O espaço projetivo orientado

O *espaço projetivo orientado* $\mathbb{T}^3$ consiste de *pontos*, *planos*, e uma relação ternária entre eles:

Pontos: quádruplas $[w, x, y, z]$ exceto $[0, 0, 0, 0]$
sendo que $[w', x', y', z']$ e $[w'', x'', y'', z'']$
são o mesmo ponto se e somente se
existe $\alpha > 0$ tal que
$w'' = \alpha w'$, $x'' = \alpha x'$, $y'' = \alpha y'$ e $z'' = \alpha z'$.

Planos: quádruplas $\langle \mathcal{W}, \mathcal{X}, \mathcal{Y}, \mathcal{Z} \rangle$ exceto $\langle 0, 0, 0, 0 \rangle$
sendo que $\langle \mathcal{W}', \mathcal{X}', \mathcal{Y}', \mathcal{Z}' \rangle$ e $\langle \mathcal{W}'', \mathcal{X}'', \mathcal{Y}'', \mathcal{Z}'' \rangle$
são o mesmo plano se e somente se
existe $\alpha > 0$ tal que
$\mathcal{W}'' = \alpha\mathcal{W}'$, $\mathcal{X}'' = \alpha\mathcal{X}'$, $\mathcal{Y}'' = \alpha\mathcal{Y}'$ e $\mathcal{Z}'' = \alpha\mathcal{Z}'$.

Posição ponto-plano:

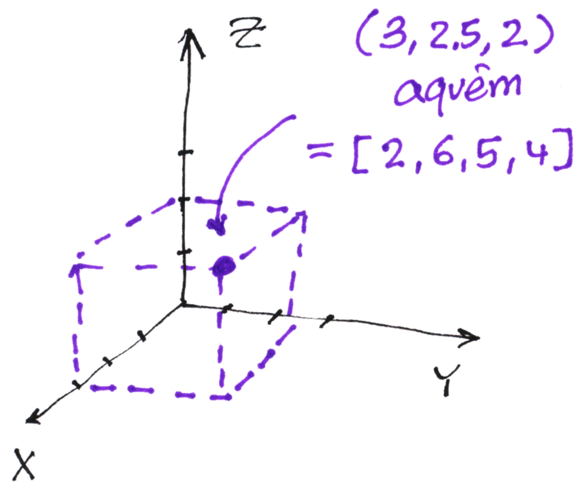
$$[w, x, y, z] \diamond \langle \mathcal{W}, \mathcal{X}, \mathcal{Y}, \mathcal{Z} \rangle = \operatorname{sgn}(\mathcal{W}w + \mathcal{X}x + \mathcal{Y}y + \mathcal{Z}z)$$

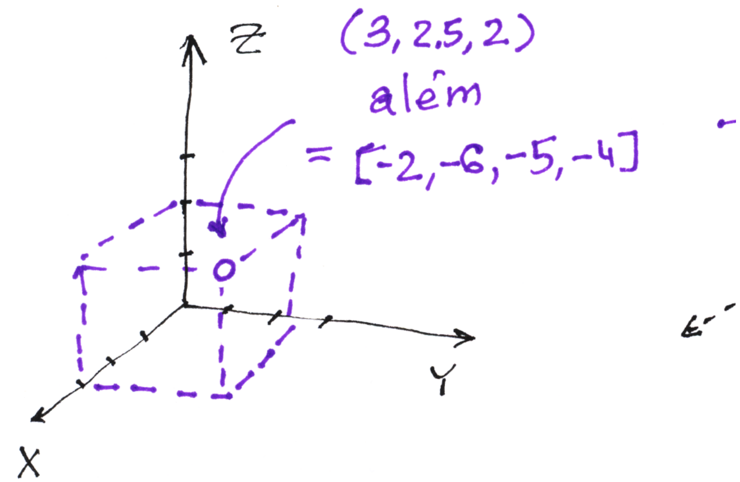
Toda a geometria projetiva orientada trdimensional segue destas definições.

As coordenadas homogêneas de um ponto no espaço são quaisquer quatro números reais $[w, x, y, z]$, tais que as coordenadas cartesianas são $X = x/w$, $Y = y/w$ e $Z = z/w$.

Ou seja, se as coordenadas cartesianas são (X, Y, Z), as coordenadas homogêneas são $[w, wX, wY, wZ]$ para qualquer $w > 0$. Em particular, $[1, X, Y, Z]$.

