

O plano projetivo orientado \mathbb{T}^2 consiste de *pontos*, *retas*, e uma relação ternária entre eles:

<p>Pontos: triplas $[w, x, y]$ exceto $[0, 0, 0]$ sendo que $[w', x', y']$ e $[w'', x'', y'']$ são o mesmo ponto se e somente se existe $\alpha > 0$ tal que $w'' = \alpha w', x'' = \alpha x'$ e $y'' = \alpha y'$. $\neg[w, x, y] = [-w, -x, -y] \neq [w, x, y]$</p>	<p>Retas: triplas $\langle \mathcal{W}, \mathcal{X}, \mathcal{Y} \rangle$ exceto $\langle 0, 0, 0 \rangle$ sendo que $\langle \mathcal{W}', \mathcal{X}', \mathcal{Y}' \rangle$ e $\langle \mathcal{W}'', \mathcal{X}'', \mathcal{Y}'' \rangle$ são a mesma reta se e somente se existe $\alpha > 0$ tal que $\mathcal{W}'' = \alpha \mathcal{W}', \mathcal{X}'' = \alpha \mathcal{X}'$ e $\mathcal{Y}'' = \alpha \mathcal{Y}'$. $\neg\langle \mathcal{W}, \mathcal{X}, \mathcal{Y} \rangle = \langle -\mathcal{W}, -\mathcal{X}, -\mathcal{Y} \rangle \neq \langle \mathcal{W}, \mathcal{X}, \mathcal{Y} \rangle$</p>
--	--

Posição ponto-reta:

$$[w, x, y] \diamond \langle \mathcal{W}, \mathcal{X}, \mathcal{Y} \rangle = \text{sgn}(\mathcal{W}w + \mathcal{X}x + \mathcal{Y}y)$$

Toda a geometria projetiva orientada segue destas definições.

Transformação projetiva de \mathbb{T}^2 :

função de pontos para pontos que é
uma transformação linear das coordenadas homogêneas:

$$\begin{aligned} M([w, x, y]) &= [w, x, y] \begin{bmatrix} A & B & C \\ D & E & F \\ G & H & I \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} Aw + Dx + Gy, \\ Bw + Ex + Hy, \\ Cw + Fx + Iy \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Exemplo de transformação projetiva de \mathbb{T}^2 :

$$\begin{aligned} M([w, x, y]) &= [w, x, y] \begin{bmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & -3 & 0 \end{bmatrix} \\ &= [w, 4w - 3y, 2w + 2x] \end{aligned}$$

Exemplo de transformação projetiva de \mathbb{T}^2 :

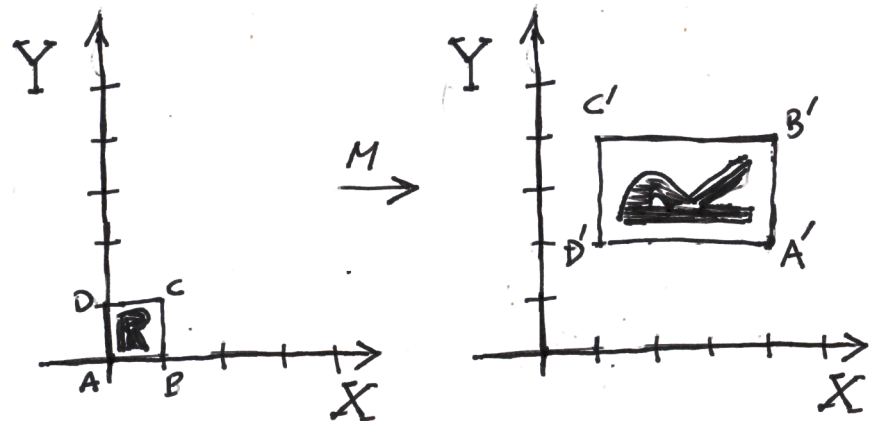
$$M([w, x, y]) = [w, 4w - 3y, 2w + 2x]$$

$$M(A) = M([1, 0, 0]) = [1, 4, 2] = A'$$

$$M(B) = M([1, 1, 0]) = [1, 4, 4] = B'$$

$$M(C) = M([1, 1, 1]) = [1, 1, 4] = C'$$

$$M(D) = M([1, 0, 1]) = [1, 1, 2] = D'$$



Propriedades de uma transformação projetiva M de \mathbb{T}^2 :

- Só é válida se a matriz 3×3 \widehat{M} tem determinante não nulo.
- $M(p)$ é definida para todo ponto p .
- $M(p)$ é o mesmo ponto de \mathbb{T}^2 quaisquer que sejam as coordenadas homogêneas escolhidas para p .
- M tem uma transformação inversa M^{-1} , tal que $M^{-1}(M(p)) = M(M^{-1}(p))$ para todo p .
- A matriz de M^{-1} é a inversa da matriz de M .

Mais propriedades de uma transformação projetiva M de \mathbb{T}^2 :

- M preserva colinearidade: $M(p), M(q), M(r)$ são colineares se e somente se p, q, r são colineares.
- M preserva segmentos: a imagem de $S(p, q)$ sob M é $S(M(p), M(q))$.
- Idem para triângulos e conjuntos convexos em geral.
- A transformação M não se altera se a matriz \widehat{M} for multiplicada por qualquer $\alpha > 0$.

Mais propriedades de uma transformação projetiva M de \mathbb{T}^2 :

- Se o determinante da matriz \widehat{M} for positivo, M sempre preserva a orientação de 3 pontos: $\Delta(M(p), M(q), M(r)) = \Delta(p, q, r)$.
- Se o determinante da matriz \widehat{M} for negativo, M sempre inverte a orientação de 3 pontos: $\Delta(M(p), M(q), M(r)) = -\Delta(p, q, r)$.

