O plano projetivo orientado 1

O *plano projetivo orientado* $\mathbb{T}^2$ consiste de *pontos*, *retas*, e uma relação ternária entre eles:

Pontos	Retas
Pontos: triplas $[w, x, y]$ exceto $[0, 0, 0]$	Retas: triplas $\langle \mathcal{W}, \mathcal{X}, \mathcal{Y} \rangle$ exceto $\langle 0, 0, 0 \rangle$
sendo que $[w', x', y']$ e $[w'', x'', y'']$	sendo que $\langle \mathcal{W}', \mathcal{X}', \mathcal{Y}' \rangle$ e $\langle \mathcal{W}'', \mathcal{X}'', \mathcal{Y}'' \rangle$
são o mesmo ponto se e somente se	são a mesma reta se e somente se
existe $\alpha > 0$ tal que	existe $\alpha > 0$ tal que
$w'' = \alpha w'$, $x'' = \alpha x'$ e $y'' = \alpha y'$.	$\mathcal{W}'' = \alpha \mathcal{W}'$, $\mathcal{X}'' = \alpha \mathcal{X}'$ e $\mathcal{Y}'' = \alpha \mathcal{Y}'$.
$\neg[w, x, y] = [-w, -x, -y] \neq [w, x, y]$	$\neg\langle \mathcal{W}, \mathcal{X}, \mathcal{Y} \rangle = \langle -\mathcal{W}, -\mathcal{X}, -\mathcal{Y} \rangle \neq \langle \mathcal{W}, \mathcal{X}, \mathcal{Y} \rangle$

Posição ponto-reta:

$$[w, x, y] \diamond \langle \mathcal{W}, \mathcal{X}, \mathcal{Y} \rangle = \operatorname{sgn}(\mathcal{W}w + \mathcal{X}x + \mathcal{Y}y)$$

Toda a geometria projetiva orientada segue destas definições.

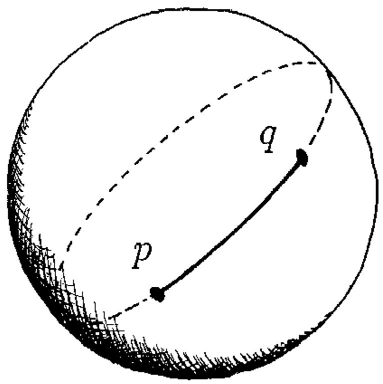
Sejam

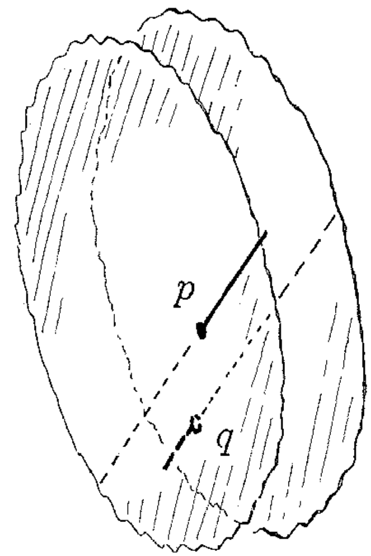
$$p_1 = [w_1, x_1, y_1]$$
$$p_2 = [w_2, x_2, y_2]$$

O segmento p_1p_2 é o conjunto de pontos

$$\mathsf{S}(p_1, p_2) = \{ [\ \alpha w_1 + \beta w_2,\ \alpha x_1 + \beta x_2,\ \alpha y_1 + \beta y_2\ ] : \alpha, \beta \geq 0 \wedge \alpha + \beta > 0 \}$$