Convenção:
Cartesianas: parênteses $(, ,)$ e maiúsculas $X, Y, Z, \ldots$
Homogêneas: colchetes $[, , ,]$ e minúsculas $w, x, y, z, \ldots$





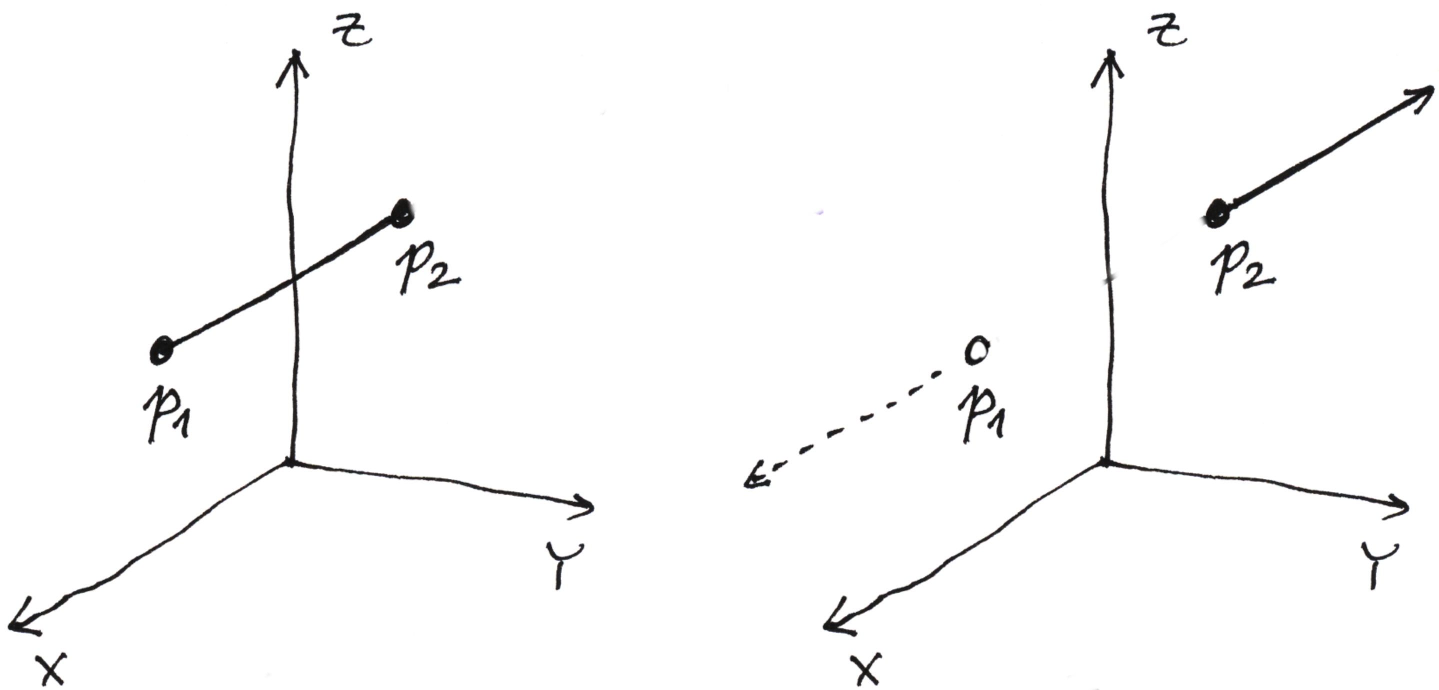
$$
\begin{aligned}
p &= (3.0, 2.5, 2.0) \\
&= [1.0, 3.0, 2.5, 2.0] \\
&= [2, 6, 5, 4] \\
&= [0.010, 0.030, 0.025, 0.020] \\
&= [12, 36, 30, 24] \\
&= \ldots
\end{aligned}
$$

Sejam

$$p_1 = [w_1, x_1, y_1, z_1]$$
$$p_2 = [w_2, x_2, y_2, z_2]$$

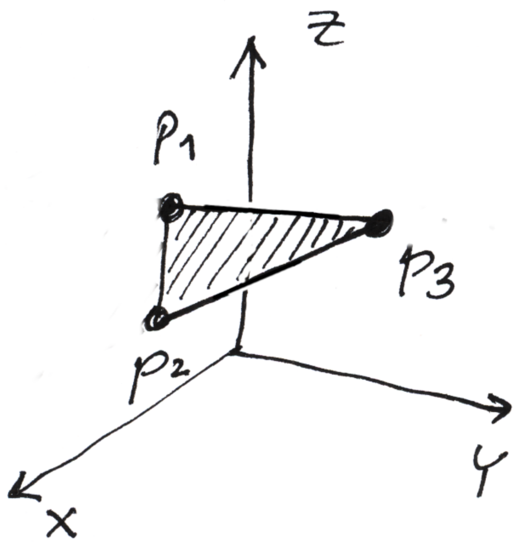
O segmento com extremso p_1 e p_2 é o conjunto de pontos

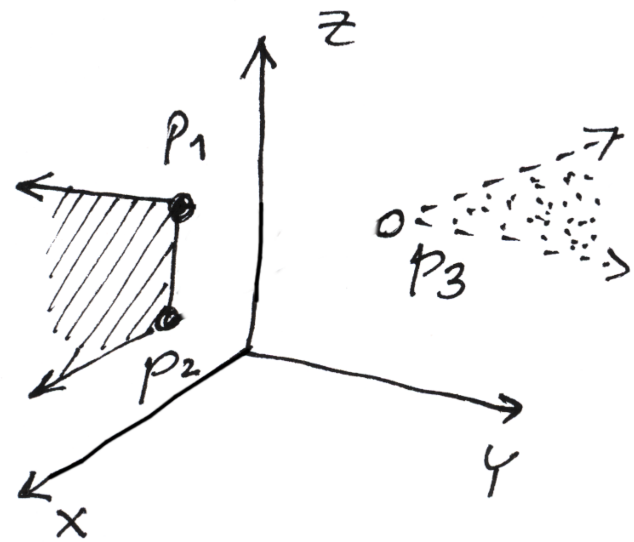
$$\mathsf{S}(p_1, p_2) = \{\ [\ \alpha w_1 + \beta w_2,\ \alpha x_1 + \beta x_2,\ \alpha y_1 + \beta y_2,\ \alpha z_1 + \beta z_2\ ] : \alpha, \beta \geq 0 \wedge \alpha + \beta > 0\}$$


