções homogêneas das coordenadas homogêneas dos dados, no sentido matemático: $f(\lambda x_1, \lambda x_2, \ldots) = \lambda^r f(x_1, x_2, \ldots)$, para algum r e para todo λ.

4.2 Ponto médio

Por exemplo, em geometria cartesiana, sabemos que o ponto médio m do segmento com extremos $p_0 = (X_0, Y_0)$ e $p_1 = (X_1, Y_1)$ é dado por

$$m = \left(\frac{X_0 + X_1}{2}, \frac{Y_0 + Y_1}{2} \right)$$

Em termos de coordenadas homogêneas, se os extremos forem os pontos do aquém $p_0 = [w_0, x_0, y_0]$ e $p_1 = [w_1, x_1, y_1]$, esta fórmula equivale a

$$\begin{aligned} m &= \left[\ 1,\ \ \frac{x_0/w_0 + x_1/w_1}{2},\ \ \frac{y_0/w_0 + y_1/w_1}{2}\ \right] \\ &= \left[\ 1,\ \ \frac{x_0 w_1 + x_1 w_0}{2w_0 w_1},\ \ \frac{y_0 w_1 + y_1 w_0}{2w_0 w_1}\ \right] \end{aligned} \tag{4}$$

Podemos eliminar as divisões desta fórmula, multiplicando as três coordenadas homogêneas por $w_0 w_1$, o que não altera o ponto m. Obtemos assim a fórmula

$$m = [\ 2w_0 w_1,\ \ w_1 x_0 + w_0 x_1,\ \ w_1 y_0 + w_0 y_1\ ] \tag{5}$$

Ex. 4.1: Calcule as coordenadas homogêneas inteiras do ponto médio do segmento de reta no aquém com extremos $[1, 2, 3]$ e $[2, 3, 5]$.

Ex. 4.2: Calcule as coordenadas homogêneas inteiras do ponto do aquém que está a 1/3 do caminho do ponto $[1, 2, 3]$ para o ponto $[2, 3, 5]$, em linha reta.

As fórmulas (5) e (4) funcionam como esperado no aquém; mas quando os dois pontos estão no além ($w_1 < 0, w_2 < 0$), o resultado m tem as coordenadas cartesianas corretas, mas está no aquém (pois $2w_1 w_2 > 0$). O problema é que a conversão de coordenadas homogêneas para cartesianas destrói a distinção entre aquém e além. Uma maneira de preservar essa distinção é dividir as coordenadas homogêneas de p_i por $|w_i|$ em vez de w_i, e calcular a média das três coordenadas (inclusive w):

$$\begin{aligned} m &= \left[\ \frac{1}{2}\left(\frac{w_0}{|w_0|} + \frac{w_1}{|w_1|}\right),\ \frac{1}{2}\left(\frac{x_0}{|w_0|} + \frac{x_1}{|w_1|}\right),\ \frac{1}{2}\left(\frac{y_0}{|w_0|} + \frac{y_1}{|w_1|}\right)\ \right] \\ &= [\ |w_1|w_0 + |w_0|w_1,\ \ |w_1|x_0 + |w_0|x_1,\ \ |w_1|y_0 + |w_0|y_1\ ] \end{aligned} \tag{6}$$

Na seção **??** veremos uma explicação mais detalhada e geral para esta fórmula.

Ex. 4.3: O que acontece com o ponto médio de p_1 e p_2, conforme definido pela fórmula (6), se *um* dos pontos estiver no infinito? E se *ambos* estiverem no infinito?

Ex. 4.4: Qual a posição do ponto definido pela fórmula (6), se um dos pontos estiver no aquém, e o outro no além? E se ambos estiverem no além?

Ex. 4.5: Dê uma fórmula homogênea, sem divisões, para o baricentro (centro de gravidade) de um triângulo com vértices $p_i = [w_i, x_i, y_i]$, $i = 0, 1, 2$.

Ex. 4.6: Determine uma fórmula homogênea, sem divisões, para o ponto que divide o segmento $p_0 p_1$ em duas partes cujos comprimentos estão na razão $\lambda_0 : \lambda_1$. Suponha que p_0 e p_1 estão no aquém, e $\lambda_0 + \lambda_1 > 0$.

5 Colinearidade e orientação de três pontos

5.1 Teste de colinearidade

Dizemos que três pontos p_0, p_1, p_2 são *colineares* se eles pertencem a uma mesma reta. No modelo esférico, isso equivale a dizer que as coordenadas homogêneas desses pontos, interpretadas como vetores do $\mathbb{R}^3$, pertencem a um mesmo plano que passa pela origem — ou seja, são linearmente dependentes.

Sabemos, da álgebra linear, que a condição para que n vetores vetores do $\mathbb{R}^n$ sejam linearmente dependentes é que o determinante da matriz formada pelos mesmos seja nulo. Portanto, se $p_i = [w_i, x_i, y_i]$ para $i = 0, 1, 2$, a condição para que os três pontos sejam colineares é

$$\begin{vmatrix} w_0 & x_0 & y_0 \\ w_1 & x_1 & y_1 \\ w_2 & x_2 & y_2 \end{vmatrix} = 0 \tag{7}$$

Como esta forma foi deduzida com base no modelo esférico, ela vale indiferentemente para pontos no aquém, no além ou no infinito. Para pontos no aquém, dados por suas coordenadas cartesianas (X_i, Y_i), a condição 7 equivale a

$$\begin{vmatrix} 1 & X_0 & Y_0 \\ 1 & X_1 & Y_1 \\ 1 & X_2 & Y_2 \end{vmatrix} = 0$$

Ex. 5.1: Usando a fórmula (7), determine quais destas triplas de pontos são colineares:

(a) $[1, 0, 0]$, $[1, 1, 0]$, $[1, 0, 1]$.

(b) $[1, 0, 0]$, $[1, 1, 0]$, $[1, 2, 0]$.

(c) $[1, 0, 1]$, $[1, 2, 6]$, $[1, 3, 8]$.

(d) $[1, 2, 3]$, $[2, 2, 3]$, $[5, 2, 3]$.