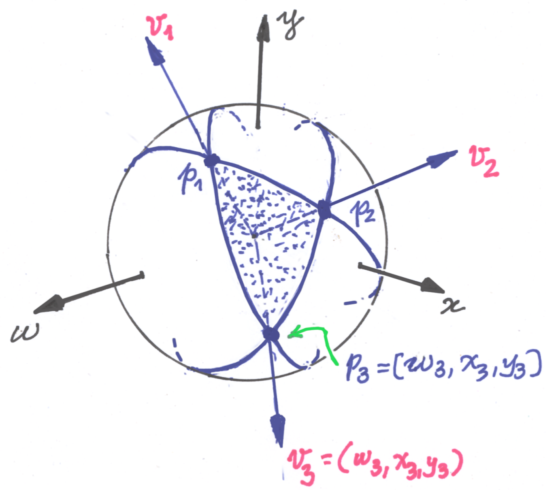
Segmentos nos modelos esférico e chato



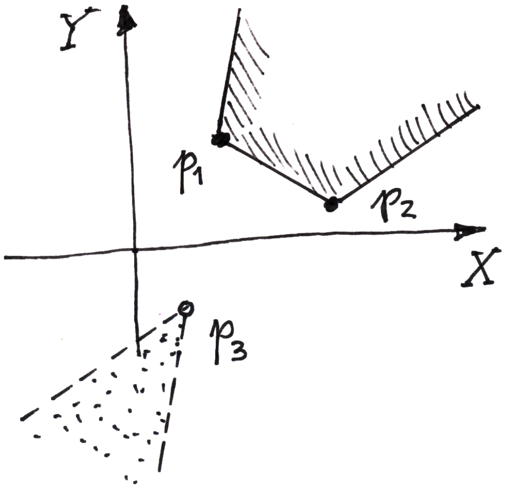


Dados três pontos $p_1 = [w_1, x_1, y_1]$, $p_1 = [w_2, x_2, y_2]$ e $p_3 = [w_3, x_3, y_3]$, o *triângulo* é o ocnjunto de pontos

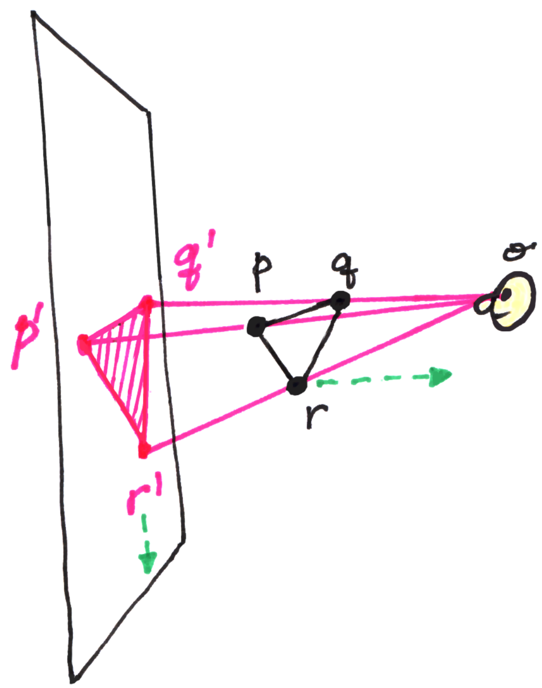
$$
\begin{aligned}
\mathsf{S}(p_1, p_2, p_3) \;=\; \{ \; [\; & \alpha w_1 + \beta w_2 + \gamma w_3, \\
& \alpha x_1 + \beta x_2 + \gamma x_3, \\
& \alpha y_1 + \beta y_2 + \gamma y_3 \\
] \\
: \\
& \alpha, \beta, \gamma \geq 0 \wedge \\
& \alpha + \beta + \gamma > 0 \\
\}
\end{aligned}
$$