z
p2
p1
Y
X
z
p2
p1
Y
X

Dados três pontos $p_1 = [w_1, x_1, y_1, z_1]$, $p_1 = [w_2, x_2, y_2, z_2]$ e $p_3 = [w_3, x_3, y_3, z_3]$, o *triângulo* com esses vértices é o conjunto de pontos

$$
\begin{aligned}
\mathsf{S}(p_1, p_2, p_3) \;=\; \{\; [\; & \alpha w_1 + \beta w_2 + \gamma w_3, \\
& \alpha x_1 + \beta x_2 + \gamma x_3, \\
& \alpha y_1 + \beta y_2 + \gamma y_3, \\
& \alpha z_1 + \beta z_2 + \gamma z_3 \\
]\; & : \alpha, \beta, \gamma \geq 0 \wedge \\
& \alpha + \beta + \gamma > 0 \\
\}\; &
\end{aligned}
$$


z
p_1
p_3
p_2
x
y


z
p_1
p_3
p_2
x
y

Plano em coordenadas cartesianas: o ponto (X, Y, Z) está no plano se e somente se

$$AX + BY + CZ + D = 0$$

onde A, B, C, D são os *coeficientes cartesianos* do plano.

Em coordenadas homogêneas: o ponto $[w, x, y, z]$ com $w > 0$ está nesse plano se e somente se