Ex. 5.2: Demonstre *algebricamente*, usando a fórmula 7, que os pontos p_0, p_1, e p_2 são colineares em cada um dos seguintes casos:

(a) $p_0 = p_1$.

(b) p_2 é o ponto médio de p_0 e p_1.

(c) p_1, p_2 e p_0 são colineares.

Ex. 5.3: Considere três pontos móveis $p_0(t), p_1(t), p_2(t)$ no plano, cada qual se deslocando em linha reta com velocidade uniforme — ou seja, $p_i(t) = (X_i, Y_i) + t(X_i', Y_i')$, onde X_i, Y_i, X_i' e Y_i' são constantes.

(a) Mostre como calcular o instante t^* em que esses três pontos estarão alinhados.

(b) Quantas vezes essa condição ocorre, no decorrer do tempo?

6 Segmentos e triângulos

O conceito de segmento de reta é muito importante na geometria euclidiana, onde ele pode ser definido como o menor caminho entre dois pontos dados, ou os pontos de uma reta que ficam entre dois pontos da mesma. Segmentos são usados para definir outro conceito importante, o triângulo com três vértices dados.

Nesta seção veremos como daptar essas definições para a geometria projetiva orientada. Uma diferença importante entre os planos projetivos clássico ($\mathbb{P}^2$) e orientado ($\mathbb{T}^2$) é que só neste ltimo podemos definir estes conceitos sem ambigüidade.

6.1 Combinação linear e convexa

Lembremos que uma *combinação linear* de vetores $v_1, v_2, \ldots v_n$ é uma soma da forma $\alpha_0 v_0 + \alpha_1 v_1 + \cdots \alpha_n v_n$, onde os α_i são números reais.

Uma *combinação convexa* é uma combinação linear cujos coeficientes α_i são todos maiores ou iguais a zero.

6.2 Segmento de reta

Sejam $p_0 = [w_0, x_0, y_0]$ e $p_1 = [w_1, x_1, y_1]$ dois pontos não-antípodas de $\mathbb{T}^2$. Por definição, o segmento (fechado) p_0p_1 consiste de todos os pontos da forma

$$[\ \alpha_0 w_0 + \alpha_1 w_1,\ \ \alpha_0 x_0 + \alpha_1 x_1,\ \ \alpha_0 y_0 + \alpha_1 y_1\ ] \tag{8}$$

onde α_0 e α_1 são números reais não-negativos, e não ambos nulos.

Em palavras, um ponto de $\mathbb{T}^2$ pertence ao segmento p_0p_1 se e somente se suas coordenadas homogêneas são combinações convexas não nulas das coordenadas homogêneas de p_0 e p_1.

6.3 Segmento no modelo esférico

Qual o significado geométrico da fórmula (**??**)? No modelo esférico de $\mathbb{T}^2$, é fácil ver que o segmento $p_0\, p_1$ é simplesmente o caminho mais curto de p_0 a p_1 sobre a esfera. Esse caminho é sempre um arco de círculo máximo, com menos de 180° de extensão. Veja a figura 9.

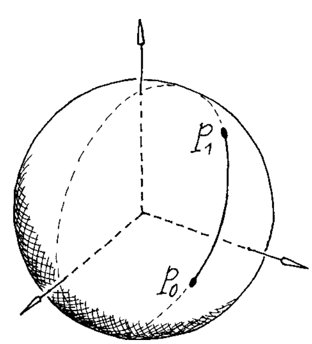

Figura 9: Um segmento no modelo esférico.

6.4 Segmento no modelo chato

Qual o significado geométrico da fórmula (8) no modelo chato? Em primeiro lugar, pode-se verificar que, se p_0 e p_1 estão ambos no aquém, a fórmula define simplesmente o segmento euclidiano do aquém ligando esses dois pontos. Veja a figura 11(a).

Missing figure tsp-seg.eps

Figura 10: Segmentos de $\mathbb{T}^2$.

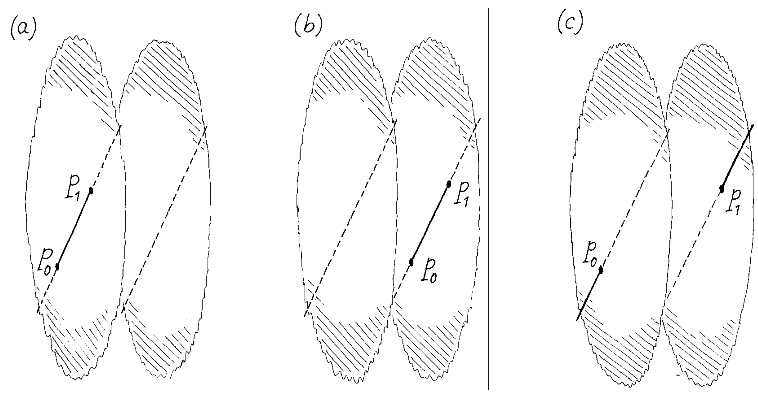

Figura 11: Segmentos no modelo plano.

Por outro lado, note que a fórmula implica que um ponto p está no segmento p_0p_1 se e somente se o antípoda $\neg p$ está no segmento $(\neg p_0)(\neg p_1)$. Concluímos daí que, se ambos os pontos estão no além, o segmento p_0p_1 é simplesmente o segmento euclidiano do além que liga os dois pontos. Veja a figura 11(b).

Quando p_0 está no aquém, e p_1 no além, a situação fica um pouco mais complicada. Nesse caso, o segmento p_0p_1 consiste de duas semi-retas: uma no aquém, saindo de p_0 na direção oposta a $\neg p_1$; e uma no além, saindo de p_1 na direção oposta a $\neg p_0$. Veja a figura 11(c).

Se um dos pontos é infinito, o segmento p_0p_1 é uma semireta com origem no ponto finito e apontando para o infinito. Veja a figura 13. Finalmente, se ambos os pontos são infinitos, o segmento é um conjunto de pontos infinitos, cobrindo um arco de direções menor que 180° entre as direções de a e b.

Missing figure tsp-ray.eps

Figura 12: Segmentos com um extremo infinito.

