# MC909 – Computação Gráfica



**Primeiro Semestre de 1995**

## Notas de Aula – Fascículo 1

# Elementos de Geometria Projetiva

## 1.1 Coordenadas cartesianas

Uma maneira óbvia de representar um ponto no computador é através de suas coordenadas cartesianas: um par de números reais $(X, Y)$, medidos ao longo de dois eixos ortogonais em relação a alguma origem fixa.

Coordenadas cartesianas, apesar de bem conhecidas e bastante usadas, tem certas desvantagens do ponto de vista algoritmico. A principal é que elas não suportam o conceito de pontos no infinito. Esta limitação obriga os algoritmos geométricos a tratar separadamente muitos casos particulares.

Por exemplo, suponha que um algoritmo precisa calcular a intersecção de duas retas. Na geometria cartesiana, temos que considerar três casos diferentes: as retas coincidem (têm infinitos pontos em comum), são paralelas (não têm nenhum ponto em comum), ou estão em posição genérica (têm exatamente um ponto em comum). Se tivéssemos uma representação adequada para pontos no infinito, poderíamos em princípio tratar os dois últimos casos como um só.

Ou, então, suponha que queremos calcular a intersecção de dois ou mais semi-planos dados. O resultado "ordinário" dessa operação é um polígono. Na geometria cartesiana, entretanto, temos que considerar vários casos "excepcionais": a intersecção pode ser uma faixa limitada por duas retas paralelas, ou uma região infinita limitada por duas semi-retas e alguns segmentos, etc. Sem o conceito de pontos no infinito, precisamos inventar representações especiais, e portanto algoritmos especiais, para tratar cada um desses casos.

Mais adiante encontraremos outras desvantagens da geometria cartesiana, como por exemplo a falta de uma correspondência perfeita (dualidade) entre pontos e retas, ou a inconveniência da representação de transformações geométricas.

Devido às razões acima, em geometria computacional ecomputação gráfica é quase sempre mais conveniente trabalhar com uma representação mais sofisticada de pontos e retas, que descreveremos no restante deste fascículo.

## 1.2 Coordenadas homogêneas

Por definição, se $(X, Y)$ são as coordenadas cartesianas de um ponto de $\mathbb{R}^2$, as *coordenadas homogêneas* desse ponto são uma tripla de números reais $[w, x, y]$, tais que $X = x/w$ e $Y = y/w$.

A coordenada $w$ é chamada de *peso*, e por enquanto vamos supor que ela é estritamente positiva. Repare na notação: usaremos sempre parênteses $(*, *)$ para coordenadas cartesianas, e colchetes $[*, *, *]$ para coordenadas homogêneas.

A definição acima implica que um mesmo ponto de $\mathbb{R}^2$ pode ser representado por muitas triplas de coordenadas homogêneas. Assim, por exemplo, $[1, 2, 5]$, $[2, 4, 10]$, e $[0.03, 0.06, 0.15]$ são todos o mesmo ponto, cujas coordenadas cartesianas são $(2, 5)$.

Em geral, o par cartesiano $(X, Y)$ corresponde a todas as triplas homogêneas $[w, wX, wY]$ com $w > 0$; em particular, a $[1, X, Y]$.

Observe que as coordenadas homogêneas $w, x, y$ de um ponto não tem significado individual; apenas as razões $x/w$ e $y/w$ tem sentido.

**Ex. 1.1:** Traduza os seguintes pontos de coordenadas cartesianas para homogêneas:

(a) $(0, 0)$ (b) $(1, 0)$

(c) $(0, 1)$ (d) $(5, 6)$

**Ex. 1.2:** Traduza os seguintes pontos de coordenadas homogêneas para cartesianas:

| | | |
|---|---|---|
| (a) $[1,0,0]$ | (b) $[1,1,0]$ | (c) $[1,0,1]$ |
| (d) $[1,2,3]$ | (e) $[2,5,6]$ | (f) $[2,0,0]$ |

**Ex. 1.3:** Escreva o ponto $(1/2, 3/5)$ em coordenadas homogêneas *inteiras*.

**Ex. 1.4:** O que acontece com o ponto $[w, x, y]$ quando $x$ e $y$ permanecem constantes, e o peso $w$ tende para 0? E quando $w$ tende para $+\infty$?

**Ex. 1.5:** Descreva a trajetória do ponto $[1+t^2, 1-t^2, 2t]$ quando $t$ varia de $-\infty$ a $+\infty$.

### 1.2.1 Pontos infinitos

Observe que quando o peso $w$ tende para zero, com $x$ e $y$ fixos, o ponto $[w, x, y]$ tende a se afastar infinitamente da origem, na direção do vetor $(x, y)$.

É natural portanto considerar uma tripla homogênea $[0, x, y]$, com peso nulo, como sendo um ponto infinitamente distante da origem — um *ponto infinito* — na direção do vetor $(x, y)$. Denotaremos esse ponto por $\infty(x, y)$.

O comprimento do vetor $(x, y)$ é irrelevante, desde que não seja zero; isto é, as coordenadas $[0, \alpha x, \alpha y]$ representam o mesmo ponto infinito, para todo $\alpha > 0$. (Note que esta é a mesma equivalência de coordenadas homogêneas que vale para pontos ordinários.) Por outro lado, o sentido do vetor é importante; isto é, as triplas $[0, x, y]$ e $[0, -x, -y]$ representam pontos infinitos distintos. Diremos que estes dois pontos infinitos são *antipodais*, e que um é o *antípoda* do outro.

A tripla $[0, 0, 0]$ é um caso especial. A experiência mostra que não vale a pena tentar interpretá-la como um ponto; é melhor decretar que essa tripla é inválida.

**Ex. 1.6:** Escreva as coordenadas homogêneas do ponto infinito cuja direção faz um ângulo de $\theta$ radianos com o eixo das abscissas.

### 1.2.2 O outro lado do plano

Se as triplas homogêneas $[w, x, y]$ com peso $w$ positivo são pontos de $\mathbb{R}^2$, e as com peso nulo são pontos infinito, que significado podemos dar para as triplas com peso negativo?

Por estranho que pareça, é melhor interpretar essas triplas como pontos que, tendo passado "além do infinito", foram parar no "outro lado" do plano.

Informalmente vamos imaginar que o plano é uma folha infinita de papel translúcido; e que, para cada posição $(X, Y)$, existem dois pontos do plano, sobrepostos mas distintos: um na frente da folha, e outro no verso. Com já foi dito, uma tripla homogênea $[w, x, y]$ com $w \neq 0$ descreve um ponto de coordenadas cartesianas $(x/w, y/w)$; sendo que o ponto está na frente da folha se $w > 0$, e no verso se $w < 0$. Diremos que o primeiro está no *aquém* e segundo no *além*.