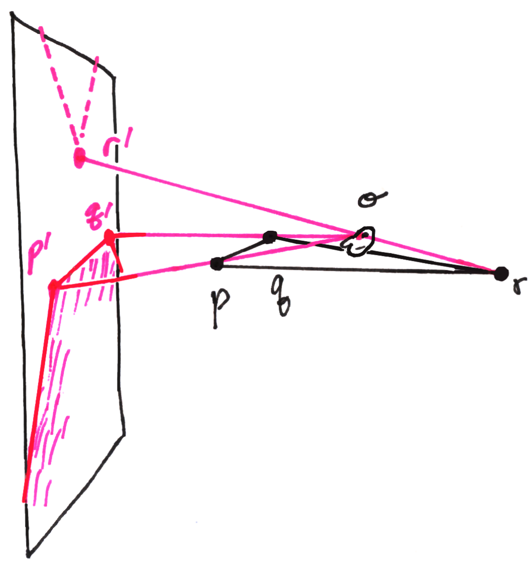


v_1
y
p_1
v_2
p_2
w
x
$p_3 = [w_3, x_3, y_3]$
$v_3 = (w_3, x_3, y_3)$



Y
p_1
p_2
X
p_3

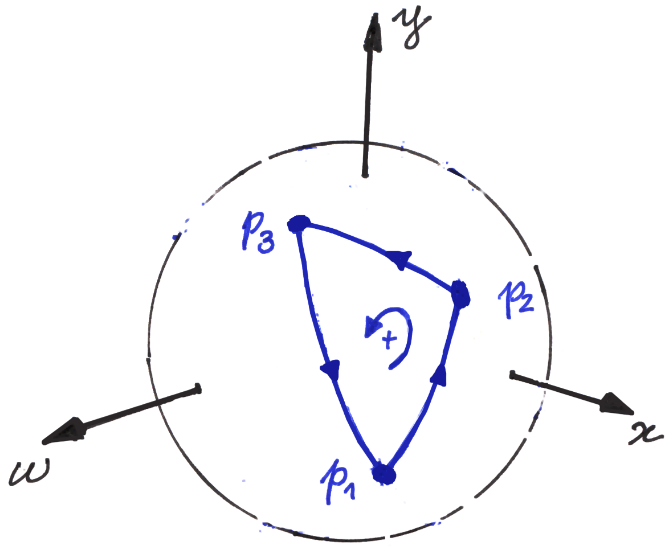

p'
q'
p
q
o
r
r'

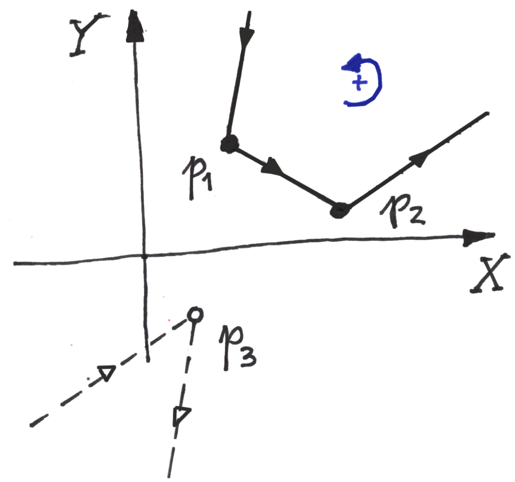

r'
o
q'
p'
p
q
r

Dados três pontos $p_1 = [w_1, x_1, y_1]$, $p_1 = [w_2, x_2, y_2]$ e $p_3 = [w_3, x_3, y_3]$, sua *orientação* é o sinal do determinante

$$\begin{aligned}\Delta(p_1, p_2, p_3) &= \operatorname{sgn}\begin{vmatrix} w_1 & x_1 & y_1 \\ w_2 & x_2 & y_2 \\ w_3 & x_3 & y_3 \end{vmatrix} \\ &= \operatorname{sgn}(w_1 x_2 y_3 + x_1 y_2 w_3 + y_1 w_2 x_3 \\ &\qquad - y_1 x_2 w_3 - x_1 w_2 y_3 - w_1 y_2 x_3)\end{aligned}$$

Orientação de 3 pontos





$$\begin{aligned}\Delta(p_2, p_1, p_3) &= \\ \Delta(p_3, p_2, p_1) &= \\ \Delta(p_1, p_3, p_2) &= \\ -\Delta(p_1, p_2, p_3)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\Delta(\neg p_1, p_2, p_3) &= \\ \Delta(p_1, \neg p_2, p_3) &= \\ \Delta(p_1, p_2, \neg p_3) &= \\ -\Delta(p_1, p_2, p_3)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\Delta(p_1, p_1, p_3) &= \\ \Delta(p_1, p_2, p_2) &= \\ \Delta(p_1, p_2, p_1) &= 0\end{aligned}$$