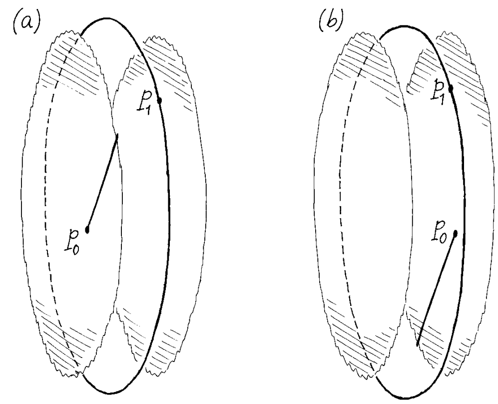

Figura 13: Segmentos com um extremo infinito.

O segmento $p_0 p_1$ só não é definido quando p_0 e p_1 são antípodas um do outro. Nesse caso, existem infinitas retas que passam por p_0 e p_1. Observe que este é o único caso em que a fórmula (8) pode dar origem á tripla inválida $[0, 0, 0]$.

Ex. 6.1: Desenhe os seguintes segmentos do plano projetivo orientado, usando as convenções gráficas da figura 2:

(a)	$[1, 1, 1]$	–	$[1, -1, -1]$.
(b)	$[+1, 0, 0]$	–	$[0, 1, 0]$.
(c)	$[-1, 0, 0]$	–	$[0, 1, 0]$.
(d)	$[1, 0, 0]$	–	$[0, -1, 0]$.
(e)	$[1, 1, 1]$	–	$[-1, 1, 1]$.
(f)	$[0, 1, 0]$	–	$[0, 0, 1]$.

6.5 Consistência da definição

Observe que o ponto descrito pela fórmula (**??**) depende não só de p_0, p_1, α_0, e α_1, mas também da escolha dos pesos de p_0 e p_1. Isto é, se multiplicarmos as coordenadas homogêneas de p_0 por um fator positivo β, o ponto descrito pela fórmula mudará de posição, pois isto equivale a multiplicar α_0 por β.

Portanto, o ponto gerado pela fórmula (**??**) para determinados valores de α_0 e α_1 não tem significado geométrico; apenas o *conjunto* de todos esses pontos — ou seja, o segmento $p_0\, p_1$ — é um conceito bem definido.

Ex. 6.2: Demonstre algebricamente que três pontos de $\mathbb{T}^2$ são colineares se e somente se dois deles são antipodais, ou se um deles está no segmento que liga os outros dois, ou se o antípoda de um deles está no segmento que liga os outros dois.

7 Triângulos

7.1 Triângulos em $\mathbb{T}^2$

Defnição. O *triângulo* determinado por três pontos de $\mathbb{T}^2$ é o conjunto de todos os pontos cujas coordenadas homogêneas são combinações convexas não nulas das coordenadas homogêneas desses pontos, desde que nenhuma combinação seja $[0,0,0]$.

Ou seja, o triângulo determinado por três pontos se $p_i = [w_i, x_i, y_i]$, para $i \in \{0,1,2\}$, é o conjunto de todos os pontos da forma

$$\begin{array}{lc} [& \alpha_0 w_0 + \alpha_1 w_1 + \alpha_2 w_2, \\ & \alpha_0 x_0 + \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2, \\ & \alpha_0 y_0 + \alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2 \quad] \end{array} \tag{9}$$

onde α_0, α_1, e α_2 são números reais não negativos, e não todos nulos.

Note que este conjunto inclui os três pontos p_0, p_1, e p_2 (os *vértices*), bem como os segmentos p_0p_1, p_1p_2, e p_2p_0 (os *lados*). A união destes três segmentos é a *fronteira* do triângulo, uma curva fechada que separa os demais pontos do triângulo (o *interior*) do seu complemento (o *exterior*).

7.2 Triângulos no modelo chato

Se os vértices estão todos no aquém, ou todos no além, os pontos definidos pela fórmula (9) estarão todos no mesmo lado do plano, e são simplesmente o triângulo euclidiano com os vértices dados. Veja a figura 14

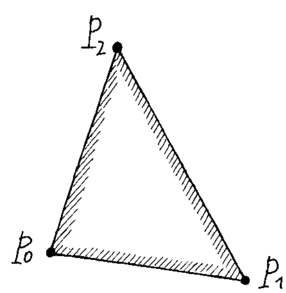

Figura 14: Um triângulo no aquém.

Se alguns vértices estiverem no aquém e outros no além o triângulo tem uma forma mais complicada, que se estende de um lado para outro do plano, através de pontos no infinito. Por exemplo, a figura 15 ilustra o triângulo com vértices $a = [1,1,0]$, $b = [1,0,2]$, e $c = [-1,1,1]$.

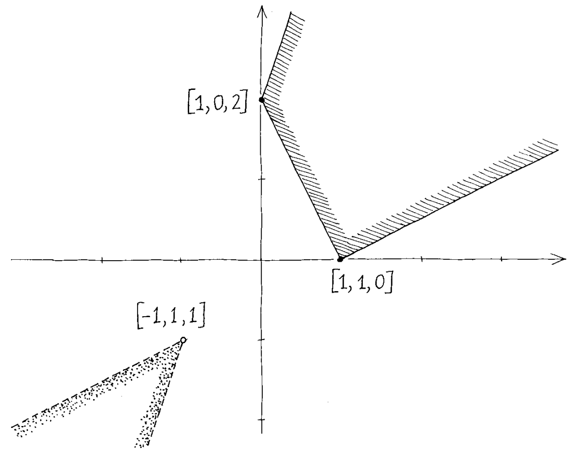

Figura 15: Um triângulo no modelo plano.

Ex. 7.1: Em cada um dos casos abaixo, desenhe o triângulo $p_0p_1p_2$, indicando seu interior com a convenção usual (hachurado no aquém, pontilhado no além):

(a) $p_0 = [1, 0, 0]$ $p_1 = [1, 1, 0]$ $p_2 = [1, 0, 1]$.

(b) $p_0 = [1, 0, 0]$ $p_1 = [0, 1, 0]$ $p_2 = [0, 0, 1]$.