A primeira linha da matriz \widehat{M} é para onde vai a origem do
aquém:

$$[1, 0, 0] \begin{bmatrix} A & B & C \\ D & E & F \\ G & H & I \end{bmatrix} = [A, B, C]$$

*Para onde vai a
origem do aquém*

Uma *transformação afim* de \mathbb{T}^2 é uma transformação projetiva que preserva a distinção finito/infinito.

Ou seja, se $M([w, x, y]) = [w', x', y']$, então $w = 0$ se e somente se $w' = 0$.

Forma geral:

$$[w, x, y] \begin{bmatrix} 1 & U & V \\ 0 & A & B \\ 0 & C & D \end{bmatrix} = [w, U + Ax + Cy, V + Bx + Dy]$$

← sempre
← para onde vai a origem do aqui
← transformações lineares do \mathbb{R}^2

Translação pelo vetor cartesiano (U, V) :

$$\begin{aligned} M([w, x, y]) &= [w, x, y] \begin{bmatrix} 1 & U & V \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\ &= [w, Uw + x, Vw + y] \end{aligned}$$

$$M((X, Y)) = M([1, X, Y]) = [1, U+X, V+Y] = (X, Y) + (U, V)$$

Mudança de escala por fatores α em X e β em Y :

$$\begin{aligned} M([w, x, y]) &= [w, x, y] \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha & 0 \\ 0 & 0 & \beta \end{bmatrix} \\ &= [w, \alpha x, \beta y] \end{aligned}$$

$$M((X, Y)) = M([1, X, Y]) = [1, \alpha X, \beta Y] = (\alpha X, \beta Y)$$

Rotação anti-horária por θ radianos:

$$\begin{aligned} M([w, x, y]) &= [w, x, y] \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & c & s \\ 0 & -s & c \end{bmatrix} \\ &= [w, cx - sy, sx + cy] \end{aligned}$$

onde $s = \sin \theta$ e $c = \cos \theta$.

$$\begin{aligned} M((X, Y)) &= M([1, X, Y]) = [1, cX - sY, sX + cY] \\ &= (cX - sY, sX + cY) \end{aligned}$$

Rotação anti-horária por 90 graus ($\pi/2$ radianos):

$$\begin{aligned} M([w, x, y]) &= [w, x, y] \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & +1 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} \\ &= [w, -y, x] \end{aligned}$$

$$M((X, Y)) = M([1, X, Y]) = [1, -Y, +X] = (-Y, +X)$$

Cisalhamento na direção X proporcional a Y com fator α :

$$\begin{aligned} M([w, x, y]) &= [w, x, y] \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & \alpha & 1 \end{bmatrix} \\ &= [w, x + \alpha y, y] \end{aligned}$$

$$M((X, Y)) = M([1, X, Y]) = [1, X + \alpha Y, Y] = (X + \alpha Y, Y)$$

Espelhamento na direção X pelo eixo Y :

$$\begin{aligned} M([w, x, y]) &= [w, x, y] \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & +1 \end{bmatrix} \\ &= [w, -x, y] \end{aligned}$$

$$M((X, Y)) = M([1, X, Y]) = [1, -X, Y] = (-X, Y)$$

Rotação por 180° (π radianos), ou espelhamento pela origem:

$$\begin{aligned} M([w, x, y]) &= [w, x, y] \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \\ &= [w, -x, -y] \end{aligned}$$

$$M((X, Y)) = M([1, X, Y]) = [1, -X, -Y] = (-X, -Y)$$

Composição de transformações projetivas M e Q aplicadas nessa ordem:

$$\begin{aligned} Q(M([w, x, y])) &= \left([w, x, y] \begin{bmatrix} \widehat{M} \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} \widehat{Q} \end{bmatrix} \\ &= [w, x, y] \left(\begin{bmatrix} \widehat{M} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \widehat{Q} \end{bmatrix} \right) \end{aligned}$$

Por conta dessa fórmula, vamos escrever a composição na ordem de aplicação, ou seja “ MQ ” (em vez de $Q \circ M$ ou QM).

Então $p(MQ) = (pM)Q = pMQ$ para todo ponto p de \mathbb{T}^2 .

Transformação afim que leva o triângulo canônico

$$K = \mathbf{S}((0, 0), (1, 0), (0, 1))$$

para um triângulo qualquer

$$T = \mathbf{S}((X_0, Y_0), (X_1, Y_1), (X_2, Y_2)):$$

$$\begin{aligned} M((0, 0)) &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & X_0 & Y_0 \\ 0 & X_1 - X_0 & Y_1 - Y_0 \\ 0 & X_2 - X_0 & Y_2 - Y_0 \end{bmatrix} \\ M((1, 0)) &= \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \\ M((0, 1)) &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 1 & X_0 & Y_0 \\ 1 & X_1 & Y_1 \\ 1 & X_2 & Y_2 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Transformação afim que leva um triângulo genérico

$T' = \mathbf{S}((X'_0, Y'_0), (X'_1, Y'_1), (X'_2, Y'_2))$ para outro triângulo genérico

$T'' = \mathbf{S}((X''_0, Y''_0), (X''_1, Y''_1), (X''_2, Y''_2))$:

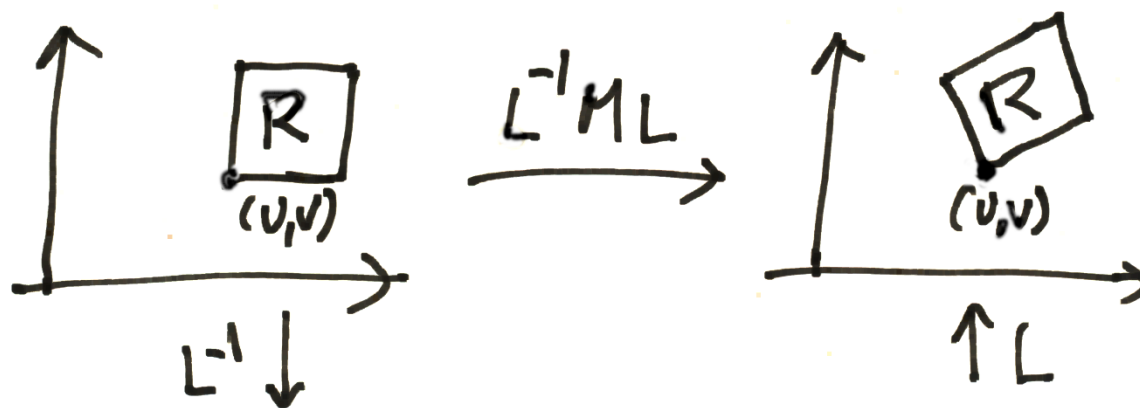
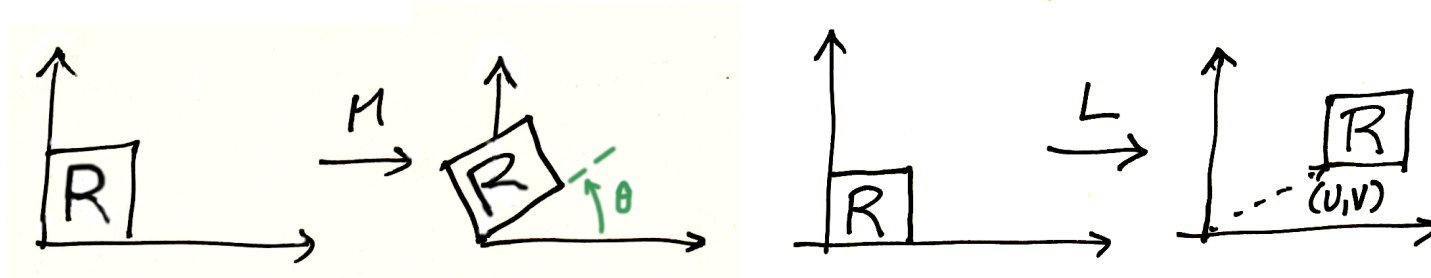
$$M = A^{-1}B$$

onde A leva K para T' e B leva K para T'' .

A *conjugada de* uma transformação projetiva M por outra transformação L é a transformação $L^{-1}ML$.

Intuitivamente, $L^{-1}ML$ tem o efeito de M , mas no plano \mathbb{T}^2 transformado por L .

Por exemplo, se M é a rotação de 30 graus em torno da origem, e L é a translação que leva a origem para (U, V) , então $L^{-1}ML$ é uma rotação de 30 graus em torno de (U, V) .



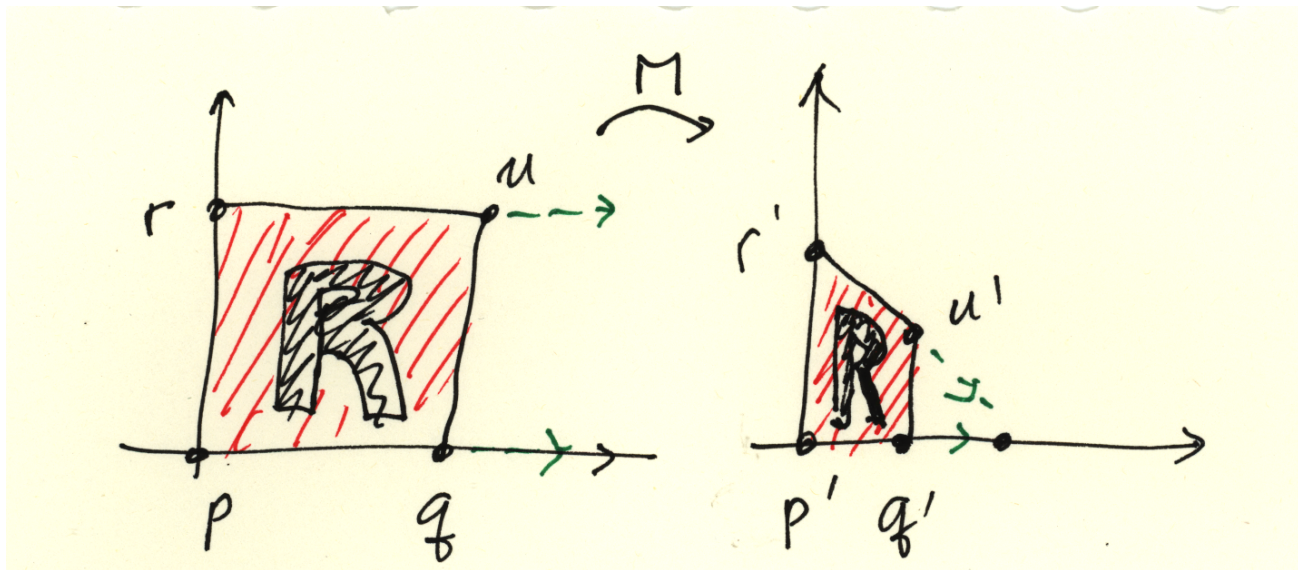
Se a primeira coluna da matriz \widehat{M} não é $1, 0, 0$, a transformação M mistura pontos finitos e infinitos, e não preserva paralelismo:

$$\begin{aligned} [w, x, y]M &= [w, x, y] \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\ &= [w + x, x, y] \end{aligned}$$

Em coordenadas cartesianas:

$$(X, Y)M = [1, X, Y]M = [1+X, X, Y] = \left(\frac{X}{1+X}, \frac{Y}{1+X} \right)$$

$$\begin{array}{l}
 pM = (0, 0)M = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{bmatrix} = (0, 0) \\
 qM = (1, 0)M = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{bmatrix} = (1/2, 0) \\
 rM = (0, 1)M = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{bmatrix} = (0, 1) \\
 uM = (1, 1)M = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{bmatrix} = (1/2, 1/2)
 \end{array}$$



Dados 4 pontos p, q, r, u onde u está dentro do triângulo $S(p, q, r)$, existe uma única transformação projetiva que leva os cantos do primeiro quadrante para p, q, r , e o ponto $[1, 1, 1, 1]$ para u .