$$A\frac{x}{w} + B\frac{y}{w} + C\frac{z}{w} + D = 0$$

ou seja

$$Ax + By + Cz + Dw = 0$$

Quando se trabalha com coordenadas homogêneas, a equação

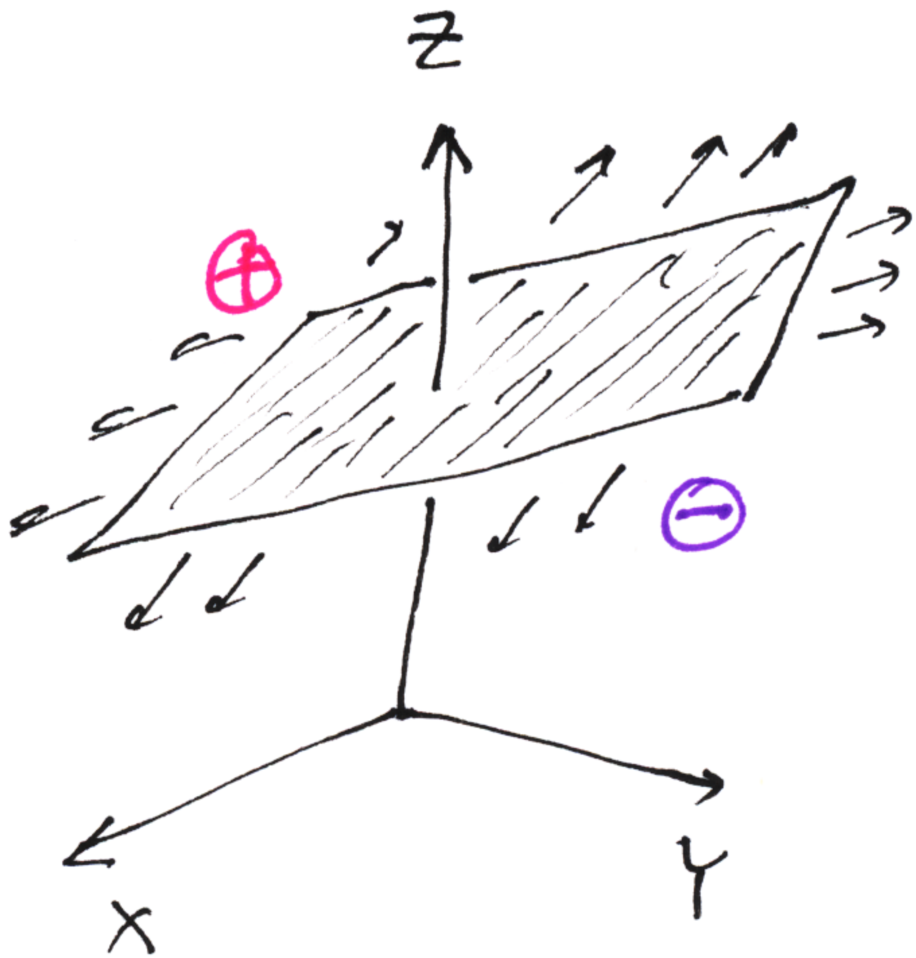
$$Ax + By + Cwz + Dw = 0$$

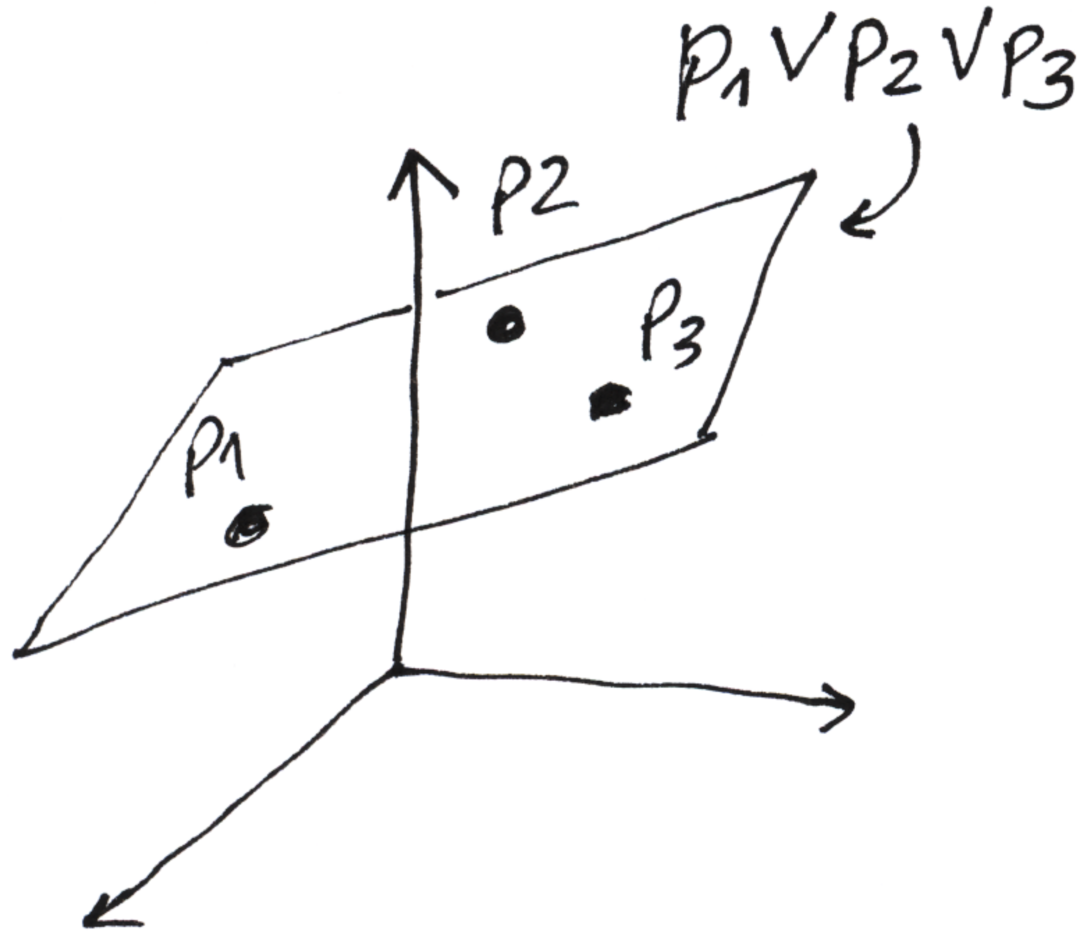
fica mais natural se escrita

$$\mathcal{W}w + \mathcal{X}x + \mathcal{Y}y + \mathcal{Z}z = 0$$

onde $\mathcal{W} = D$, $\mathcal{X} = A$, $\mathcal{Y} = B$, $\mathcal{Z} = C$. Estes números, *nesta ordem*, são os *coeficientes homogêneos* do plano.

Indicamos esse plano por $\langle \mathcal{W}, \mathcal{X}, \mathcal{Y}, \mathcal{Z} \rangle$.