Diremos também que esses dois pontos são *coincidentes* mas não iguais, e que um é o *antípoda* do outro. Em geral, denotaremos o antípoda de um ponto $p$ por $\neg p$: ou seja, $\neg[w, x, y] = [-w, -x, -y]$. Esta definição vale igualmente para pontos no aquém, no além, ou no infinito; em particular, $\neg[0, x, y] = [0, -x, -y]$.

Note que continua válida a regra que $[w, x, y] = [\alpha w, \alpha x, \alpha y]$, para todo $\alpha > 0$.

**Ex. 1.7:** Para cada um dos pontos seguintes, dê as coordenadas cartesianas, e diga se o ponto está no aquém ou no além:

(a) $[1, -2, 3]$ (b) $[1, 2, -3]$ (c) $[-1, 2, 3]$

(d) $[-1, -2, -3]$ (e) $[1, 0, 0]$ (f) $[-1, 0, 0]$

**Ex. 1.8:** Dê coordenadas homogêneas para os pontos do aquém e do além cujas coordenadas cartesianas são:

(a) $(0, 0)$ (b) $(2, 3)$ (c) $(-2, -3)$ (d) $(-2, 3)$

**Ex. 1.9:** Qual a relação geométrica entre os pontos $[w, x, y]$ e $[-w, x, y]$? (Suponha $w > 0$.)

**Ex. 1.10:** Sejam $w$ $x$, e $y$ números reais não nulos. Considere as oito triplas homogêneas $[\alpha w, \beta x, \gamma y]$, onde $\alpha, \beta, \gamma \in \{+1, -1\}$. Quantos pontos distintos estão representados por essas triplas? Quais pares de pontos são antipodais?

## 1.3 O plano projetivo orientado $\mathbb{T}^2$

Ao usarmos coordenadas homogêneas em vez de coordenadas cartesianas, estamos trocando o plano cartesiano $\mathbb{R}^2$ por um espaço estritamente maior, que que chamaremos de *plano projetivo orientado* e denotaremos por $\mathbb{T}^2$. (O índice 2 indica a dimensão do espaço.)

Algebricamente, o conjunto de pontos do espaço $\mathbb{T}^2$ consiste de todas as triplas de números reais $[w, x, y]$, exceto a tripla $[0, 0, 0]$; sendo que duas triplas são consideradas equivalentes se e somente se uma for um múltiplo positivo da outra.

### 1.3.1 O modelo plano de $\mathbb{T}^2$

Podemos visualizar o espaço $\mathbb{T}^2$ através do seu *modelo plano*, que consiste de duas cópias do plano cartesiano $\mathbb{R}^2$ (o aquém e o além), mais uma cópia do círculo unitário $\mathbb{S}^1$ (os pontos infinitos). Veja a figura 1.1.

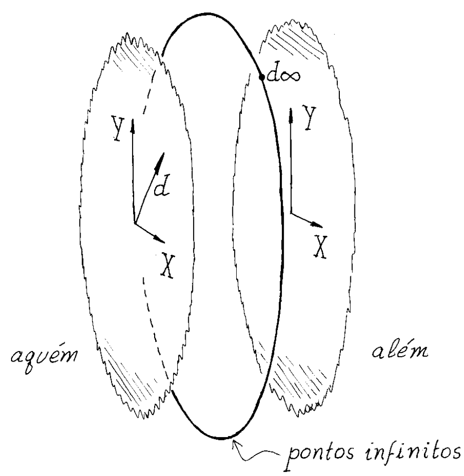


Figura 1.1: O plano projetivo de dois lados.

Lembremos que o ponto $[w, x, y]$ está no aquém se $w > 0$, e no além se $w < 0$; em ambos os casos, suas coordenadas cartesianas são $(x/w, y/w)$. O ponto é infinito se $w = 0$; nesse caso, sua direção, relativa a pontos do aquém, é a do vetor $(x, y)$.

É importante observar que a direção de um ponto infinito $p = [0, x, y]$ depende do lado do plano que é usado como referência. Isto é, o ponto $p$ é o limite a que chegamos se andarmos uma distância infinita na direção do vetor $(x, y)$, *partindo-se de qualquer lugar no aquém.* Entretanto, se partirmos de um lugar no *além*, para atingir esse mesmo ponto $p$ temos que andar na direção opsta, do vetor $(-x, -y)$.

Em geral, as ilustrações de figuras geométricas de $\mathbb{T}^2$ que se seguem serão baseadas neste modelo plano. Pontos com mesmas coordenadas cartesianas serão desenhados sobrepostos; para distinguir os dois lados do plano, usaremos pontos cheios ($\bullet$), linhas cheias, e áreas hachuradas para o aquém, e pontos vazios ($\circ$), linhas tracejadas, e áreas pontilhadas para o além. Veja a figura 1.2.

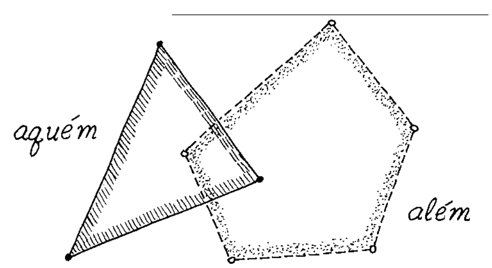


Figura 1.2: Convenções gráficas para os dois lados do plano.

**Ex. 1.11:** Desenhe os dois triângulos cujos vértices são dados a seguir, segundo as convenções da figura 1.2.

(a) $[1, 0, 0]$ $[1, 2, 0]$ $[2, 3, 5]$

(b) $[-1, 1, 0]$ $[-1, 2, 2]$ $[-1, 2, -3]$

**Ex. 1.12:** Usando as convenções da figura 1.2, desenhe a trajetória dos pontos abaixo, quando $t$ varia conforme indicado:

(a) $[1/t, 1, 2]$, para $t$ de 1 a 0;

(b) $[-1/t, 1, 2]$, para $t$ de 1 a 0;

(c) $[1, 1 + t, 2 + 3t]$, para $t$ de 0 a $+\infty$;

(d) $[t, 1 + t, 2 + 3t]$, para $t$ de $-1$ a $+1$.

### 1.3.2 O modelo esférico de $\mathbb{T}^2$

Outra maneira de visualizar o espaço $\mathbb{T}^2$ é através de seu *modelo esférico*, que consiste na superfície $\mathbb{S}^2$ da esfera unitária de $\mathbb{R}^3$ com centro na origem.

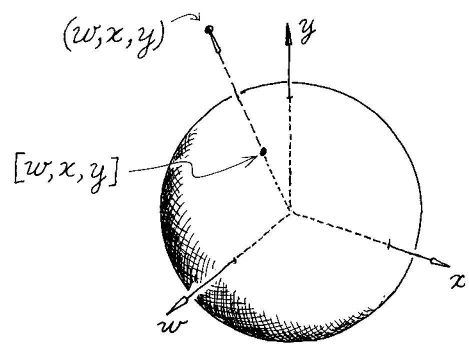


Figura 1.3: O modelo esférico de $\mathbb{T}^2$.