(c) $p_0 = [1, 1, 0]$ $p_1 = [1, 0, 1]$ $p_2 = [-1, 1, 1]$.

(d) $p_0 = [1, 1, 0]$ $p_1 = [0, 0, 1]$ $p_2 = [-1, 1, 0]$.

(d) $p_0 = [1, 0, 0]$ $p_1 = [1, 1, 0]$ $p_2 = [0, 1, 0]$.

Ex. 7.2: Prove que o triângulo $p_0p_1p_2$ é a união de todos os segmentos da forma p_0q, onde q está no segmento p_1p_2.

A fórmula (9) pode devolver a tripla inválida $[0, 0, 0]$. Isto acontece se e somente se dois vértices são antípodas entre si, ou se o antípoda de um dos vértices está no segmento que liga os outros dois. Nestes casos o triângulo é "indefinido por definição".

Diremos que um triângulo é *degenerado* se seu interior for vazio, e *próprio* caso contrário.

Ex. 7.3: Prove que um triângulo é degenerado se e somente se um dos vértices pertence ao segmento que liga os outros dois.

7.3 Triângulos no modelo esférico

No modelo esférico, o triângulo $p_0\,p_1\,p_2$ é um *triângulo esférico* — uma região limitada por três arcos de círculo máximo, com extremos nesses pontos. Veja a figura 16.

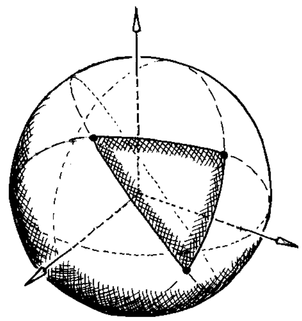

Figura 16: Um triângulo no modelo esférico.

7.4 Segmentos e triângulos no plano projetivo clássico

Ao contrário do que ocorre na geometria euclidiana e em $\mathbb{T}^2$, no plano projetivo clássico $\mathbb{P}^2$ sempre existem pelo menos duas maneiras distintas de ir de um ponto p para um ponto q ao longo da reta m que passa pelos dois. Por exemplo, se p e q são pontos finitos, uma das maneiras é usar o segmento euclideano pq. A outra maneira é usar o complemento deste segmento em relação à reta m; isto é, a semireta que vai de p até o infinito na direção oposta à de q, mais a semireta que vai de q ao infinito na direção oposta à de p. (Note que estas duas semiretas, mais o ponto no infinito da reta m, são topologicamente equivalentes a um segmento ordinário.)

O mesmo problema acontece se um dos pontos está no infinito; digamos $b = d\infty$. Neste caso, também, existem dois "segmentos" que vão de a para b — ou seja, as duas semiretas que saem de a com direções d e $-d$. No plano projetivo clássico $\mathbb{P}^2$ não é possível distinguir entre estes dois "segmentos". Ou seja, não é possivel definir **o** segmento que liga dois pontos dados.

Esta ambigüidade seria um problema para a computação gráfica, pois significa que um segmento não mais pode ser descrito pelos seus extremos. Em particular, para desenhar um segmento ordinário ab da cena, não basta projetar os pontos a e b separadamente, e desenhar o segmento ab. Dependendo da posição do observador e do plano de projeção, a imagem do segmento ab pode ser um segmento ordinário ou um par de semiretas opostas.

No plano projetivo orientado $\mathbb{T}^2$, entretanto, essa ambigüidade não existe. É verdade que a reta m que passa por a e b ainda tem a topologia de um círculo, como em $\mathbb{P}^2$, de modo que existem duas maneiras de ir de a para b ao longo da mesma. Entretanto, no plano $\mathbb{T}^2$ podemos distinguir esses dois caminhos notando que exatamente um deles passa pelos antípodas de a e b (e pelos antípodas de todos os pontos do outro caminho). Uma vez que transformações projetivas preservam retas e pares antípodas, este critério é projetivamente consistente: ou seja, a imagem do segmento ab por uma transformação projetiva é o segmento que liga as imagens de a e de b.

Pela mesma razão, no plano projetivo clássico $\mathbb{P}^2$ não é possível definir **o** triângulo que tem três vértices dados p, q, e r. Em geral, há oito maneiras de ligar esses três pontos por segmentos de retas, e quatro delas definem uma curva fechada que **não** divide o plano em interior e exterior.

8 Orientação de três pontos

8.1 Definição informal

Sejam p, q, e r três pontos (finitos) não colineares do plano euclidiano. Informalmente, definimos a *orientação* da tripla (p, q, r) como sendo o sentido — horário ou anti-horário — em que o segmento $p\,u$ roda em torno de p, quando o ponto u vai de q para r ao longo do segmento $q\,r$. Observe que a ordem dos pontos é importante. Por exemplo, a tripla $(\,(1,1),\ (3,2),\ (2,4)\,)$ tem orientação anti-horária enquanto que $(\,(1,1),\ (2,4),\ (3,2)\,)$ tem orientação horária.

Os termos *horário* e *anti-horário* pressupõem a convenção gráfica usual para o sistema de coordenadas, com o eixo Y situado a 90° do eixo X, no sentido anti-horário. Para generalizar essa definição para o plano projetivo orientado, vamos dizer primeiro que a orientação de uma tripla (p, q, r) de pontos do aquém é -1 ou $+1$, conforme a ela tenha orientação horária ou anti-horária, respectivamente. Para completar, definimos que a orientação de p, q, e r vale 0 se os três pontos são colineares.

Ex. 8.1: Determine a orientação da tripla (p_0, p_1, p_2), onde $p_0 = (0, 0)$, $p_1 = (1, 0)$, e $p_2 = (0, 1)$.

