O *plano projetivo orientado* $\mathbb{T}^2$ consiste de *pontos*, *retas*, e uma relação ternária entre eles:

Pontos: triplas $[w, x, y]$ exceto $[0, 0, 0]$	Retas: triplas $\langle \mathcal{W}, \mathcal{X}, \mathcal{Y} \rangle$ exceto $\langle 0, 0, 0 \rangle$
sendo que $[w', x', y']$ e $[w'', x'', y'']$	sendo que $\langle \mathcal{W}', \mathcal{X}', \mathcal{Y}' \rangle$ e $\langle \mathcal{W}'', \mathcal{X}'', \mathcal{Y}'' \rangle$
são o mesmo ponto se e somente se	são a mesma reta se e somente se
existe $\alpha > 0$ tal que	existe $\alpha > 0$ tal que
$w'' = \alpha w'$, $x'' = \alpha x'$ e $y'' = \alpha y'$.	$\mathcal{W}'' = \alpha \mathcal{W}'$, $\mathcal{X}'' = \alpha \mathcal{X}'$ e $\mathcal{Y}'' = \alpha \mathcal{Y}'$.
$\neg[w, x, y] = [-w, -x, -y] \neq [w, x, y]$	$\neg\langle \mathcal{W}, \mathcal{X}, \mathcal{Y} \rangle = \langle -\mathcal{W}, -\mathcal{X}, -\mathcal{Y} \rangle \neq \langle \mathcal{W}, \mathcal{X}, \mathcal{Y} \rangle$

Posição ponto-reta:

$$[w, x, y] \diamond \langle \mathcal{W}, \mathcal{X}, \mathcal{Y} \rangle = \operatorname{sgn}(\mathcal{W}w + \mathcal{X}x + \mathcal{Y}y)$$

Toda a geometria projetiva orientada segue destas definições.

Transformação projetiva de $\mathbb{T}^2$:
função de pontos para pontos que é
uma transformação linear das coordenadas homogêneas:

$$\begin{aligned} M([w,x,y]) &= [w,x,y] \begin{bmatrix} A & B & C \\ D & E & F \\ G & H & I \end{bmatrix} \\ &= [\, Aw + Dx + Gy, \\ &\qquad Bw + Ex + Hy, \\ &\qquad Cw + Fx + Iy \,] \end{aligned}$$

Exemplo de transformação projetiva de $\mathbb{T}^2$:

$$M([w,x,y]) = [w,x,y]\begin{bmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & -3 & 0 \end{bmatrix}$$

$$= \left[\ w,\ 4w-3y,\ 2w+2x\ \right]$$

Exemplo de transformação projetiva de $\mathbb{T}^2$:

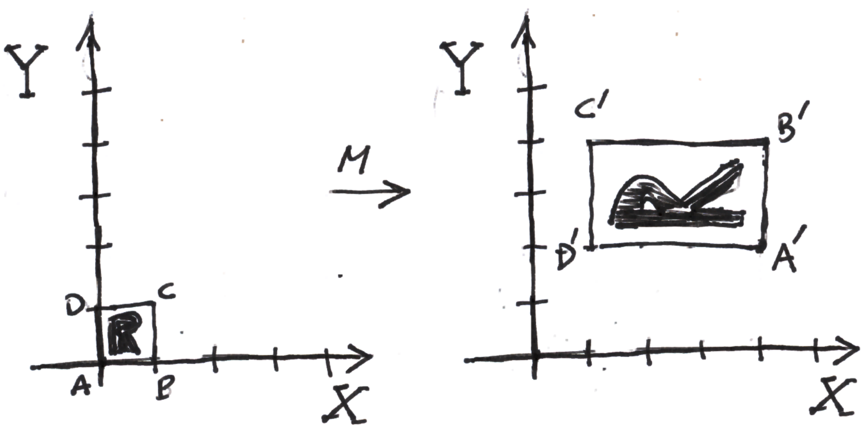
$$M([w,x,y]) \; = \; \big[\; w,\; 4w-3y,\; 2w+2x \;\big]$$