Neste modelo, o ponto de $\mathbb{T}^2$ com coordenadas homogêneas $[w, x, y]$ é representado pelo ponto da esfera com coordenadas cartesianas

$$\frac{(w, x, y)}{\sqrt{w^2 + x^2 + y^2}}$$

Ou seja, $[w, x, y]$ é representado pela projeção do ponto $(w, x, y)$ de $\mathbb{R}^3$ sobre a esfera, na direção do centro da mesma. Veja a figura 1.3.

O aquém e o além de $\mathbb{T}^2$ correspondem portanto aos hemisférios de $\mathbb{S}^2$ com $w > 0$ e $w < 0$, respectivamente. A origem $(0, 0)$ do aquém é o ponto $(1, 0, 0)$ da esfera; e a do além é $(-1, 0, 0)$. Os pontos no infinito de $\mathbb{T}^2$ estão no círculo onde a esfera é cortada pelo plano $w = 0$ de $\mathbb{R}^3$.

Observe que, neste modelo, um ponto $p$ e seu antípoda $\neg p$ estão sempre diametralmente opostos na esfera.

**Ex. 1.13:** Indique graficamente a posição dos seguintes pontos no modelo esférico de $\mathbb{T}^2$..

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| (a) | $[1, 0, 0]$ | (b) | $[-1, 0, 0]$ | (c) | $[1, 1, 0]$ |
| (d) | $[2, 3, 5]$ | (e) | $[2, -3, -5]$ | (f) | $[-2, 3, 5]$ |
| (g) | $[0, 3, 5]$ | (h) | $[0, -3, -5]$ | (i) | $[0, 3, -5]$ |

### 1.3.3 Correspondência entre os modelos

A correspondência entre o modelo esférico e o modelo plano, definida implicitamente pelas coordenadas homogêneas, equivale à projeção de cada hemisfério de $\mathbb{S}^2$ ($w > 0$ e $w < 0$) na cópia correspondente de $\mathbb{R}^2$ (aquém ou além).

Em ambos os casos, devemos imaginar a cópia de $\mathbb{R}^2$ como um plano tangente à esfera $\mathbb{S}^2$, com sua origem no ponto $(1, 0, 0)$ da mesma, e com seus eixos paralelos aos eixos $x$ e $y$ de $\mathbb{R}^3$.

No caso do aquém, projetamos o hemisfério $w > 0$ no plano, a partir do centro da esfera. Veja a figura 1.4(a).

No caso do além, projetamos o hemisfério $w < 0$ sobre o plano *através* do centro da esfera. Veja a figura 1.4(b). Observe como esta projeção faz com que o além do modelo esférico fique rodado de 180° em relação ao além do modelo plano.

Finalmente, lembremos que os pontos infinitos (com $w = 0$) são representados em ambos os modelos por uma cópia do círculo unitário:

$$\Big\{(x, y) \;:\; x^2 + y^2 = 1\Big\} \qquad \text{(modelo plano)}$$

$$\Big\{(0, x, y) \;:\; x^2 + y^2 = 1\Big\} \qquad \text{(modelo esférico)}$$

A correspondência entre estes dois círculos é a óbvia.

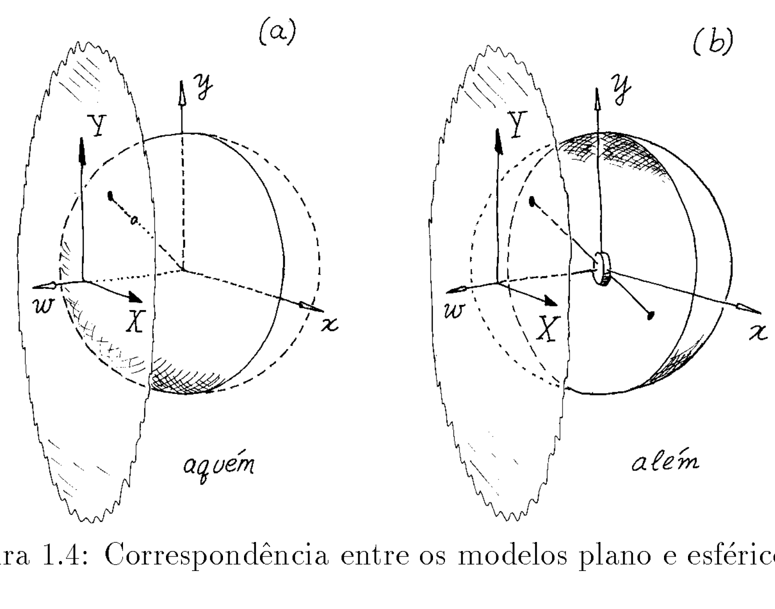


Figura 1.4: Correspondência entre os modelos plano e esférico de $\mathbb{T}^2$.

# 1.4 Retas

## 1.4.1 Equação homogênea da reta

Em geometria analítica aprendemos que uma linha reta do plano é definida por três coeficientes $A, B, C$, tais que um ponto genérico $p$ de coordenadas cartesianas $(X, Y)$ está na reta se e somente $AX + BY + C = 0$.

Traduzindo esta equação para coordenadas homogêneas, concluímos que um ponto finito $p = [w, x, y]$ está nessa reta se e somente se $A(x/w) + B(y/w) + C = 0$, isto é, $Ax + By + Cw = 0$.

Esta fórmula fica mais elegante se rebatizarmos os coeficientes $A$, $B$, e $C$ de $\mathcal{X}$, $\mathcal{Y}$, e $\mathcal{W}$, e colocarmos $\mathcal{W}$ em primeiro lugar. Desta forma, podemos dizer que uma linha é definida por três *coeficientes homogêneos* $\langle \mathcal{W}, \mathcal{X}, \mathcal{Y} \rangle$, sendo que o ponto genérico $p = [w, x, y]$ está nessa linha se e somente $\mathcal{W}w + \mathcal{X}x + \mathcal{Y}y = 0$.

Por exemplo, a linha $\langle 1, 2, 3 \rangle$ passa por todos os pontos $[w, x, y]$ tais que $1w + 2x + 3y = 0$; ou, em termos cartesianos, todos os pontos $(X, Y)$ tais que $2X + 3Y + 1 = 0$.

**Ex. 1.14:** Escreva a equação cartesiana da reta com coeficientes homogêneos $\langle 2, 3, 5 \rangle$.

**Ex. 1.15:** Escreva os coeficientes homogêneos da reta cuja equação cartesiana é $3X - 2Y = 6$.

**Ex. 1.16:** Quais são os coeficientes homogêneos dos eixos cartesianos $X$ e $Y$?

**Ex. 1.17:** Determine as condições algébricas sobre os coeficientes $\langle \mathcal{W}, \mathcal{X}, \mathcal{Y} \rangle$ que caracterizam:

(a) retas horizontais;

(b) retas verticais;

(c) retas que passam pela origem.