Se definirmos os vetores cartesianos $u = (X_u, Y_u) = q - p$ e $v = (X_v, Y_v) = r - p$, é fácil ver que a orientação da tripla (p, q, r) é o sinal do produto vetorial $u \times v = X_uY_v - X_vY_u$. Traduzindo essa fórmula para coordenadas hmogêneas, e eliminando denominadores (na suposição de que todos os pesos w são positivos), obtemos a seguinte fórmula, que vamos tomar como definição do conceito para quaisquer três pontos:

Definição. A orientação de uma tripla (p_0, p_1, p_2) de pontos de $\mathbb{T}^2$, onde $p_i = [w_i, x_i, y_1]$ para $i \in \{0, 1, 2\}$, é a função

$$\Delta(p_0, p_1, p_2) = \operatorname{sgn} \begin{vmatrix} w_0 & x_0 & y_0 \\ w_1 & x_1 & y_1 \\ w_2 & x_2 & y_2 \end{vmatrix} \qquad (10)$$

Ex. 8.2: Desenhe os triângulos p_0, p_1, p_2 abaixo, e determine *algebricamente* o valor de $\Delta(p_0, p_1, p_2)$, usando a fórmula (**??**), para cada um dos triângulos

(a) $p_1 = [1, 0, 0] \quad p_2 = [1, 1, 0] \quad p_3 = [1, 0, 1]$.

(b) $p_1 = [1, 0, 0] \quad p_2 = [1, 3, 2] \quad p_3 = [2, 5, 3]$.

(c) $p_1 = [1, 2, 3] \quad p_2 = [1, 4, 4] \quad p_3 = [2, 8, 9]$.

Note que a fórmula (10) não muda se substituirmos $[w_i, x_i, y_i]$ por $[\alpha w_i, \alpha x_i, \alpha y_i]$, para qualquer $\alpha > 0$. Por outro lado, se trocarmos a ordem de dois pontos, o sinal do determinante se inverte, pois estamos trocando duas linhas da matriz:

$$\Delta(p_0, p_1, p_2) = -\,\Delta(p_1, p_0, p_2) \tag{11}$$

Esse fato concorda com a intuição de que a troca de quaiquer dois pontos inverte o sentido de percurso ao longo do triângulo.

Ex. 8.3: Qual o efeito de uma permutação circular dos argumentos de Δ? Isto é, qual a relação entre $\Delta(p, q, r)$, $\Delta(q, r, p)$, e $\Delta(r, p, q)$? (Justifique tanto em termos geométricos quanto algébricos.)

Ex. 8.4: Demonstre algebricamente que os triângulos pqr, pmr e mqr têm a mesma orientação, se m for o ponto médio do segmento pq.

Outra maneira de justificar a fórmula (**??**) é observar que a troca de dois pontos inverte a orientação; e que duas triplas de pontos p_0, p_1, p_2 e q_0, q_1, q_2 possuem a mesma orientação se e somente se é possível transformar uma na outra, movendo os pontos de maneira contínua, sem que em nenhum momento eles fiquem colineares. Ora, o determinante da fórmula (**??**) é uma função contínua das coordenadas homogêneas dos pontos, cujo sinal se inverte com a troca de duas linhas, e que, como vimos na seção 5.1, é zero se e somente se os três pontos são colineares. Conclui-se daí que o sinal de Δ só muda quando a orientação muda. Para completar a demonstração, basta observar que

$$\Delta((0, 0), (1, 0), (1, 1)) = \Delta([1, 0, 0], [1, 1, 0], [1, 0, 1]) = +1$$

Apesar de deduzida para pontos no aquém, a fórmula (**??**) vale para quaisquer três pontos de $\mathbb{T}^2$.

8.2 Orientação no além

Observe que a fórmula (**??**) muda de sinal se multiplicarmos qualquer linha por -1. Portanto, se trocarmos qualquer vértice pelo seu antípoda, a orientação do triângulo se inverte. Ou seja,

$$\Delta(\neg p_0, p_1, p_2) = -\,\Delta(p_0, p_1, p_2) \tag{12}$$

Portanto,

$$\Delta(\neg p_0, \neg p_1, \neg p_2) = -\,\Delta(p_0, p_1, p_2) \tag{13}$$

Isso implica que *a orientação de um triângulo no além é oposta à do triângulo coincidente no aquém.*

Ex. 8.5: Usando as equações (11) e (12), determine a orientação dos triângulos abaixo, sabendo que $\Delta(p, q, r) = +1$:

(a) $\Delta(p, q, \neg r)$.

(a) $\Delta(p, \neg q, \neg r)$.

(a) $\Delta(p, \neg r, q)$.

(a) $\Delta(q, r, \neg p)$.

Ex. 8.6: Sejam p, q, e r três pontos distintos do plano projetivo $\mathbb{P}^2$. Na geometria projetiva clássica (não-orientada), quantos triângulos existem com esses três vértices? E na versão orientada?

8.3 Orientação no modelo esférico

No modelo esférico, a orientação positiva corresponde ao sentido da rotação de 90 graus no ponto $(1, 0, 0)$ do vetor tangente $(0, 1, 0)$ para o vetor $(0, 0, 1)$, propagado para toda a esfera. Com esta definição, podemos então verificar que $\Delta(p, q, r)$ indica o sentido em que o segmento $p\,u$ roda em torno de p, quando o ponto u vai de q para r ao longo do segmento $q\,r$. Veja a figura 17.

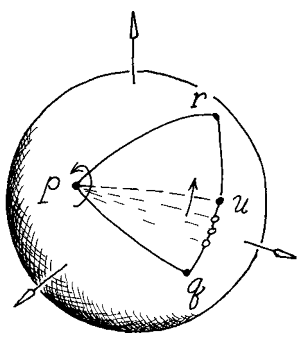

Figura 17: Orientação de um triângulo no modelo esférico.

9 Construção de retas e pontos

Nesta seção, apresentaremos operações geométricas que constroem novos objetos geométricos (pontos e retas) a partir de outros objetos dados.

9.1 Reta que passa por dois pontos

Um axioma da geometria euclidiana (e da geometria projetiva clássica) diz que quaisquer dois pontos distintos determinam uma única reta. Este axioma continua válido na geometria projetiva orientada, com duas ressalvas: os dois pontos não podem ser antípodas um do outro, e eles determinam *duas* retas, coincidentes mas com orientações opostas.