$M(A) = M([1,0,0]) = [1,4,2] = A'$

$M(B) = M([1,1,0]) = [1,4,4] = B'$

$M(C) = M([1,1,1]) = [1,1,4] = C'$

$M(D) = M([1,0,1]) = [1,1,2] = D'$



Propriedades de uma transformação projetiva M de $\mathbb{T}^2$:

- Só é válida se a matriz 3×3 $\widehat{M}$ tem determinante não nulo.
- $M(p)$ é definida para todo ponto p.
- $M(p)$ é o mesmo ponto de $\mathbb{T}^2$ quaisquer que sejam as coordenadas homogêneas escolhidas para p.
- M tem uma transformação inversa M^{-1}, tal que $M^{-1}(M(p)) = M(M^{-1}(p))$ para todo p.
- A matriz de M^{-1} é a inversa da matriz de M.

Mais propriedades de uma transformação projetiva M de $\mathbb{T}^2$:

- M preserva colinearidade: $M(p), M(q), M(r)$ são colineares se e somente se p, q, r são colineares.
- M preserva segmentos: a imagem de $\mathsf{S}(p, q)$ sob M é $\mathsf{S}(M(p), M(q))$.
- Idem para triângulos e conjutos convexos em geral.
- A transformação M não se altera se a matriz $\widehat{M}$ for multiplicada por qualquer $\alpha > 0$.

Mais propriedades de uma transformação projetiva M de $\mathbb{T}^2$:

- Se o determinante da matriz $\widehat{M}$ for positivo, M sempre preserva a orientação de 3 pontos: $\Delta(M(p), M(q), M(r)) = \Delta(p, q, r)$.
- Se o determinante da matriz $\widehat{M}$ for negativo, M sempre inverte a orientação de 3 pontos: $\Delta(M(p), M(q), M(r)) = -\Delta(p, q, r)$.

A primeira linha da matriz $\widehat{M}$ é para onde vai a origem do aquém:

$$[1,0,0]\begin{bmatrix} A & B & C \\ D & E & F \\ G & H & I \end{bmatrix} = [A,B,C]$$

para onde vai a
origem do aquém

Uma *transformação afim* de $\mathbb{T}^2$ é uma transformação projetiva que preserva a distinção finito/infinito.

Ou seja, se $M([w, x, y]) = [w', x', y']$, então $w = 0$ se e somente se $w' = 0$.

Forma geral:

sempre

para onde vai a origem do aquém

$$[w, x, y] \begin{bmatrix} 1 & U & V \\ 0 & A & B \\ 0 & C & D \end{bmatrix} = [w, U + Ax + Cy, V + Bx + Dy]$$

transformação linear do $\mathbb{R}^2$

Translação pelo vetor cartesiano (U, V):

$$
\begin{aligned}
M([w, x, y]) &= [w, x, y] \begin{bmatrix} 1 & U & V \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\
&= \left[\ w,\ Uw + x,\ Vw + y\ \right]
\end{aligned}
$$

$$M((X, Y)) = M([1, X, Y]) = [1, U{+}X, V{+}Y] = (X, Y){+}(U, V)$$

Mudança de escala por fatores α em X e β em Y:

$$\begin{aligned} M([w,x,y]) &= [w,x,y]\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha & 0 \\ 0 & 0 & \beta \end{bmatrix} \\ &= \left[\ w,\ \alpha x,\ \beta y\ \right] \end{aligned}$$

$$M((X,Y)) = M([1,X,Y]) = [1,\alpha X,\beta Y] = (\alpha X,\beta Y)$$

Rotação anti-horária por θ radianos:

$$\begin{aligned} M([w,x,y]) &= [w,x,y]\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & c & s \\ 0 & -s & c \end{bmatrix} \\ &= \left[\ w,\ cx - sy,\ sx + cy\ \right] \end{aligned}$$

onde $s = \sin\theta$ e $c = \cos\theta$.