Observe que a "reta" com coeficientes $\langle 0, 0, 0 \rangle$ é bastante peculiar, pois ela passa por todos os pontos do plano! Para evitar maiores problemas, é melhor decretar que essa tripla de coeficientes é inválida, e não representa nenhuma reta.

### 1.4.2 Os pontos no infinito de uma reta

Note que a equação homogênea da reta $\mathcal{W}w + \mathcal{X}x + \mathcal{Y}y = 0$ não é satisfeita apenas por pontos finitos, mas também pelos pontos infinitos $[0, \mathcal{Y}, -\mathcal{X}]$ e $[0, -\mathcal{Y}, \mathcal{X}]$. Estes são justamente os pontos infinitos nas duas direções paralelas à reta. Ou seja, toda reta paralela a um vetor $d = (x, y)$ contém os pontos infinitos $\infty d = [0, x, y]$ e $\infty(-d) = [0, -x, -y]$.

**Ex. 1.18:** Determine os dois pontos infinitos da reta $\langle 2, 3, 5 \rangle$.

Note que duas retas de $\mathbb{R}^2$ são paralelas entre si se e somente as retas correspondentes de $\mathbb{T}^2$ passam pelos mesmos pontos no infinito.

### 1.4.3 Retas no além

Observe que a equação $\mathcal{W}w+\mathcal{X}x+\mathcal{Y}y = 0$, que define quando um ponto pertence a uma reta, continua válida se negarmos as três coordenadas $w, x, y$ do ponto simultaneamente. Portanto, se uma reta passa por um ponto $p$, ela também passa pelo seu antípoda $\neg p$.

Ou seja, uma reta de $\mathbb{T}^2$ é representada no modelo plano por *duas* retas euclidianas superpostas, uma no aquém e uma no além, com os mesmos coeficientes cartesianos; mais dois pontos infinitos, nas duas direções paralelas às retas. Veja a figura 1.5.

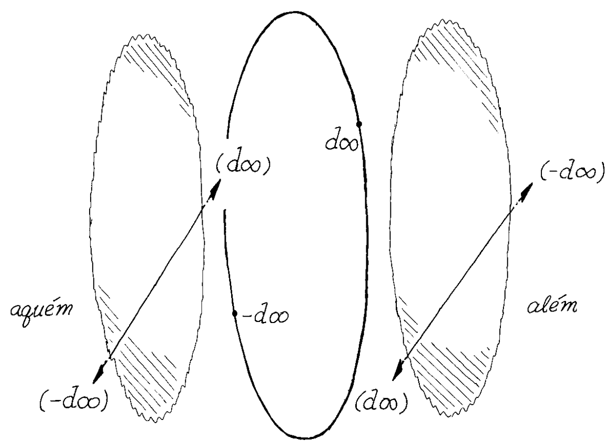


Figura 1.5: Uma reta, no aquém e no além.

### 1.4.4 Retas no modelo esférico

Lembremos que o vetor unitário $(w, x, y)$ do modelo esférico representa o ponto $[w, x, y]$ de $\mathbb{T}^2$. Portanto, os pontos de $\mathbb{T}^2$ que estão na reta $\langle \mathcal{W}, \mathcal{X}, \mathcal{Y} \rangle$ correspondem a pontos de $\mathbb{S}^2$ que satisfazem a satisfazem a equação $\mathcal{W}w + \mathcal{X}x + \mathcal{Y}y = 0$.

Esta equação define um plano de $\mathbb{R}^3$ que passa pela origem, e portanto corta a esfera num círculo de raio máximo. Ou seja, uma reta de $\mathbb{T}^2$ corresponde a um círculo máximo de $\mathbb{S}^2$; e é fácil ver que a recíproca também vale. Veja a figura 1.6.

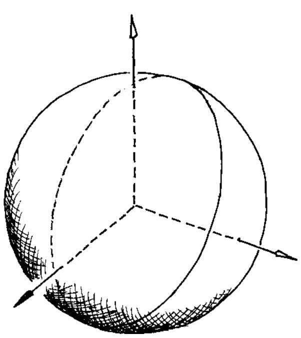

Figura 1.6: Uma reta no modelo esférico.

**Ex. 1.19:** Indique graficamente a posição das seguintes retas, no modelo esférico:

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| (a) | $\langle 0, 1, 0 \rangle$ | (b) | $\langle 0, 0, 1 \rangle$ | (c) | $\langle 0, 1, 1 \rangle$ |
| (d) | $\langle 1, 2, 3 \rangle$ | (e) | $\langle 1, 3, 2 \rangle$ | (f) | $\langle -1, 2, 3 \rangle$ |
| (g) | $\langle 1, -1, -1 \rangle$ | (h) | $\langle 2, -1, -1 \rangle$ | (i) | $\langle -10, 1, 1 \rangle$ |

### 1.4.5 Os dois lados de uma reta

Os pontos $[w, x, y]$ que não estão sobre uma reta $r = \langle \mathcal{W}, \mathcal{X}, \mathcal{Y} \rangle$ podem ser divididos em dois conjuntos, os *lados* da reta, conforme o sinal da expressão $\mathcal{W}w + \mathcal{X}x + \mathcal{Y}y$. Este teste define o lado *positivo* e o lado *negativo* da reta $r$.

No modelo esférico, os dois lados da reta são os dois hemisférios em que a esfera $\mathbb{S}^2$ fica dividida pelo plano de equação $\mathcal{W}w + \mathcal{X}x + \mathcal{Y}y = 0$. Veja a figura 1.7.

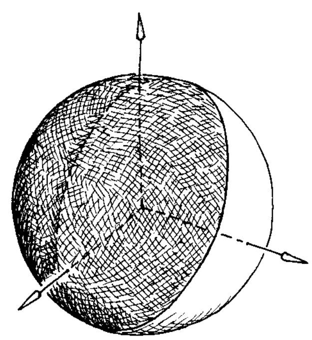

Figura 1.7: Os dois lados de uma reta, no modelo esférico.

**Ex. 1.20:** No modelo esférico, indique o lado positivo de cada uma das retas do exercício 1.19.

Observe que o sinal de $\mathcal{W}w + \mathcal{X}x + \mathcal{Y}y$ se inverte se negarmos as três coordenadas homogêneas $w, x, y$; isto é, um ponto está no lado positivo de uma reta se e somente se seu antípoda está no lado negativo.

Pode-se concluir daí que, no modelo plano de $\mathbb{T}^2$, o lado positivo de uma reta $r$ consiste de um semi-plano do aquém, limitado por $r$, e do *outro* semi-plano do além, que não é antípoda do primeiro. Veja a figura 1.8.