Em termos algébricos, o problema é calcular os coeficientes $\langle \mathcal{W}, \mathcal{X}, \mathcal{Y} \rangle$ da reta que contém dois pontos p_0 e p_1, dados pelas suas coordenadas homogêneas $[w_0, x_0, y_0]$ e $[w_1, x_1, y_1]$. Para isso basta usar a equação (**??**) para testar se um ponto genérico $[w, x, y]$ está na reta que passa pelos dois pontos dados:

$$\begin{vmatrix} w_0 & x_0 & y_0 \\ w_1 & x_1 & y_1 \\ w & x & y \end{vmatrix} = 0$$

Expandindo este determinante pela última linha, obtemos

$$+\begin{vmatrix} x_0 & y_0 \\ x_1 & y_1 \end{vmatrix} w - \begin{vmatrix} w_0 & y_0 \\ w_1 & y_1 \end{vmatrix} x + \begin{vmatrix} w_0 & x_0 \\ w_1 & x_1 \end{vmatrix} y = 0 \tag{14}$$

Daqui se deduz que uma das duas retas que passam por p_0 e p_1 é dada pela fórmula

$$\begin{aligned} p_0 \vee p_1 &= \left\langle\ +\begin{vmatrix} x_0 & y_0 \\ x_1 & y_1 \end{vmatrix},\ -\begin{vmatrix} w_0 & y_0 \\ w_1 & y_1 \end{vmatrix},\ +\begin{vmatrix} w_0 & x_0 \\ w_1 & x_1 \end{vmatrix}\ \right\rangle \\ &= \langle\ +x_0y_1 - x_1y_0,\ -w_0y_1 + w_1y_0,\ +w_0x_1 - w_1x_0\ \rangle \end{aligned} \tag{15}$$

Obviamente, a outra reta que passa por p_0 e p_1 é

$$\neg(p_0 \vee p_1) = \langle\ -x_0y_1 + x_1y_0,\ +w_0y_1 - w_1y_0,\ -w_0x_1 + w_1x_0\ \rangle$$

É fácil verificar que a fórmula (15) vale para quaisquer dois pontos distintos, finitos ou não. (Quando p_0 e p_1 são o mesmo ponto, o resultado é a tripla de coeficientes inválida $\langle 0, 0, 0\rangle$.)

Em particular, se p_0 é finito e p_1 infinito (isto é, $p_1 = [0, x_1, y_1]$), a fórmula acima dá a linha que passa por p_0 e é paralela ao vetor cartesiano (x_1, y_1). Se p_0 e p_1 são pontos (distintos) no infinito, o resultado é a reta no infinito $\Omega = \langle 1, 0, 0\rangle$.

Ex. 9.1: Determine as duas retas que passam pelos pontos $[1, 2, 3]$ e $[4, 5, 6]$.

Ex. 9.2: Determine a reta que passa pelo ponto do eixo X com abscissa X_0, e pelo ponto do eixo Y com ordenada Y_0.

Ex. 9.3: Determine a reta que passa pela origem e pelo ponto (X, Y).

Ex. 9.4: O que acontece com a fórmula (**??**), quando os pontos p_0 e p_1 são coincidentes?

9.2 Orientação da reta por dois pontos

A orientação da reta $p_0 \vee p_1$, definida pela fórmula (15), é conseqüência imediata da maneira como a fórmula foi obtida.

Por construção, $(p_0 \vee p_1) \diamond p$ é dada pela equação 14; de onde segue

$$(p_0 \vee p_1) \diamond p_2 = \Delta(p_0, p_1, p_2) \tag{16}$$

Portanto, o lado positivo de $p_0 \vee p_1$ consiste de todos os pontos p tais que p_0, p_1, p é um triângulo positivo.

Pode-se verificar que, se os eixos X e Y forem desenhados em sua posição convencional, de modo que o sentido positivo é anti-horário, e se os três pontos estão no aquém, então o lado positivo da reta $p_0 \vee p_1$ é o semi-plano que fica à esquerda da mesma, do ponto de vista de quem vai de p_0 a p_1 ao longo da reta.

Ex. 9.5: Mostre que a reta de p_1 a p_0 tem orientação contrária à reta de p_0 a p_1; isto é, $p_1 \vee p_0 = \neg(p_0 \vee p_1)$.

Ex. 9.6: Qual é o lado positivo da reta $p \vee (\infty d)$?

9.3 Orientação interna de uma reta

A partir da orientação externa de uma reta e do conceito de rotação positiva em torno de um ponto, podemos definir a *orientação interna* (ou *longitudinal*) da reta como sendo o sentido de percurso da mesma que circunda os pontos do seu hemisfério positivo no sentido positivo.

Dito de outra forma, se p e q são dois pontos de uma reta r, tais que $p \vee q = r$, a orientação interna de r é o sentido de percurso da mesma que corresponde a ir de p para q pelo caminho "mais curto". Por esta frase entendemos um caminho ao longo da reta que nunca passa por dois pontos coincidentes (iguais ou antípodas).

No modelo esférico, a orientação externa pode ser visualizada como uma seta t perpendicular à reta, afixada a qualquer ponto da mesma, apontando do lado negativo para o positivo. A orientação interna pode ser visualizada como uma seta u ao longo da reta, dirigida de tal forma que o sentido rotação de u para t pelo menor ângulo seja positivo.

No modelo plano, as convenções gráficas acima só podem ser usadas no caso de retas ordinárias. Neste caso, é importante observar que as duas metades da reta (aquém e além) estão orientadas no mesmo sentido, apesar de seus lados positivo e negativo estarem trocados. Ou seja, a orientação longitudinal é indicada pelo mesmo vetor unitário no aquém e no além; enquanto que a orientação transversal é indicada por vetores opostos.

Ex. 9.7: Seja r uma reta ordinária, desenhada no modelo plano, com sua orientação longitudinal indicada por uma seta. Dê uma regra geométrica para determinar a orientação transversal de r, no aquém e no além, a partir da orientação longitudinal. (Suponha que os eixos X e Y têm as direções convencionais.)

Ex. 9.8: Desenhe cada uma das retas abaixo, no modelo plano de $\mathbb{T}^2$, indicando por meio de setas as orientações transversal e longitudinal, tanto no aquém quanto no além :

(a) $\langle 0, 1, 0\rangle$;

(b) $\langle -2, 3, 5\rangle$;

(c) $\langle 2, -3, -5\rangle$;

(d) $\langle 2, 3, 5\rangle$.