$$\begin{aligned} M((X,Y)) = M([1,X,Y]) &= [1, cX - sY, sX + cY] \\ &= (cX - sY, sX + cY) \end{aligned}$$

Rotação anti-horária por 90 graus ($\pi/2$ radianos):

$$M([w,x,y]) = [w,x,y]\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & +1 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$= \left[\ w,\ -y,\ x\ \right]$$

$$M((X,Y)) = M([1,X,Y]) = [1,-Y,+X] = (-Y,+X)$$

Cisalhamento na direção X proposcional a Y com fator α:

$$M([w,x,y]) = [w,x,y]\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & \alpha & 1 \end{bmatrix}$$
$$= \left[\ w,\ x+\alpha y,\ y\ \right]$$

$$M((X,Y)) = M([1,X,Y]) = [1, X+\alpha Y, Y] = (X+\alpha Y, Y)$$

Espelhamento na direção X pelo eixo Y:

$$
\begin{aligned}
M([w,x,y]) &= [w,x,y]\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & +1 \end{bmatrix} \\
&= \left[\ w,\ -x,\ y\ \right]
\end{aligned}
$$

$$M((X,Y)) = M([1,X,Y]) = [1,-X,Y] = (-X,Y)$$

Rotaão por 180° (π radianos), ou espelhamento pela origem:

$$M([w,x,y]) = [w,x,y]\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$
$$= \left[\ w,\ -x,\ -y\ \right]$$

$$M((X,Y)) = M([1,X,Y]) = [1,-X,-Y] = (-X,-Y)$$

Composição de transformações projetivas M e Q aplicadas nessa ordem:

$$
\begin{aligned}
Q(M([w,x,y])) &= \left([w,x,y]\left[\widehat{M}\right]\right)\left[\widehat{Q}\right] \\
&= [w,x,y]\left(\left[\widehat{M}\right]\left[\widehat{Q}\right]\right)
\end{aligned}
$$

Por conta dessa fórmula, vamos escrever a composição na ordem de aplicação, ou seja "MQ" (em vez de $Q \circ M$ ou QM).

Então $p(MQ) = (pM)Q = pMQ$ para todo ponto p de $\mathbb{T}^2$.

Transformação afim que leva o trângulo canônico
$K = \mathsf{S}((0,0),\ (1,0),\ (0,1))$
para um trângulo qualquer
$T = \mathsf{S}((X_0, Y_0),\ (X_1, Y_1),\ (X_2, Y_2))$:

$$
\begin{aligned}
M((0,0)) &= \quad [\ 1\ 0\ 0\ ] \\
M((1,0)) &= \quad [\ 1\ 1\ 0\ ] \\
M((0,1)) &= \quad [\ 1\ 0\ 1\ ]
\end{aligned}
\begin{bmatrix} 1 & X_0 & Y_0 \\ 0 & X_1 - X_0 & Y_1 - Y_0 \\ 0 & X_2 - X_0 & Y_2 - Y_0 \end{bmatrix}
$$

$$
\begin{aligned}
&= [\ 1\ X_0\ Y_0\ ] \\
&= [\ 1\ X_1\ Y_1\ ] \\
&= [\ 1\ X_2\ Y_2\ ]
\end{aligned}
$$

Transformação afim que leva um trângulo genérico
$T' = \mathsf{S}((X_0', Y_0'), (X_1', Y_1'), (X_2', Y_2'))$ para outro triângulo genérico
$T'' = \mathsf{S}((X_0'', Y_0''), (X_1'', Y_1''), (X_2'', Y_2''))$:

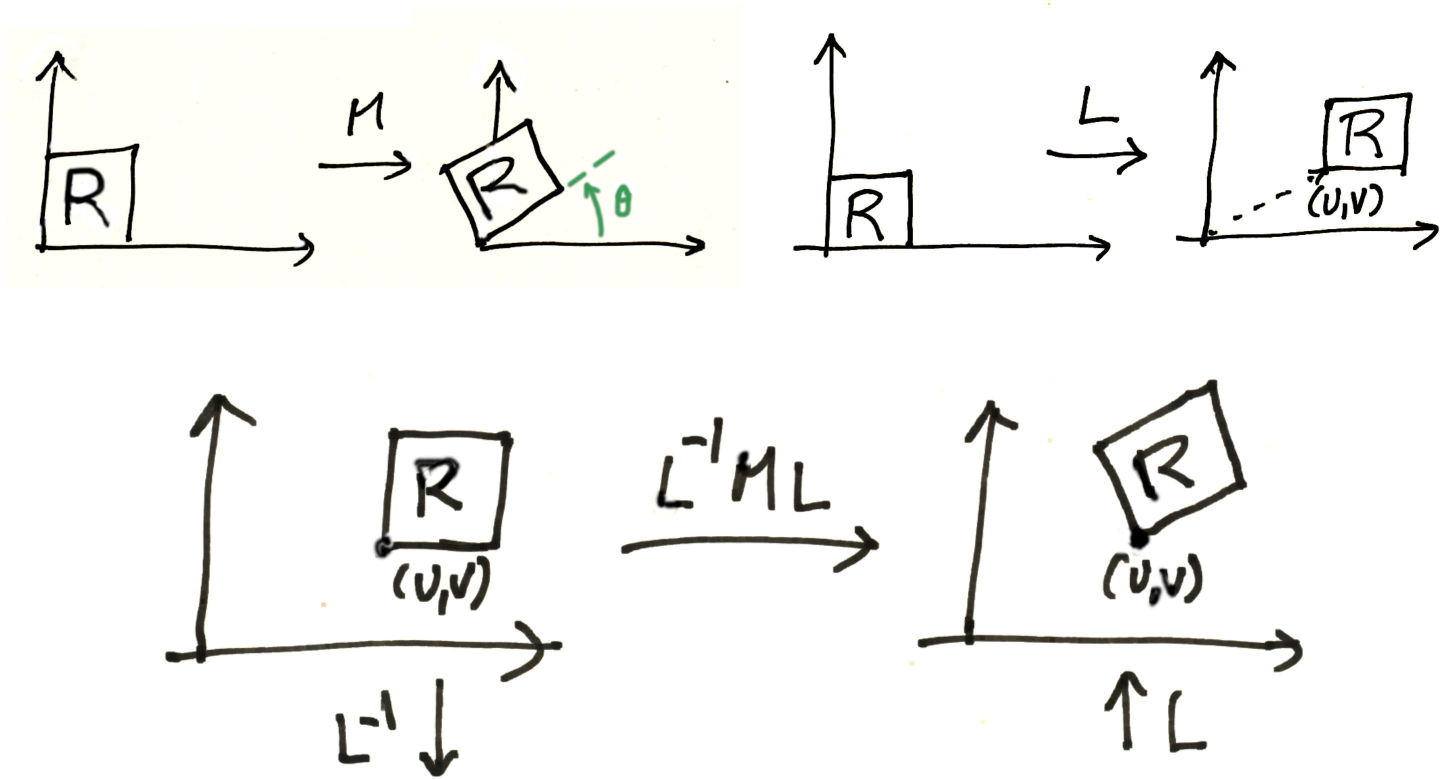
$$M = A^{-1}B$$

onde A leva K para T' e B leva K para T''.

A *conjugada de* uma transformação projetiva M *por* outra transformação L é a transformação $L^{-1}ML$.

Intuitivamente, $L^{-1}ML$ tem o efeito de M, mas no plano $\mathbb{T}^2$ transformado por L.

Por exemplo, se M é a rotação de 30 graus em torno da origem, e L é a translação que leva a origem para (U, V), então $L^{-1}ML$ é uma rotação de 30 graus emtorno de (U, V).


M
R
θ
L
(u,v)
$L^{-1}ML$
L^{-1}
L