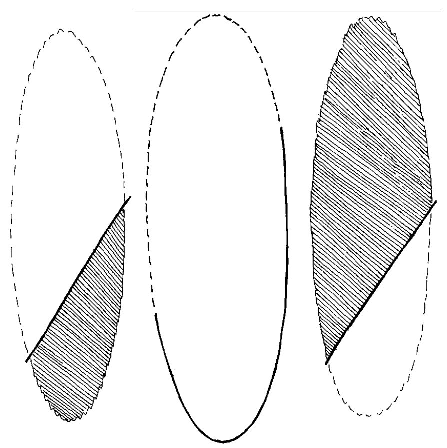

Figura 1.8: Os dois lados de uma reta, no modelo plano.

O lado positivo da reta $r$ também inclui todos os pontos no infinito num arco de $180°$ limitado pelas duas direções paralelas a $r$. Os dois outros semi-planos, e o o arco complementar no infinito, formam o lado negativo de $r$.

**Ex. 1.21:** Descreva, no modelo plano, o lado positivo de cada uma destas retas:

(a) $\langle 0, 1, 0\rangle$ (b) $\langle 0, 0, 2\rangle$

(c) $\langle 0, -1, 0\rangle$ (d) $\langle 2, 3, -4\rangle$

**Ex. 1.22:** Qual a condição algébrica para que a origem do aquém esteja no lado positivo da reta $\langle \mathcal{W}, \mathcal{X}, \mathcal{Y}\rangle$?

### 1.4.6 O teste de ponto contra reta

A operação de determinar o lado de uma reta dada que contém um ponto dado é fundamental para muitos algoritmos geométricos. Portanto, vale a pena introduzir a notação

$$r \diamond p = \operatorname{sgn}(\mathcal{W}w + \mathcal{X}x + \mathcal{Y}y) \tag{1.1}$$

onde $p = [w, x, y]$, $r = \langle \mathcal{W}, \mathcal{X}, \mathcal{Y} \rangle$, e $\operatorname{sgn} t$ é o sinal de $t$ — isto é, $-1$ se $t < 0$, $0$ se $t = 0$, e $+1$ se $t > 0$.

Observe-se que, por esta definição, $r \diamond (\neg p) = -(r \diamond p)$.

**Ex. 1.23:** Determine $r \diamond p$ para cada um dos casos abaixo:

(a) $r = \langle 2, 3, 5 \rangle$, $p = [1, 1, -1]$ (b) $r = \langle 2, 3, 5 \rangle$, $p = [1, 1, 0]$

(c) $r = \langle 2, 3, 5 \rangle$, $p = [1, 1, 1]$ (d) $r = \langle 1, 0, 0 \rangle$, $p = [1, 0, 0]$

(e) $r = \langle 1, 0, 0 \rangle$, $p = [-1, 0, 0]$ (f) $r = \langle a, b, c \rangle$, $p = [a, b, c]$

### 1.4.7 Retas opostas

Note que a função $r \diamond p$ não se altera se multiplicarmos os coeficientes de $r$ por um número $\alpha$ positivo, pois isto equivale a multiplicar a expressão $\mathcal{W}w + \mathcal{X}x + \mathcal{Y}y$ por $\alpha$. Entretanto, se multiplicarmos os coeficientes de $r$ por um número negativo, o valor de $r \diamond p$ fica negado; isto é, os lados positivo e negativo da reta se invertem.

Portanto, para que a função $\diamond$ tenha significado bem definido, precisamos distinguir as retas $r = \langle \mathcal{W}, \mathcal{X}, \mathcal{Y} \rangle$ e $r' = \langle -\mathcal{W}, -\mathcal{X}, -\mathcal{Y} \rangle$. Apesar de ambas serem *coincidentes* (passarem exatamente pelos mesmos pontos) elas não são *iguais*, pois diferem na sua *orientação* (a rotulação dos seus dois lados). Diremos que essas retas são *opostas* uma da outra, e denotaremos essa relação por $r' = \neg r$.

Ou seja, a tripla de coeficientes $\langle \alpha\mathcal{W}, \alpha\mathcal{X}, \alpha\mathcal{Y} \rangle$ denota a mesma reta que $\langle \mathcal{W}, \mathcal{X}, \mathcal{Y} \rangle$ para todo $\alpha$ positivo, e a reta oposta para todo $\alpha < 0$.

### 1.4.8 A reta no infinito

Na geometria cartesiana, a equação $AX + BY + C = 0$ só define uma reta se pelo menos um dos coeficientes $A$ e $B$ for diferente de zero. Quando $A = B = 0$, a equação não é satisfeita por nenhum ponto de $\mathbb{R}^2$. (A menos que $C$ também seja zero, caso em que todo ponto do plano satisfaz a equação; mas já excluímos este caso.)

Portanto, os coeficientes homogêneos $\langle \mathcal{W}, \mathcal{X}, \mathcal{Y} \rangle$ denotam uma reta do plano euclidiano só se $\mathcal{X} \neq 0$ ou $\mathcal{Y} \neq 0$. O que fazemos então com as triplas da forma $\langle \mathcal{W}, 0, 0 \rangle$? Será que, com a introdução de pontos no infinito, é possível atribuir algum significado geométrico a essas triplas?

Observe primeiro que, se adotarmos para estas triplas a mesma regra de equivalência que vale para as triplas normais, concluímos que $\langle \mathcal{W}, 0, 0 \rangle$ é equivalente à tripla $\langle 1, 0, 0 \rangle$, ou a $\langle -1, 0, 0 \rangle$, dependendo do sinal de $\mathcal{W}$. Ou seja, existem apenas duas "retas" da forma $\langle \mathcal{W}, 0, 0 \rangle$, opostas entre si.

Se $\langle 1, 0, 0 \rangle$ é uma reta, quais são seus pontos? Segundo a definição, um ponto $[w, x, y]$ está em $\langle 1, 0, 0 \rangle$ se e somente se $1 \cdot w + 0 \cdot x + 0 \cdot y = 0$; isto é, $w = 0$. Ou seja, a reta $\langle 1, 0, 0 \rangle$ contém todos os pontos infinitos, e apenas esses pontos. Portanto, diremos que $\langle 1, 0, 0 \rangle$ e $\langle -1, 0, 0 \rangle$ são as duas *retas no infinito*, que denotaremos por $\Omega$ e $\neg\Omega$; e chamaremos as outras retas de *ordinárias*.

**Ex. 1.24:** Qual é o lado positivo da reta $\Omega$? E o de $\neg\Omega$?

Em resumo: algebricamente, o conjunto de retas de $\mathbb{T}^2$ é o conjunto de todas as triplas reais $\langle \mathcal{W}, \mathcal{X}, \mathcal{Y} \rangle$, exceto a tripla $\langle 0, 0, 0 \rangle$; sendo que duas triplas são consideradas equivalentes se e somente se uma for um múltiplo positivo da outra. Um ponto $[w, x, y]$ está numa reta $\langle \mathcal{W}, \mathcal{X}, \mathcal{Y} \rangle$ se e somente se $\mathcal{W}w + \mathcal{X}x + \mathcal{Y}y$ é zero. Caso contrário, o ponto está no lado positivo ou negativo da reta, conforme o sinal desta fórmula.