Z
X
Y

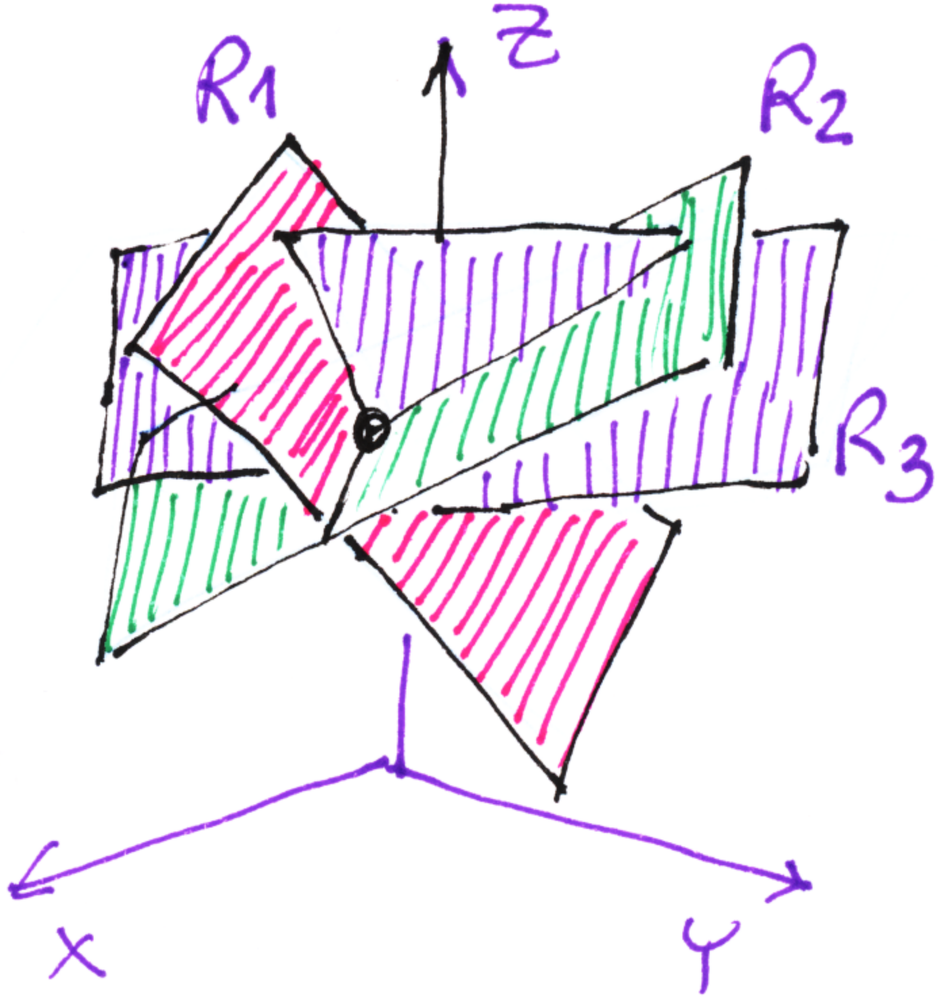

$p_1 \vee p_2 \vee p_3$
p2
p3
p1

Dados três pontos

$$\begin{aligned} p_1 &= [w_1, x_1, y_1, z_1], \\ p_2 &= [w_2, x_2, y_2, z_2], \\ p_3 &= [w_3, x_3, y_3, z_3] \end{aligned}$$

o plano p_1 *junta* p_2 *junta* p_3 é

$$\begin{aligned} p_1 \vee p_2 \vee p_3 = \Bigg\langle \; & + \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix}, \; - \begin{vmatrix} w_1 & y_1 & z_1 \\ w_2 & y_2 & z_2 \\ w_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix}, \\ & + \begin{vmatrix} w_1 & x_1 & z_1 \\ w_2 & x_2 & z_2 \\ w_3 & x_3 & z_3 \end{vmatrix}, \; - \begin{vmatrix} w_1 & x_1 & y_1 \\ w_2 & x_2 & y_2 \\ w_3 & x_3 & y_3 \end{vmatrix} \Bigg\rangle \end{aligned}$$



Z
R1
R2
R3
X
Y

Dados tres planos

$$\begin{aligned} R_1 &= \langle \mathcal{W}_1, \mathcal{X}_1, \mathcal{Y}_1, \mathcal{Z}_1 \rangle, \\ R_2 &= \langle \mathcal{W}_2, \mathcal{X}_2, \mathcal{Y}_2, \mathcal{Z}_2 \rangle, \\ R_3 &= \langle \mathcal{W}_3, \mathcal{X}_3, \mathcal{Y}_3, \mathcal{Z}_3 \rangle \end{aligned}$$

o ponto R_1 *encontra* R_2 *encontra* R_3

$$\begin{aligned} R_1 \wedge R_2 \wedge R_3 = \Bigg[& +\begin{vmatrix} \mathcal{X}_1 & \mathcal{Y}_1 & \mathcal{Z}_1 \\ \mathcal{X}_2 & \mathcal{Y}_2 & \mathcal{Z}_2 \\ \mathcal{X}_3 & \mathcal{Y}_3 & \mathcal{Z}_3 \end{vmatrix}, -\begin{vmatrix} \mathcal{W}_1 & \mathcal{Y}_1 & \mathcal{Z}_1 \\ \mathcal{W}_2 & \mathcal{Y}_2 & \mathcal{Z}_2 \\ \mathcal{W}_3 & \mathcal{Y}_3 & \mathcal{Z}_3 \end{vmatrix}, \\ & +\begin{vmatrix} \mathcal{W}_1 & \mathcal{X}_1 & \mathcal{Z}_1 \\ \mathcal{W}_2 & \mathcal{X}_2 & \mathcal{Z}_2 \\ \mathcal{W}_3 & \mathcal{X}_3 & \mathcal{Z}_3 \end{vmatrix}, -\begin{vmatrix} \mathcal{W}_1 & \mathcal{X}_1 & \mathcal{Y}_1 \\ \mathcal{W}_2 & \mathcal{X}_2 & \mathcal{Y}_2 \\ \mathcal{W}_3 & \mathcal{X}_3 & \mathcal{Y}_3 \end{vmatrix} \Bigg] \end{aligned}$$