Ex. 9.9: Descreva geometricamente a orientação longitudinal da reta $\Omega = \langle 1, 0, 0\rangle$, nos modelos planos e esférico.

Ex. 9.10: Descreva geometricamente relação entre as orientações longitudinais das reta r e $\neg r$.

Note que, apesar dos pontos e retas no infinito parecerem especiais no modelo plano, no modelo esférico eles são perfeitamente equivalentes aos pontos finitos e retas ordinárias. Como veremos, esta uniformidade — *homogeneidade* — dos elementos de $\mathbb{T}^2$ se reflete na manipulação algébrica de suas coordenadas homogêneas.

Uma manifestação dessa homogeneidade é o fato que, no plano $\mathbb{T}^2$, *duas retas não-coincidentes se interceptam em dois pontos antipodais.* Simetricamente, em $\mathbb{T}^2$ *dois pontos não-coincidentes determinam exatamente duas retas, opostas entre si.* Estas propriedades valem para todos os tipos de pontos — finitos ou infinitos, no aquém ou no além — e para todos os tipos de retas — ordinárias ou no infinito, paralelas ou não.

Note a semelhança entre estas propriedades e os dois principais axiomas da geometria euclidiana; "por dois pontos distintos passa uma única reta", e "duas retas distintas e não paralelas se encontram num único ponto". As diferenças mais óbvias entre as duas formulações são quase que uma questão de nomenclatura — cada cada ponto da geometria euclidiana é desdobrado em dois pontos de $\mathbb{T}^2$, o mesmo acontecendo com as retas. Uma diferença mais significativa é que, graças aos pontos no infinito, o caso das retas paralelas não é mais excepcional.

9.4 Reta por pontos no infinito

A fórmula (**??**) vale para quaisquer dois pontos — no aquém, no além, ou infinitos — que não sejam iguais ou antípodas entre si. Esta flexibilidade é útil, por exemplo, quando queremos calcular os coeficientes da reta r que passa por um ponto finito $p = [w_p, x_p, y_p]$ e é paralela a um certo vetor $d = (x_d, y_d)$. A reta desejada contém o ponto infinito $\infty d = [0, x_d, y_d]$; ou seja, $r = p \vee (\infty d)$. Portanto, não precisamos desenvolver (e programar) uma fórmula especial para este problema; basta usar a fórmula (15), da reta $p_0 \vee p_1$, com $p_0 = p$ e $p_1 = \infty d$.

Ex. 9.11: Determine os coeficientes da reta que passa por $[2, 3, 4]$ e é paralela ao vetor $(-2, 3)$.

Ex. 9.12: Determine a fórmula geral explícita para os coeficientes da reta que passa pelo ponto cartesiano (X, Y) e faz um ângulo anti-horário de θ radianos com o eixo X.

Ex. 9.13: Qual é a orientação da reta $p \vee (\infty d)$? (Isto é, qual é o lado positivo dessa reta?)

Ex. 9.14: Diga como calcular os coeficientes da reta que passa por um ponto finito $p = [w_p, x_p, y_p]$ e é *perpendicular* a um vetor cartesiano $d = (x_d, y_d)$.

Ex. 9.15: O que acontece com a reta $p_0 \vee p_1$ (fórmula (15)), quando os pontos p_0 e p_1 são ambos infinitos?

9.5 Retas concorrentes

A condição para que *três* retas distintas $m_i = \langle \mathcal{W}_i, \mathcal{X}_i, \mathcal{Y}_i \rangle$ $(i = 0, 1, 2)$ se encontrem num mesmo ponto é que o sistema de equações

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \mathcal{W}_0 w + \mathcal{X}_0 x + \mathcal{Y}_0 y & = & 0 \\ \mathcal{W}_1 w + \mathcal{X}_1 x + \mathcal{Y}_1 y & = & 0 \\ \mathcal{W}_2 w + \mathcal{X}_2 x + \mathcal{Y}_2 y & = & 0 \end{array} \right.$$

tenha pelo menos solução para o ponto $[w, x, y]$, além da solução trivial nula $[0, 0, 0]$ (que não corresponde a nenhum ponto). Segundo a teoria de sistemas lineares, isto só é possível se a matriz de coeficientes do sistema for singular; isto é, se

$$\begin{vmatrix} \mathcal{W}_0 & \mathcal{X}_0 & \mathcal{Y}_0 \\ \mathcal{W}_1 & \mathcal{X}_1 & \mathcal{Y}_1 \\ \mathcal{W}_2 & \mathcal{X}_2 & \mathcal{Y}_2 \end{vmatrix} = 0 \tag{17}$$

9.6 Orientação de três retas

Assim como no caso do teste de colinearidade de três pontos, o teste de concorrência de três retas — equação (17) — pode ser estendido para distinguir a orientação relativa de três retas que não são concorrentes. Especificamente, definimos

$$\Delta(m_0, m_1, m_2) = \operatorname{sgn} \begin{vmatrix} \mathcal{W}_0 & \mathcal{X}_0 & \mathcal{Y}_0 \\ \mathcal{W}_1 & \mathcal{X}_1 & \mathcal{Y}_1 \\ \mathcal{W}_2 & \mathcal{X}_2 & \mathcal{Y}_2 \end{vmatrix} \tag{18}$$

Seja t_{+++} a intersecção dos lados positivos das retas m_0, m_1, e m_2. No modelo esférico pode-se ver que, se as retas não são concorrentes, este conjunto não é vazio; trata-se de um triângulo cujos lados são arcos de círculo menores que 180 graus, cada qual provindo de uma reta diferente. Considere um percurso do perímetro desse triangulo, que circunda qualquer ponto de t_{+++} no sentido anti-horário, começando pelo lado contido em m_0. Verifica-se que o valor de $\Delta(m_0, m_1, m_2)$ é $+1$ caso as três retas ocorram na ordem m_0, m_1, m_2, e -1 caso a ordem seja m_0, m_2, m_1. Veja a figura **??**.