### 1.4.9 Incidência de retas e pontos

Note que, apesar dos pontos e retas no infinito parecerem especiais no modelo plano, no modelo esférico eles são perfeitamente equivalentes aos pontos finitos e retas ordinárias. Como veremos, esta uniformidade — *homogeneidade* — dos elementos de $\mathbb{T}^2$ se reflete na manipulação algébrica de suas coordenadas homogêneas.

Uma manifestação dessa homogeneidade é o fato que, no plano $\mathbb{T}^2$, *duas retas não-coincidentes se interceptam em dois pontos antipodais.* Simetricamente, em $\mathbb{T}^2$ *dois pontos não-coincidentes determinam exatamente duas retas, opostas entre si.* Estas propriedades valem para todos os tipos de pontos — finitos ou infinitos, no aquém ou no além — e para todos os tipos de retas — ordinárias ou no infinito, paralelas ou não.

Note a semelhança entre estas propriedades e os dois principais axiomas da geometria euclidiana; "por dois pontos distintos passa uma única reta", e "duas retas distintas e não paralelas se encontram num único ponto". As diferenças mais óbvias entre as duas formulações são quase que uma questão de nomenclatura — cada cada ponto da geometria euclidiana é desdobrado em dois pontos de $\mathbb{T}^2$, o mesmo acontecendo com as retas. Uma diferença mais significativa é que, graças aos pontos no infinito, o caso das retas paralelas não é mais excepcional.

### 1.4.10 Topologia de $\mathbb{T}^2$

Informalmente, definir a topologia de um espaço matemático $S$ consiste em definir os limites de seqüências infinitas de pontos de $S$; ou, o que dá no mesmo, em definir a noção de continuidade para curvas de $S$ (funções de $\mathbb{R}$ para $S$).

Por definição, a topologia de $\mathbb{T}^2$ é a determinada implicitamente pelo seu modelo esférico. Ou seja, uma seqüência de pontos $p_i = [w_i, x_i, y_i]$ converge para um ponto $p = [w, x, y]$ se e somente se os vetores unitários

$$(w_i, x_i, y_i)/\sqrt{w_i^2 + x_i^2 + y_i^2}$$

de $\mathbb{R}^3$ convergirem para o vetor $(w, x, y)/\sqrt{w^2 + x^2 + y^2}$.

**Ex. 1.25:** Para cada uma das seqüências a seguir, determine os pontos limite, quando $i$ tende para infinito:

| | |
|---|---|
| (a) $p_i = [1,\, i,\, i^2]$ | (b) $p_i = [1,\, -i,\, i^2]$ |
| (c) $p_i = [1,\, i,\, \sin i]$ | (d) $p_i = [1/i,\, 1,\, 2]$ |
| (e) $p_i = [1/i,\, 1/(i+1),\, 1/(i+3)]$ | (f) $p_i = [i^3,\, i^4,\, i^2]$ |

**Ex. 1.26:** Quais das seqüências abaixo converge, quando $i$ tende para infinito:

(a) $p_i = [(-1)^i,\, 1,\, i]$

(b) $p_i = [1,\, 1,\, i(-1)^i]$

(c) $p_i = [(-1)^i,\, 1,\, i(-1)^i]$

Este conceito de convergência nos permite definir a noção de continuidade para funções cujo domínio e/ou contra-domínio são subconjuntos de $\mathbb{T}^2$. Por exemplo, uma função $c(t) = [w(t), x(t), z(t)]$ de algum intervalo $I \subseteq \mathbb{R}$ para $\mathbb{T}^2$ é contínua se e somente se a função

$$\bar{c}(t) = (w(t), x(t), y(t))/\sqrt{w(t)^2 + x(t)^2 + y(t)^2}$$

de $I$ para $\mathbb{S}^2$ for contínua.

**Ex. 1.27:** Prove que uma função $c(t)$ de algum intervalo $I \subseteq \mathbb{R}$ para $\mathbb{T}^2$ é contínua se e somente se existirem três funções contínuas $w(t)$, $x(t)$, e $y(t)$, que não se anulam todas para um mesmo $t \in I$, tais que $c(t) = [w(t), x(t), z(t)]$.

**Ex. 1.28:** Quais das funções de $t$ definidas abaixo são contínuas no intervalo aberto $(0 \_ 1)$? Quais delas podem ser estendidas para o intervalo $[0 \_ 1]$, mantendo a continuidade?

(a) $[1, t, t^2]$
(b) $[t, t^2, t^3]$
(c) $[t, t^2, \sin t]$
(d) $[t - 1/2, 1, 2]$
(e) $[t, 1, \sin(1/t)]$

A topologia de $\mathbb{T}^2$, definida pelo critério acima, é relativamente difícil de visualizar no modelo plano. Pode-se verificar sem muita dificuldade que cada um dos lados do plano (aquém ou além) tem de fato a mesma topologia do plano cartesiano $\mathbb{R}^2$; e os pontos no infinito têm a topologia do círculo $\mathbb{S}^1$.

A complexidade toda está na a maneira como estas três partes estão ligadas entre si. Considere uma seqüência de pontos $p_i$ com coordenadas cartesianas $(X_i, Y_i)$, tais que as distâncias $|p_i| = \sqrt{X_i^2 + Y_i^2}$ dos pontos à origem tende para o infinito, enquanto que os vetores unitários $d_i = (X_i, Y_i)/|p_i|$ convergem para algum vetor limite $d = (X, Y)$. Nesse caso, por definição, a seqüência $p_i$ converge para o ponto no infinito $[0, X, Y]$, se os pontos $p_i$ estiverem todos no aquém; e para $[0, -X, -Y]$, se os pontos $p_i$ estiverem todos no além.

**Ex. 1.29:** Considere a curva $c(t) = [1 - 2t, 2t, 4t^2 - 1]$, onde $t$ varia entre 0 e 1. Determine o ponto onde essa curva está no infinito, e o valor de $t$ correspondente. Desenhe a trajetória dessa curva, no modelo esférico e no modelo plano.

## 1.5 Segmentos e triângulos

### 1.5.1 Segmento

Lembremos que uma *combinação linear* de vetores $v_1, v_2, \ldots v_n$ é uma soma da forma $\alpha_0 v_0 + \alpha_1 v_1 + \cdots \alpha_n v_n$, onde os $\alpha_i$ são números reais. Uma *combinação convexa* é uma combinação linear cujos coeficientes $\alpha_i$ são todos maiores ou iguais a zero.