Transformação projetiva de $\mathbb{T}^3$:
função de pontos para pontos que é
uma transformação linear das coordenadas homogêneas:

$$
\begin{aligned}
M([w,x,y,z]) &= [w,x,y,z]\begin{bmatrix} A & B & C & D \\ E & F & G & H \\ I & J & K & L \\ N & P & Q & R \end{bmatrix} \\
&= [\, Aw + Ex + Iy + Nz, \\
&\quad\;\; Bw + Fx + Jy + Pz, \\
&\quad\;\; Cw + Gx + Ky + Qz, \\
&\quad\;\; Dw + Hx + Ly + Rz \,]
\end{aligned}
$$

Exemplo de transformação projetiva de $\mathbb{T}^2$:

$$M([w,x,y,z]) = [w,x,y,z]\begin{bmatrix} 1 & 4 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & -3 & 0 & 0 \\ -1 & -3 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$= \left[\; w-z,\;\; 4w-3y-3z,\;\; 2w+2x,\;\; x \;\right]$$

Uma *transformação afim* de $\mathbb{T}^3$
é uma transformação projetiva que preserva a distinção finito/infinito:
Se $M([w, x, y, z]) = [w', x', y', z']$, então $w = 0$ se e somente se $w' = 0$.

Forma geral:

não altera w

destino da origem

$$M = \begin{bmatrix} 1 & T & U & V \\ 0 & A & B & C \\ 0 & D & E & F \\ 0 & G & H & I \end{bmatrix}$$

imagem do VETOR $(1,0,0)$

imagem do VETOR $(0,1,0)$

imagem do VETOR $(0,0,1)$

Em coordenadas cartesianas:

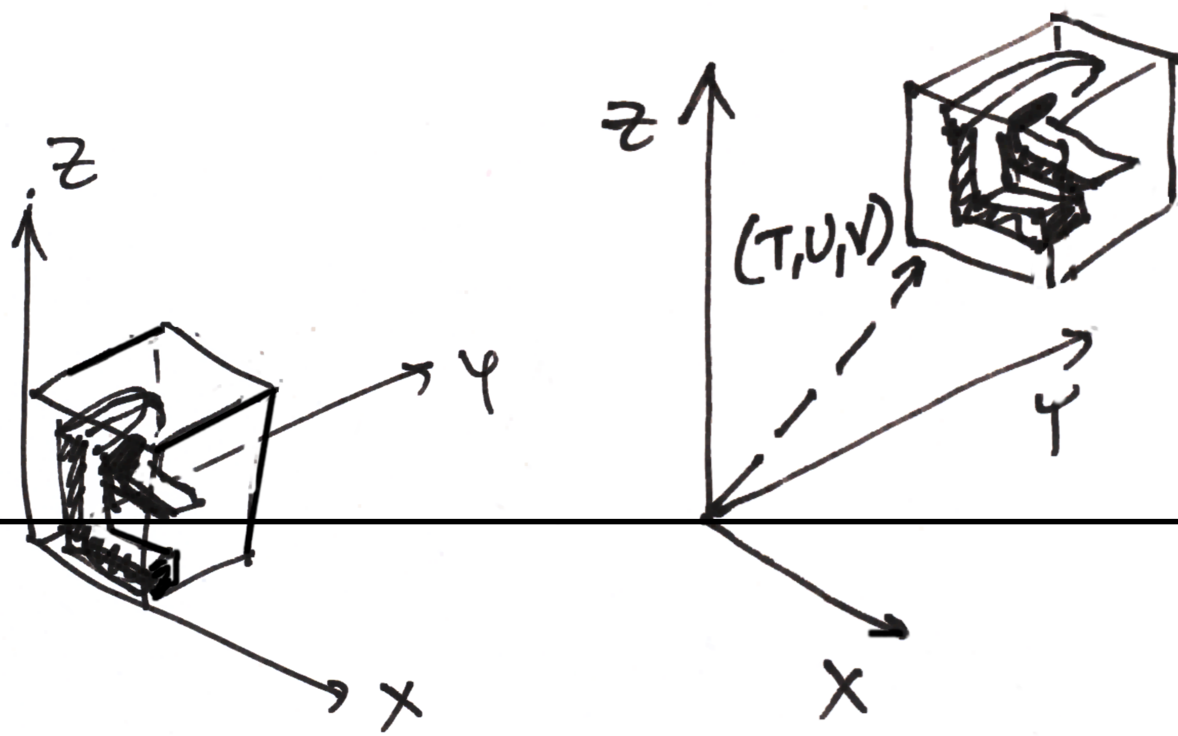
$$M((X,Y,Z)) = (X,Y,Z)\begin{pmatrix} A & B & C \\ D & E & F \\ G & H & I \end{pmatrix} + (T,U,V)$$

Transformações afins: Translação

Translação pelo vetor cartesiano (T, U, V):

$$M([w,x,y,z]) \;=\; [w,x,y,z]\begin{bmatrix} 1 & T & U & V \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \;=\; \left[\; w,\; Tw+x,\; Uw+y \;\; Vw+y \;\right]$$