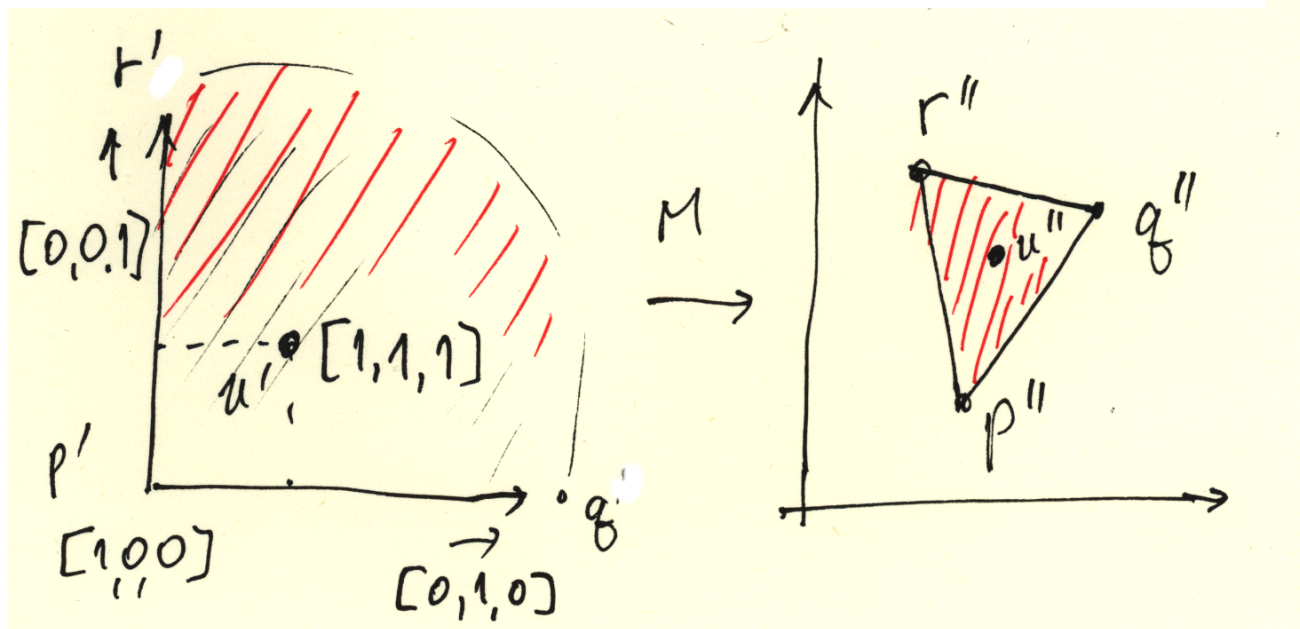
Queremos:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A & B & C \\ D & E & F \\ G & H & I \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha p.w & \alpha p.x & \alpha p.y \\ \beta q.w & \beta q.x & \beta q.y \\ \gamma r.w & \gamma r.x & \gamma r.y \\ u.w & u.x & u.y \end{bmatrix}$$

Logo M é

$$M = \begin{bmatrix} \alpha p.w & \alpha p.x & \alpha p.y \\ \beta q.w & \beta q.x & \beta q.y \\ \gamma r.w & \gamma r.x & \gamma r.y \end{bmatrix} =$$
$$= \begin{bmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ 0 & \beta & 0 \\ 0 & 0 & \gamma \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p.w & p.x & p.y \\ q.w & q.x & q.y \\ r.w & r.x & r.y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ 0 & \beta & 0 \\ 0 & 0 & \gamma \end{bmatrix} N$$

Resta determinar α , β , e γ para que a quarta equação seja satisfeita.



A quarta equação é

$$[1, 1, 1] \begin{bmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ 0 & \beta & 0 \\ 0 & 0 & \gamma \end{bmatrix} N = [u.w, u.x, u.y]$$

ou seja

$$[\alpha, \beta, \gamma] = [u.w, u.x, u.y]N^{-1}$$

O espaço projetivo orientado \mathbb{T}^3 consiste de *pontos*, *planos*, e uma relação ternária entre eles:

Pontos: quádruplas $[w, x, y, z]$ exceto $[0, 0, 0, 0]$
sendo que $[w', x', y', z']$ e $[w'', x'', y'', z'']$
são o mesmo ponto se e somente se
existe $\alpha > 0$ tal que
 $w'' = \alpha w', x'' = \alpha x', y'' = \alpha y'$ e $z'' = \alpha z'$.

Planos: quádruplas $\langle \mathcal{W}, \mathcal{X}, \mathcal{Y}, \mathcal{Z} \rangle$ exceto $\langle 0, 0, 0, 0 \rangle$
sendo que $\langle \mathcal{W}', \mathcal{X}', \mathcal{Y}', \mathcal{Z}' \rangle$ e
 $\langle \mathcal{W}'', \mathcal{X}'', \mathcal{Y}'', \mathcal{Z}'' \rangle$
são o mesmo plano se e somente se
existe $\alpha > 0$ tal que
 $\mathcal{W}'' = \alpha \mathcal{W}', \mathcal{X}'' = \alpha \mathcal{X}', \mathcal{Y}'' = \alpha \mathcal{Y}'$ e
 $\mathcal{Z}'' = \alpha \mathcal{Z}'$.