9.7 Intersecção de duas retas

Considerando o modelo esférico, é evidente que duas retas m_1, m_2 que não são coincidentes (isto é, nem iguais nem opostas) se encontram em dois pontos, antípodas entre si.

Observe-se que um ponto p está na intersecção das retas m_1 e m_2 se e somente se ele está em qualquer reta $m = \langle \mathcal{W}, \mathcal{X}, \mathcal{Y} \rangle$ que seja concorrente com m_1 e m_2. Portanto, as coordenadas de p podem ser obtidas a partir da equação (17), se m_0 for substituída pela reta genérica m. Ou seja, temos $m \diamond p = 0$ se e somente se

$$\begin{vmatrix} \mathcal{W} & \mathcal{X} & \mathcal{Y} \\ \mathcal{W}_1 & \mathcal{X}_1 & \mathcal{Y}_1 \\ \mathcal{W}_2 & \mathcal{X}_2 & \mathcal{Y}_2 \end{vmatrix} = 0 \tag{19}$$

Expandindo o determinante pela primeira linha obtemos

$$m \diamond p = 0 \quad \equiv \quad +\mathcal{W} \begin{vmatrix} \mathcal{X}_1 & \mathcal{Y}_1 \\ \mathcal{X}_2 & \mathcal{Y}_2 \end{vmatrix} - \mathcal{X} \begin{vmatrix} \mathcal{W}_1 & \mathcal{Y}_1 \\ \mathcal{W}_2 & \mathcal{Y}_2 \end{vmatrix} + \mathcal{X} \begin{vmatrix} \mathcal{W}_1 & \mathcal{X}_1 \\ \mathcal{W}_2 & \mathcal{X}_2 \end{vmatrix} \quad = \quad 0 \tag{20}$$

Uma vez que esta equação deve valer para qualquer reta m concorrente com m_1 e m_2, concluímos que os determinantes $2x2$ acima, com os respectivos sinais, são as coordenadas de um ponto p que está nas duas retas. Definimos portanto o *ponto onde* m_1 *encontra* m_2 como sendo

$$m_1 \wedge m_1 \;=\; \left[\; +\begin{vmatrix} \mathcal{X}_1 & \mathcal{Y}_1 \\ \mathcal{X}_2 & \mathcal{Y}_2 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} \mathcal{W}_1 & \mathcal{Y}_1 \\ \mathcal{W}_2 & \mathcal{Y}_2 \end{vmatrix}, \; +\begin{vmatrix} \mathcal{W}_1 & \mathcal{X}_1 \\ \mathcal{W}_2 & \mathcal{X}_2 \end{vmatrix} \;\right] \tag{21}$$

Ex. 9.16: Usando a fórmula 21, determine o ponto de encontro $r \wedge s$ para os seguintes pares de retas:

(a) $r = \langle 0,1,0\rangle$ $s = \langle 0,0,1\rangle$

(b) $r = \langle 0,0,1\rangle$ $s = \langle 0,1,0\rangle$

(c) $r = \langle 1,3,5\rangle$ $s = \langle 2,4,6\rangle$

(d) $r = \langle 1,3,5\rangle$ $s = \langle 1,0,0\rangle$

(d) $r = \langle 1,3,5\rangle$ $s = \langle 2,3,5\rangle$

Ex. 9.17: Determine o ponto de encontro das retas que passam pelos pontos de abscissa $+1$ e -1 do eixo X, e formam ângulos α e β com o mesmo, respectivamente.

Ex. 9.18: Sejam m_1, m_2 duas retas não coincidentes de $\mathbb{T}^2$. Suponha que m_1 (percorrida na sua orientação longitudinal) entra no lado positivo de m_2 no ponto p_{ent}, e sai no ponto $p_{\mathrm{sai}} = \neg p_{\mathrm{ent}}$, Qual dos dois pontos é $m_1 \wedge m_2$?

Ex. 9.19: Sejam m_1, m_2 duas retas não coincidentes de $\mathbb{T}^2$, e p_+, p_- os dois pontos de intersecção. Considere o modelo esférico, e suponha que é possível transformar a reta m_1 na reta m_2 (incluindo posição e orientação), rodando m_1 em torno do eixo p_+–p_- por um ângulo menor que 180 graus — sendo que o sentido de rotação é positivo (anti-horário) no ponto p_+, e negativo (horário) no ponto p_-. Qual dos dois pontos é $m_1 \wedge m_2$?

Ex. 9.20: O que acontece com a fórmula (**??**), quando as retas r_1 e r_2 coincidem (são iguais ou opostas)?

Ex. 9.21: A partir da fórmula (**??**), mostre que

$$(\neg r_1) \wedge r_2 = r_1 \wedge (\neg r_2) = \neg(r_1 \wedge r_2)$$

Ex. 9.22: A partir da fórmula (**??**), mostre que

$$r_2 \wedge r_1 = \neg(r_1 \wedge r_2)$$

Ex. 9.23: (a) Mostre que, se $\Delta(p,q,r) = +1$, então $(p \vee q) \wedge (q \vee r) = q$. (b) Qual é o resultado desta fórmula se $\Delta(p,q,r) = -1$?

9.8 Intersecção de retas paralelas

Na geometria euclidiana (ou cartesiana) clássica, retas paralelas nunca se encontram. Na geometria projetiva orientada, duas retas ordinárias r_1, r_2 são paralelas se e somente se elas se encontram no infinito — especificamente, nos dois pontos $\infty(\pm d)$, onde d é qualquer vetor paralelo às duas retas.

A fórmula (**??**), que dá a intersecção $r_1 \wedge r_2$ de duas retas r_1 e r_2, funciona mesmo quando as duas retas são paralelas, e dá como resultado um desses dois pontos no infinito. Esta é uma grande vantagem prática da representação homogênea sobre a cartesiana, pois quase sempre elimina a necessidade de tratamento especial para esse caso.

Ex. 9.24: Se $r = \langle \mathcal{W}, \mathcal{X}, \mathcal{Y} \rangle$ é uma reta ordinária, obviamente $r \wedge \Omega$ é um dos dois pontos infinitos de r. Qual deles? (Responda em termos geométricos, e não algébricos.)