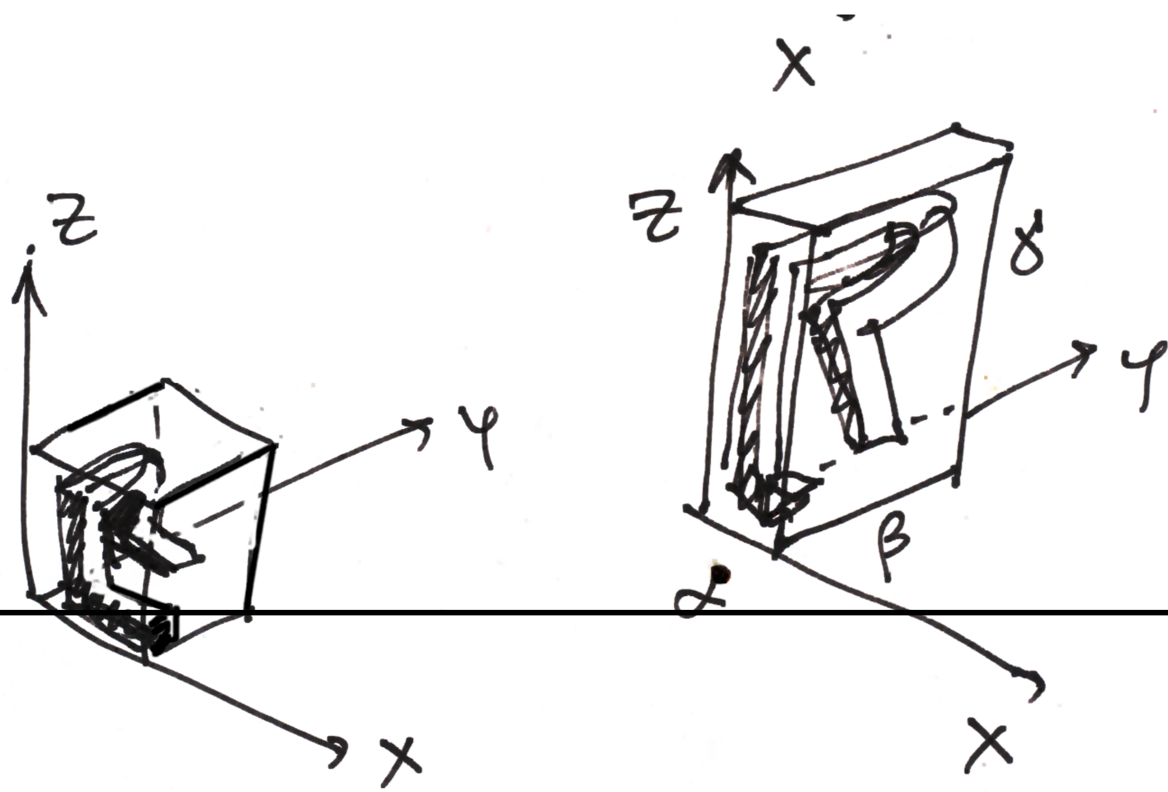
$$M((X,Y,Z)) = M([1,X,Y,Z]) = [1, T+X, U+Y, V+Z] = (X,Y,Z) + (T,U,V)$$



Mudança de escala por fatores α em X, β em Y, γ em Z:

$$M([w,x,y,z]) \;=\; [w,x,y,z]\begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&\alpha&0&0\\0&0&\beta&0\\0&0&0&\gamma\end{bmatrix} \;=\; [\;w,\;\alpha x,\;\beta y,\;\gamma z\;]$$

$$M((X,Y,Z)) = M([1,X,Y,Z]) = [1,\alpha X,\beta Y,\gamma Z] = (\alpha X,\beta Y,\gamma Z)$$