Posição ponto-plano:

$$[w, x, y, z] \diamond \langle \mathcal{W}, \mathcal{X}, \mathcal{Y}, \mathcal{Z} \rangle = \text{sgn}(\mathcal{W}w + \mathcal{X}x + \mathcal{Y}y + \mathcal{Z}z)$$

Toda a geometria projetiva orientada tridimensional segue destas definições.

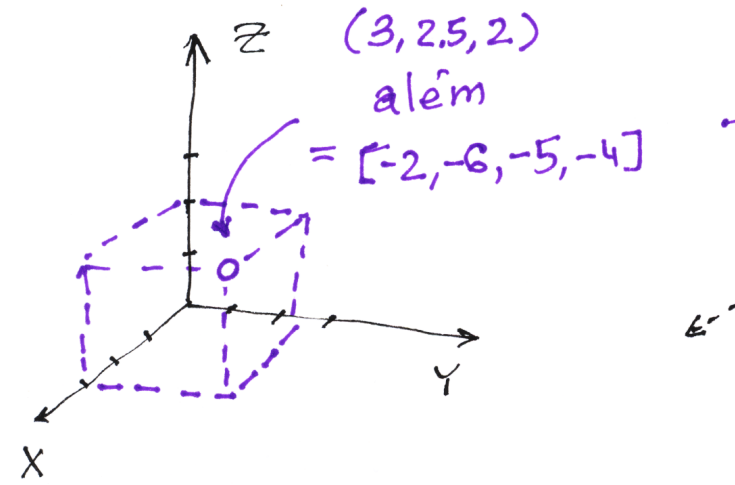
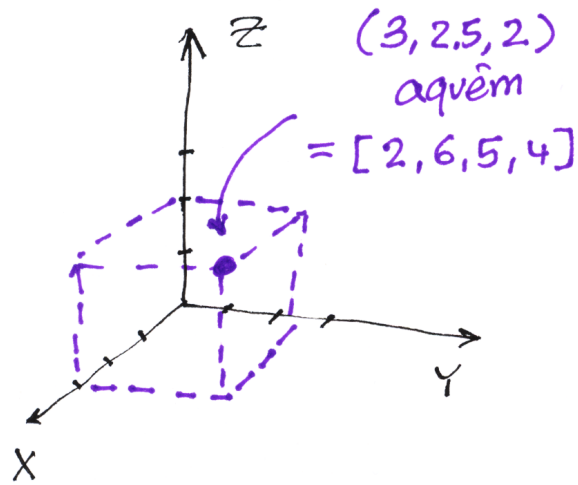
As coordenadas homogêneas de um ponto no espaço são quaisquer quatro números reais $[w, x, y, z]$, tais que as coordenadas cartesianas são $X = x/w$, $Y = y/w$ e $Z = z/w$.

Ou seja, se as coordenadas cartesianas são (X, Y, Z) , as coordenadas homogêneas são $[w, wX, wY, wZ]$ para qualquer $w > 0$. Em particular, $[1, X, Y, Z]$.

Convenção:

Cartesianas: parênteses $(, ,)$ e maiúsculas X, Y, Z, \dots

Homogêneas: colchetes $[, , ,]$ e minúsculas w, x, y, z, \dots



$$\begin{aligned}
 p &= (3.0, 2.5, 2.0) \\
 &= [1.0, 3.0, 2.5, 2.0] \\
 &= [2, 6, 5, 4] \\
 &= [0.010, 0.030, 0.025, 0.020] \\
 &= [12, 36, 30, 24] \\
 &= \dots
 \end{aligned}$$

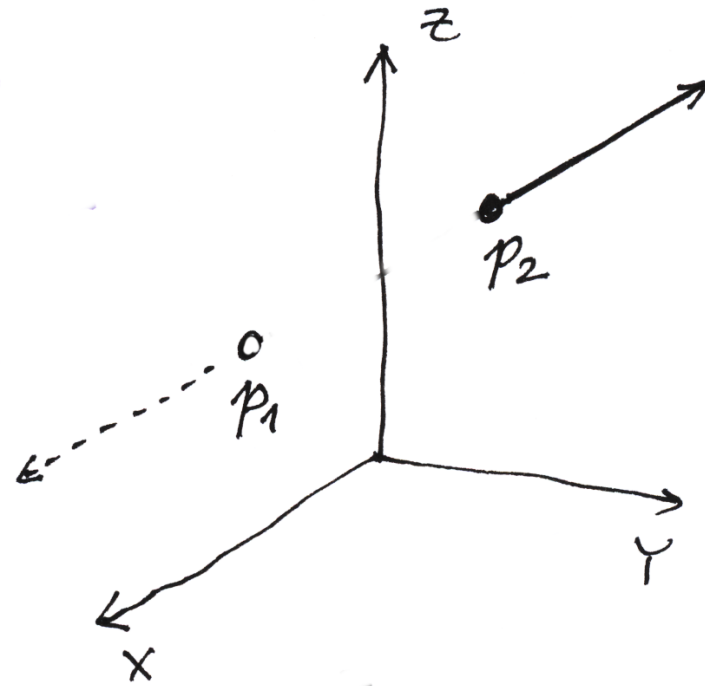
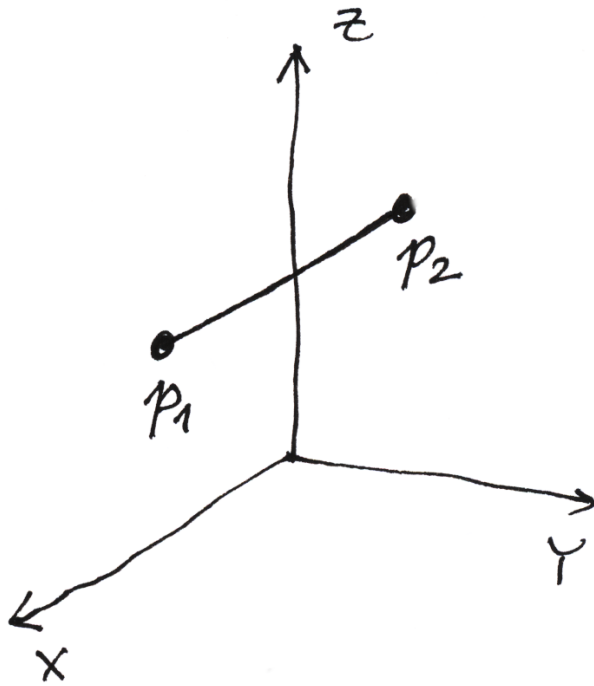
Sejam