Sejam $p_0$ e $p_1$ dois pontos não-antipodais de $\mathbb{T}^2$. Por definição, o *segmento (fechado)* $p_0\,p_1$ consiste de todos os pontos cujas coordenadas homogêneas são combinações convexas não nulas das coordenadas homogêneas de $p_0$ e $p_1$.

Ou seja, se $p_0 = [w_0, x_0, y_0]$ e $p_1 = [w_1, x_1, y_1]$, o segmento $p_0\,p_1$ consiste de todos os pontos da forma

$$[\ \alpha_0\, w_0 + \alpha_1\, w_1,\ \ \alpha_0\, x_0 + \alpha_1\, x_1,\ \ \alpha_0\, y_0 + \alpha_1\, y_1\ ] \tag{1.2}$$

onde $\alpha_0$ e $\alpha_1$ são números reais não-negativos, e não ambos nulos.

Qual o significado geométrico da fórmula (1.2)? No modelo esférico de $\mathbb{T}^2$, é fácil ver que o segmento $p_0\,p_1$ é simplesmente o caminho mais curto de $p_0$ a $p_1$ sobre a esfera. Esse caminho é sempre um arco de círculo máximo, com menos de 180° de extensão. Veja a figura 1.9.

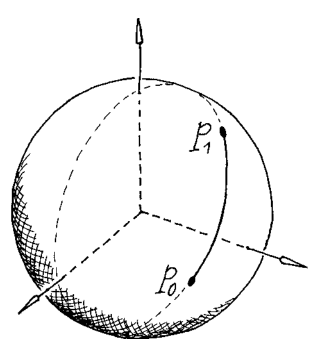


Figura 1.9: Um segmento no modelo esférico.

No modelo plano precisamos distinguir vários casos. Em primeiro lugar, se $p_0$ e $p_1$ estão ambos no aquém, pode-se verificar que a fórmula define simplesmente o segmento euclidiano do aquém ligando esses dois pontos. Veja a figura 1.10(a).

Note que um ponto $p$ está no segmento $p_0\,p_1$ se e somente se o antípoda $\neg p$ está no segmento $(\neg p_0)(\neg p_1)$. Portanto, se ambos os pontos estão no além, o segmento $p_0\,p_1$ é simplesmente o segmento euclidiano do além que liga os dois pontos. Veja a figura 1.10(b).

Quando $p_0$ está no aquém, e $p_1$ no além, a situação fica um pouco mais complicada. Neste caso, o segmento $p_0\,p_1$ consiste de duas semi-retas: uma no aquém, saindo de $p_0$ na direção oposta a $\neg p_1$; e uma no além, saindo de $p_1$ na direção oposta a $\neg p_0$. Veja a figura 1.10(c).

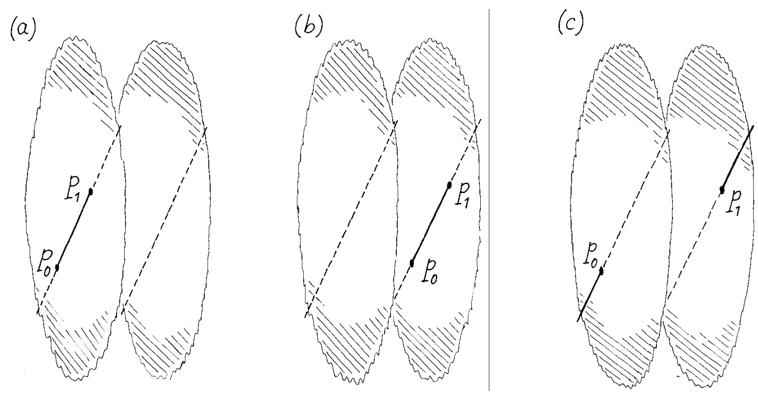


Figura 1.10: Segmentos no modelo plano.

Se um dos pontos é infinito, o segmento $p_0\,p_1$ é uma semi-reta com origem no ponto finito e apontando para o infinito. Veja a figura 1.11.

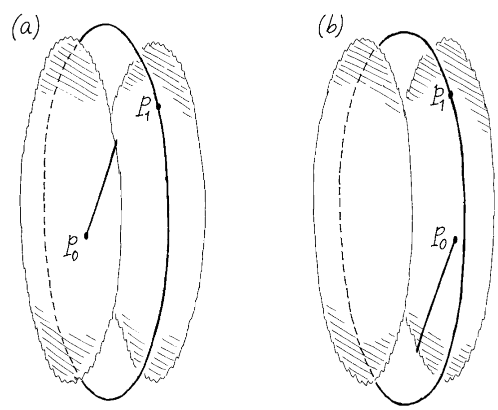


Figura 1.11: Segmentos com um extremo infinito.

Finalmente, se ambos os pontos são infinitos, o segmento é um conjunto de pontos infinitos, cobrindo um arco de direções menor que 180° entre as direções de $p_0$ e $p_1$.

**Ex. 1.30:** Desenhe os seguintes segmentos do plano projetivo orientado, usando as convenções gráficas da figura 1.2:

(a) $[1, 1, 1]$ – $[1, -1, -1]$. (b) $[+1, 0, 0]$ – $[0, 1, 0]$.

(c) $[-1, 0, 0]$ – $[0, 1, 0]$. (d) $[1, 0, 0]$ – $[0, -1, 0]$.

(e) $[1, 1, 1]$ – $[-1, 1, 1]$. (f) $[0, 1, 0]$ – $[0, 0, 1]$.

### 1.5.2 Consistência da definição

Observe que o ponto descrito pela fórmula (1.2) depende não só de $p_0$, $p_1$, $\alpha_0$, e $\alpha_1$, mas também da escolha dos pesos de $p_0$ e $p_1$. Isto é, se multiplicarmos as coordenadas homogêneas de $p_0$ por um fator positivo $\beta$, o ponto descrito pela fórmula mudará de posição, pois isto equivale a multiplicar $\alpha_0$ por $\beta$.

Portanto, o ponto gerado pela fórmula (1.2) para determinados valores de $\alpha_0$ e $\alpha_1$ não tem significado geométrico; apenas o *conjunto* de todos esses pontos — ou seja, o segmento $p_0\,p_1$ — é um conceito bem definido.

É importante notar que o segmento $p_0\,p_1$ não está definido se (e somente se) $p_0$ e $p_1$ são antipodais. Nesse caso, existem infinitas retas que passam por $p_0$ e $p_1$. Observe que este é o único caso em que a fórmula (1.2) pode dar origem à tripla inválida $[0, 0, 0]$.

**Ex. 1.31:** Demonstre algebricamente que três pontos de $\mathbb{T}^2$ são colineares se e somente se dois deles são antipodais, ou se um deles está no segmento que liga os outros dois, ou se o antípoda de um deles está no segmento que liga os outros dois.