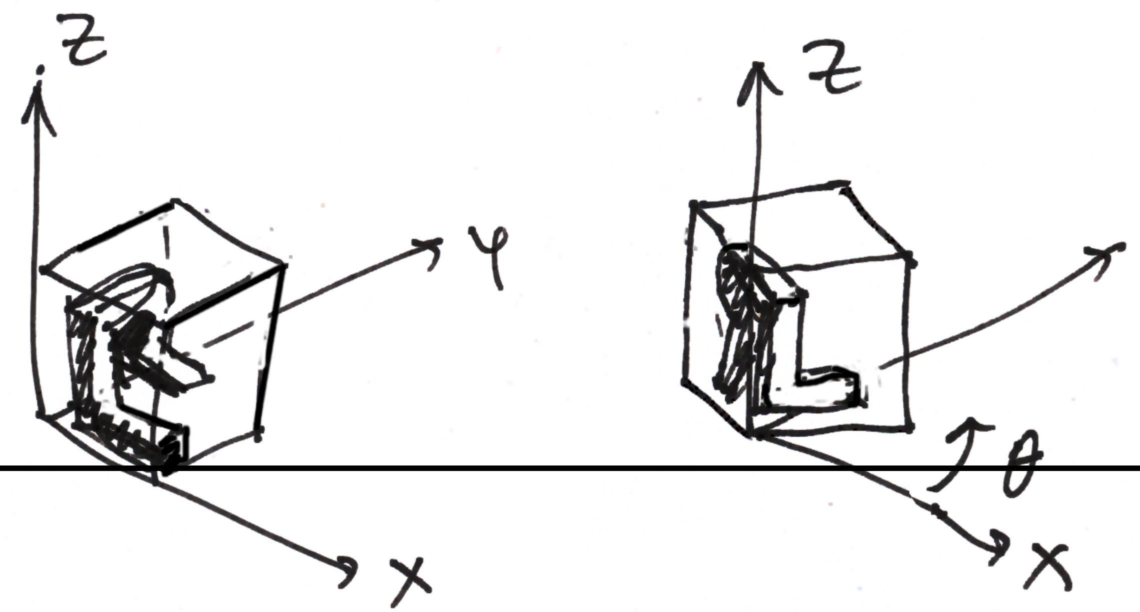


Rotação anti-horária por θ radianos em torno do eixo Z:

$$M([w,x,y,z]) \;=\; [w,x,y,z]\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & c & s & 0 \\ 0 & -s & c & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \;=\; \left[\; w,\; cx - sy,\; sx + cy,\; z \;\right]$$

onde $s = \sin\theta$ e $c = \cos\theta$.

$$M((X,Y,Z)) = M([1,X,Y,Z]) = [1, cX - sY, sX - cY, Z] = (cX - sY, sX - cY, Z)$$



Rotação anti-horária por 90 graus ($\pi/2$ radianos)
em torno do eixo Z:

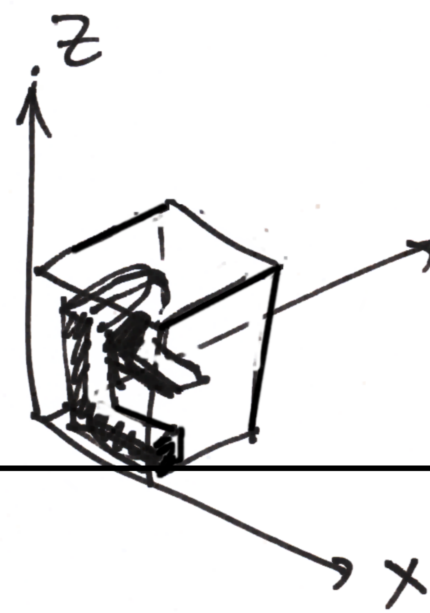
$$M([w,x,y,z]) \;=\; [w,x,y,z]\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & +1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1a \end{bmatrix} \;=\; [\; w,\; -y,\; x,\; z\;]$$

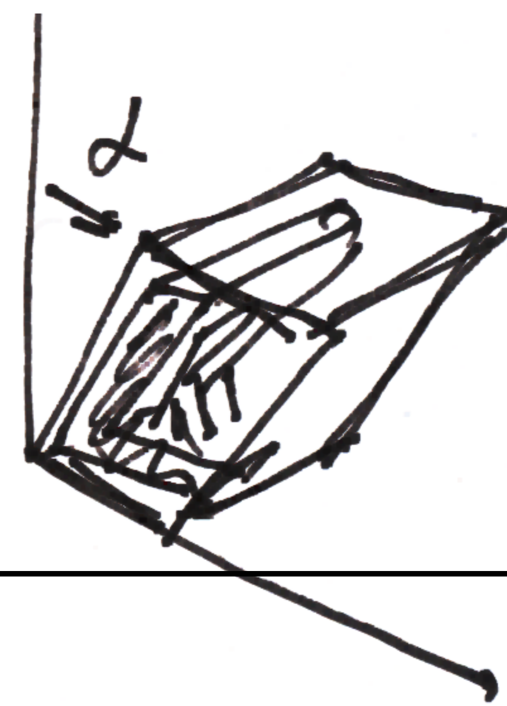
$$M((X,Y,Z)) = M([1,X,Y,Z]) = [1,-Y,+X,Z] = (-Y,+X,Z)$$

Cisalhamento na direção X proposcional a Y com fator α:

$$M([w,x,y,z]) \;=\; [w,x,y,z]\begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&\alpha&1&0\\0&0&0&1\end{bmatrix} \;=\; \left[\, w,\; x+\alpha y,\; y,\; z \,\right]$$

$$M((X,Y,Z)) = M([1,X,Y,Z]) = [1, X+\alpha Y, Y, Z] = (X+\alpha Y, Y, Z)$$





Espelhamento na direção X pelo plano YZ:

$$M([w,x,y,z]) \;=\; [w,x,y,z]\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & +1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & +1 \end{bmatrix}$$

$$=\; \left[\; w,\; -x,\; y,\; z \;\right]$$

$$M((X,Y,Z)) = M([1,X,Y,Z]) = [1,-X,Y,Z] = (-X,Y,Z)$$

Espelhamento pela origem:

$$M([w,x,y,z]) \;=\; [w,x,y,z]\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \;=\; \left[\; w,\; -x,\; -y,\; -z \;\right]$$

$$M((X,Y,Z)) = M([1,X,Y,Z]) = [1,-X,-Y,-Z] = (-X,-Y,-Z)$$