$$p_1 = [w_1, x_1, y_1, z_1]$$

$$p_2 = [w_2, x_2, y_2, z_2]$$

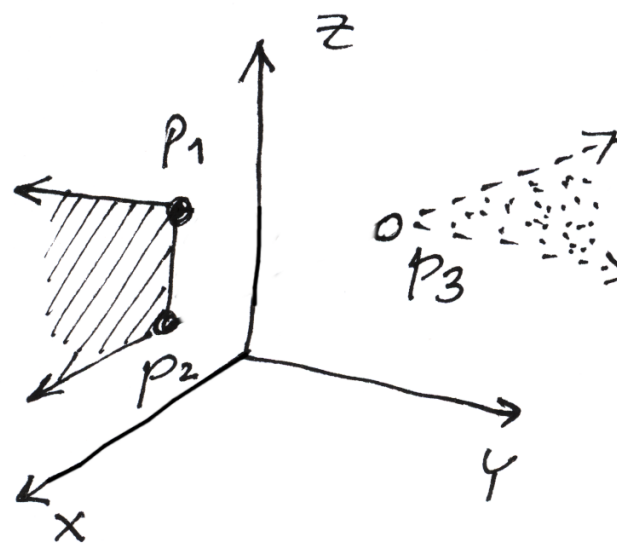
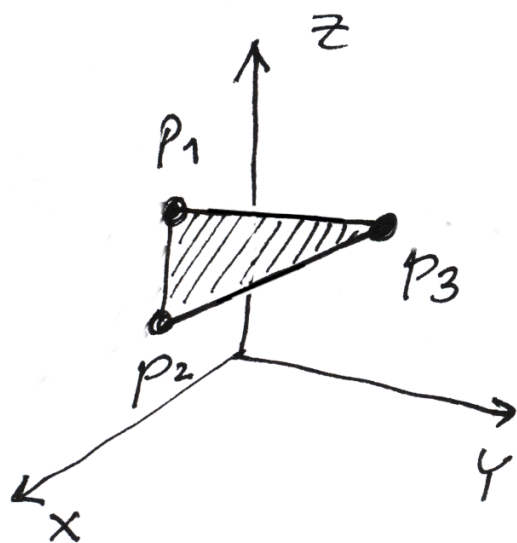
O segmento com extremos p_1 e p_2 é o conjunto de pontos

$$S(p_1, p_2) = \left\{ \begin{array}{l} [\alpha w_1 + \beta w_2, \\ \alpha x_1 + \beta x_2, \\ \alpha y_1 + \beta y_2, \\ \alpha z_1 + \beta z_2 \\] : \alpha, \beta \geq 0 \wedge \\ \alpha + \beta > 0 \end{array} \right\}$$



Dados três pontos $p_1 = [w_1, x_1, y_1, z_1]$, $p_2 = [w_2, x_2, y_2, z_2]$ e $p_3 = [w_3, x_3, y_3, z_3]$, o *triângulo* com esses vértices é o conjunto de pontos

$$S(p_1, p_2, p_3) = \left\{ \begin{array}{l} [\alpha w_1 + \beta w_2 + \gamma w_3, \\ \alpha x_1 + \beta x_2 + \gamma x_3, \\ \alpha y_1 + \beta y_2 + \gamma y_3, \\ \alpha z_1 + \beta z_2 + \gamma z_3 \\] : \alpha, \beta, \gamma \geq 0 \wedge \\ \alpha + \beta + \gamma > 0 \end{array} \right\}$$



Plano em coordenadas cartesianas: o ponto (X, Y, Z) está no plano se e somente se

$$AX + BY + CZ + D = 0$$

onde A, B, C, D são os *coeficientes cartesianos* do plano.

Em coordenadas homogêneas: o ponto $[w, x, y, z]$ com $w > 0$ está nesse plano se e somente se