### 1.5.3 Triângulos

Por definição, o *triângulo* determinado por três pontos de $\mathbb{T}^2$ é o conjunto de todos os pontos cujas coordenadas são combinações convexas não nulas das coordenadas desses pontos.

Ou seja, se $p_i = [w_i, x_i, y_i]$, para $i \in \{0,1,2\}$, o triângulo $p_0\,p_1\,p_2$ consiste de todos os pontos da forma

$$\begin{array}{ll} [ & \alpha_0\,w_0 + \alpha_1\,w_1 + \alpha_2\,w_2, \\ & \alpha_0\,x_0 + \alpha_1\,x_1 + \alpha_2\,x_2, \\ & \alpha_0\,y_0 + \alpha_1\,y_1 + \alpha_2\,y_2 \quad ] \end{array} \tag{1.3}$$

onde $\alpha_0$, $\alpha_1$, e $\alpha_2$ são números reais, não negativos e não todos nulos. Veja a figura 1.12

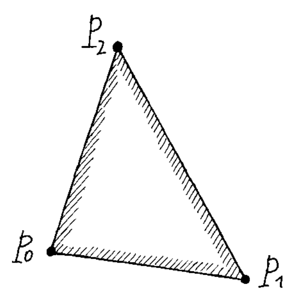


Figura 1.12: Um triângulo no aquém.

Note que este conjunto inclui os três pontos $p_0$, $p_1$, e $p_2$ (os *vértices*), bem como os segmentos $p_0\,p_1$, $p_1\,p_2$, e $p_2\,p_0$ (os *lados*). A união destes três segmentos é a *fronteira* do triângulo, uma curva fechada que separa os demais pontos do triângulo (o *interior*) do restante do plano (o *exterior*).

A fórmula (1.3) pode devolver a tripla inválida $[0,0,0]$. Isto acontece se e somente se dois vértices são antipodais, ou se o antípoda de um dos vértices está no segmento que liga os outros dois. Nestes casos o triângulo é "indefinido por definição".

Diremos que um triângulo é *degenerado* se seu interior for vazio, e *próprio* caso contrário.

**Ex. 1.32:** Prove que o triângulo $p_0\,p_1\,p_2$ é a união de todos os segmentos da forma $p_0\,q$, onde $q$ está no segmento $p_1\,p_2$.

**Ex. 1.33:** Prove que um triângulo é degenerado se e somente se um dos vértices pertence ao segmento que liga os outros dois.

No modelo esférico, o triângulo $p_0 p_1 p_2$ é um *triângulo esférico* — uma região limitada por três arcos de círculo máximo, com extremos nesses pontos. Veja a figura 1.13.

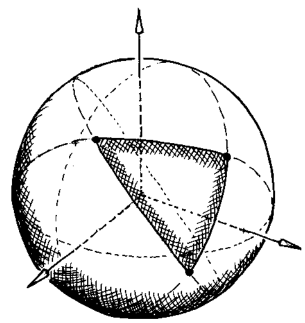

Figura 1.13: Um triângulo no modelo esférico.

No modelo plano, se os vértices estão todos no aquém, ou todos no além, os pontos definidos pela fórmula (1.3) estarão todos no mesmo lado do plano, e constituem simplesmente o triângulo euclidiano com os vértices dados.

Caso contrário, o triângulo tem uma forma mais complicada, que se estende de um lado para outro do plano, através de pontos no infinito. Por exemplo, a figura 1.14 ilustra o triângulo com vértices $a = [1, 1, 0]$, $b = [1, 0, 2]$, e $c = [-1, 1, 1]$.

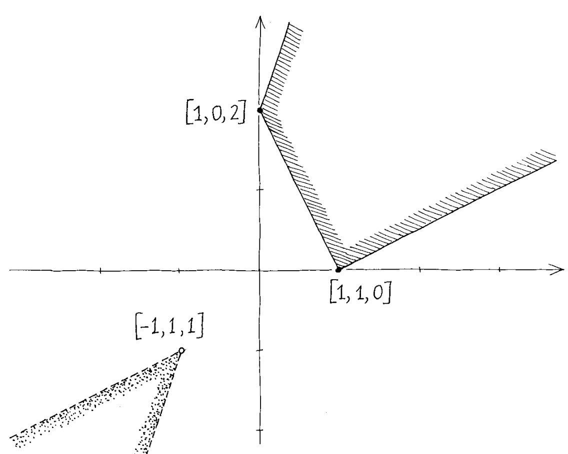


Figura 1.14: Um triângulo no modelo plano.

**Ex. 1.34:** Em cada um dos casos abaixo, desenhe o triângulo $p_0\, p_1\, p_2$, indicando seu interior com a convenção usual (hachurado no aquém, pontilhado no além):

(a) $p_0 = [1, 0, 0]$ $p_1 = [1, 1, 0]$ $p_2 = [1, 0, 1]$.

(b) $p_0 = [1, 0, 0]$ $p_1 = [0, 1, 0]$ $p_2 = [0, 0, 1]$.

(c) $p_0 = [1, 1, 0]$ $p_1 = [1, 0, 1]$ $p_2 = [-1, 1, 1]$.

(d) $p_0 = [1, 1, 0]$ $p_1 = [0, 0, 1]$ $p_2 = [-1, 1, 0]$.

(d) $p_0 = [1, 0, 0]$ $p_1 = [1, 1, 0]$ $p_2 = [0, 1, 0]$.

### 1.5.4 Convexidade

Na geometria euclidiana, dizemos que um conjunto de pontos $S$ é convexo se e somente se ele contém todo segmento cujos extremos são pontos de $S$.

No plano $\mathbb{T}^2$, esta condição define os conjuntos *quase-convexos*. Se, além disso, exigirmos que o conjunto não contenha nenhum par de pontos antipodais, estaremos definindo os conjuntos *convexos* propriamente ditos.

Observe que um conjunto convexo pode estar parte no aquém e parte no além.

**Ex. 1.35:** Quais destes subconjuntos de $\mathbb{T}^2$ são convexos? Quais são quase-convexos?

(a) O conjunto vazio;

(b) O plano $\mathbb{T}^2$;

(c) Uma reta;

(d) O lado posiitivo de uma reta;

(e) O aquém;

(f) Um segmento;

(g) Um triângulo;

(h) O interior de um triângulo;

(i) O exterior de um triângulo;

(j) O conjunto $\{\, [w, x, y] \;:\; x^2 + y^2 \leq w^2 \,\}$.

**Ex. 1.36:** Prove que a intersecção de dois conjuntos convexos (ou quase-convexos) é um conjunto convexo (ou quase-convexo).

**Ex. 1.37:** Descreva geometricamente os subconjuntos convexos maximais de $\mathbb{T}^2$. (Um subconjunto pertence a esta classe se ele é convexo e não está propriamente contido em nenhum outro subconjunto convexo de $\mathbb{T}^2$.)