$$A\frac{x}{w} + B\frac{y}{w} + C\frac{z}{w} + D = 0$$

ou seja

$$Ax + By + Cz + Dw = 0$$

Quando se trabalha com coordenadas homogêneas, a equação

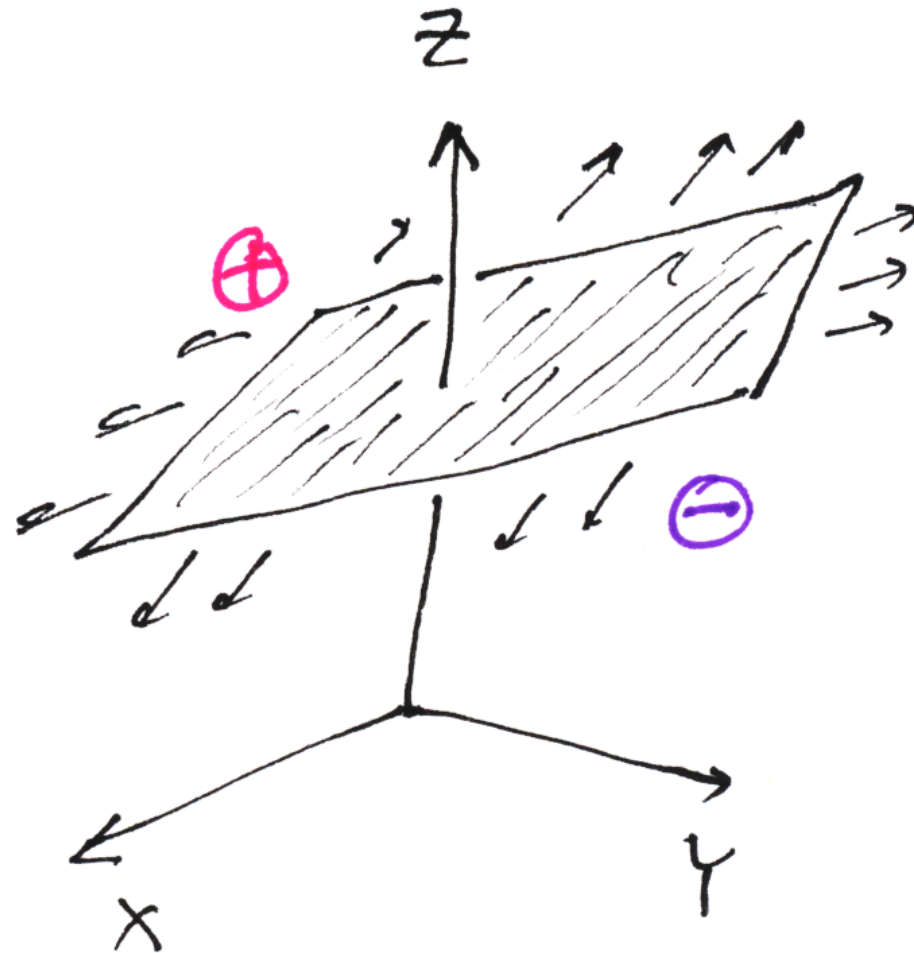
$$Ax + By + Cz + Dw = 0$$

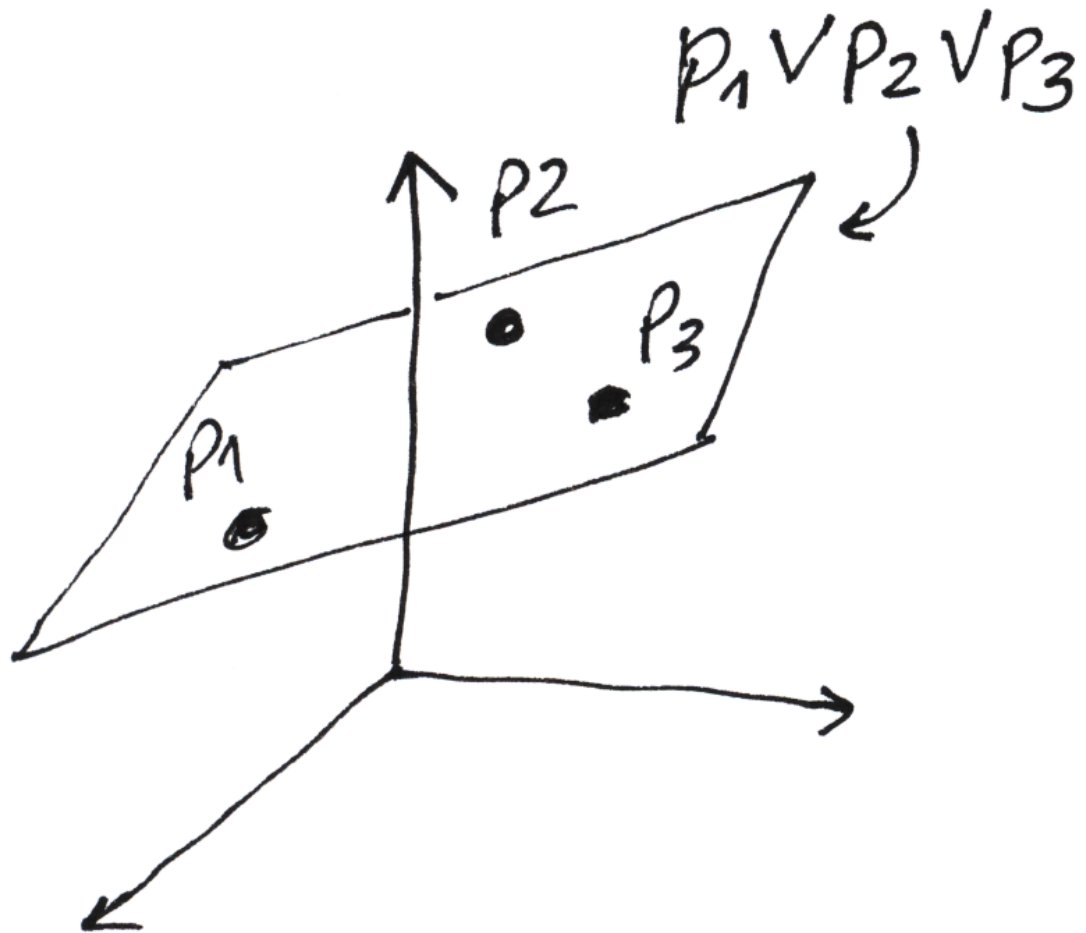
fica mais natural se escrita

$$\mathcal{W}w + \mathcal{X}x + \mathcal{Y}y + \mathcal{Z}z = 0$$

onde $\mathcal{W} = D$, $\mathcal{X} = A$, $\mathcal{Y} = B$, $\mathcal{Z} = C$. Estes números, *nesta ordem*, são os *coeficientes homogêneos* do plano.

Indicamos esse plano por $\langle \mathcal{W}, \mathcal{X}, \mathcal{Y}, \mathcal{Z} \rangle$.





Dados três pontos

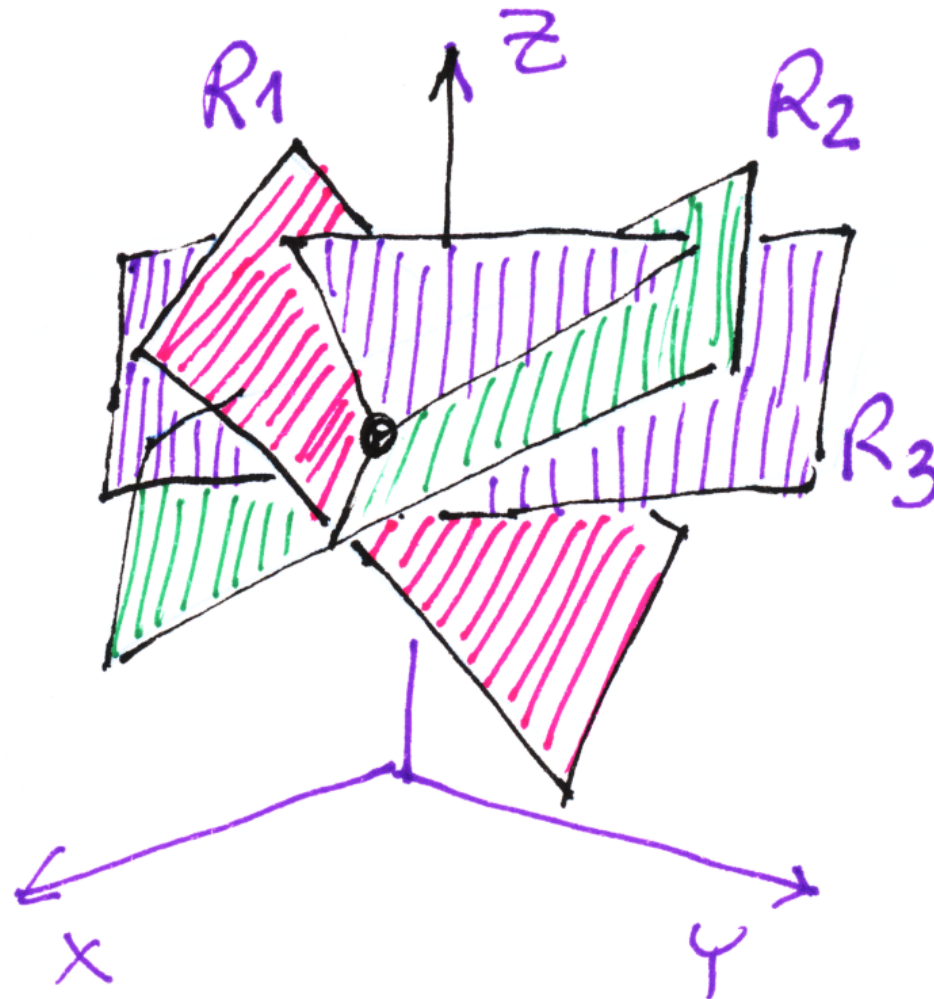
$$p_1 = [w_1, x_1, y_1, z_1],$$

$$p_2 = [w_2, x_2, y_2, z_2],$$

$$p_3 = [w_3, x_3, y_3, z_3]$$

o plano p_1 junta p_2 junta p_3 é

$$p_1 \vee p_2 \vee p_3 = \left\langle \begin{array}{l} + \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix}, - \begin{vmatrix} w_1 & y_1 & z_1 \\ w_2 & y_2 & z_2 \\ w_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix}, \\ + \begin{vmatrix} w_1 & x_1 & z_1 \\ w_2 & x_2 & z_2 \\ w_3 & x_3 & z_3 \end{vmatrix}, - \begin{vmatrix} w_1 & x_1 & y_1 \\ w_2 & x_2 & y_2 \\ w_3 & x_3 & y_3 \end{vmatrix} \right\rangle$$



Dados tres planos

$$R_1 = \langle \mathcal{W}_1, \mathcal{X}_1, \mathcal{Y}_1, \mathcal{Z}_1 \rangle,$$

$$R_2 = \langle \mathcal{W}_2, \mathcal{X}_2, \mathcal{Y}_2, \mathcal{Z}_2 \rangle,$$

$$R_3 = \langle \mathcal{W}_3, \mathcal{X}_3, \mathcal{Y}_3, \mathcal{Z}_3 \rangle$$

o ponto R_1 encontra R_2 encontra R_3

$$R_1 \wedge R_2 \wedge R_3 = \left[\begin{array}{l} + \begin{vmatrix} \mathcal{X}_1 & \mathcal{Y}_1 & \mathcal{Z}_1 \\ \mathcal{X}_2 & \mathcal{Y}_2 & \mathcal{Z}_2 \\ \mathcal{X}_3 & \mathcal{Y}_3 & \mathcal{Z}_3 \end{vmatrix}, - \begin{vmatrix} \mathcal{W}_1 & \mathcal{Y}_1 & \mathcal{Z}_1 \\ \mathcal{W}_2 & \mathcal{Y}_2 & \mathcal{Z}_2 \\ \mathcal{W}_3 & \mathcal{Y}_3 & \mathcal{Z}_3 \end{vmatrix}, \\ + \begin{vmatrix} \mathcal{W}_1 & \mathcal{X}_1 & \mathcal{Z}_1 \\ \mathcal{W}_2 & \mathcal{X}_2 & \mathcal{Z}_2 \\ \mathcal{W}_3 & \mathcal{X}_3 & \mathcal{Z}_3 \end{vmatrix}, - \begin{vmatrix} \mathcal{W}_1 & \mathcal{X}_1 & \mathcal{Y}_1 \\ \mathcal{W}_2 & \mathcal{X}_2 & \mathcal{Y}_2 \\ \mathcal{W}_3 & \mathcal{X}_3 & \mathcal{Y}_3 \end{vmatrix} \end{array} \right]$$