Os três pontos são colineares se e somente se $\Delta(p_1, p_2, p_3) = 0$

$$\begin{aligned}\Delta(p_1,p_2,p_3) &= \operatorname{sgn}\begin{vmatrix} w_1 & x_1 & y_1 \\ w_2 & x_2 & y_2 \\ w_3 & x_3 & y_3 \end{vmatrix} \\ &= \operatorname{sgn}\left(+w_1\begin{vmatrix} x_2 & y_2 \\ x_3 & y_3 \end{vmatrix} - x_1\begin{vmatrix} w_2 & y_2 \\ w_3 & y_3 \end{vmatrix} + y_1\begin{vmatrix} w_2 & x_2 \\ w_3 & x_3 \end{vmatrix}\right)\end{aligned}$$

Portanto

$$\begin{aligned}\Delta(p_1,p_2,p_3) &= p_1 \diamond (p_2 \vee p_3) \\ &= p_2 \diamond (p_3 \vee p_1) \\ &= p_3 \diamond (p_1 \vee p_2)\end{aligned}$$

Transformação projetiva de $\mathbb{T}^2$:
função de pontos para pontos que é
uma transformação linear das coordenadas homogêneas:

$$M([w,x,y]) = [w,x,y]\begin{bmatrix} A & B & C \\ D & E & F \\ G & H & I \end{bmatrix}$$

$$= [\,Aw + Dx + Gy,\; Bw + Ex + Hy,\; Cw + Fx + Iy\,]$$

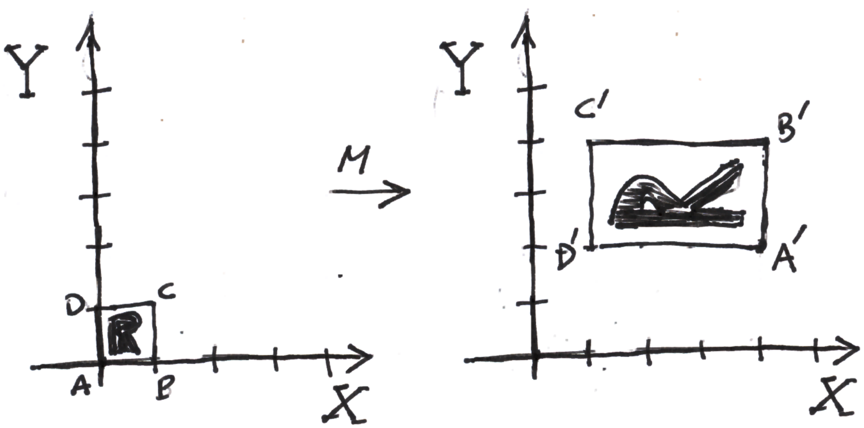
Exemplo de transformação projetiva de $\mathbb{T}^2$:

$$\begin{aligned} M([w,x,y]) &= [w,x,y]\begin{bmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & -3 & 0 \end{bmatrix} \\ &= \left[\; w,\; 4w-3y,\; 2w+2x \;\right] \end{aligned}$$

Exemplo de transformação projetiva de $\mathbb{T}^2$:

$$M([w,x,y]) \;=\; \left[\; w,\ 4w-3y,\ 2w+2x \;\right]$$

$M(A) = M([1,0,0]) = [1,4,2] = A'$
$M(B) = M([1,1,0]) = [1,4,4] = B'$
$M(C) = M([1,1,1]) = [1,1,4] = C'$
$M(D) = M([1,0,1]) = [1,1,2] = D'$



Propriedades de uma transformação projetiva M de $\mathbb{T}^2$:

- Só é válida se a matriz 3×3 $\widehat{M}$ tem determinante não nulo.
- $M(p)$ é definida para todo ponto p.
- $M(p)$ é o mesmo ponto de $\mathbb{T}^2$ quaisquer que sejam as coordenadas homogêneas escolhidas para p.
- M tem uma transformação inversa M^{-1}, tal que $M^{-1}(M(p)) = M(M^{-1}(p))$ para todo p.
- A matriz de M^{-1} é a inversa da matriz de M.

Mais propriedades de uma transformação projetiva M de $\mathbb{T}^2$:

- M preserva colinearidade: $M(p), M(q), M(r)$ são colineares se e somente se p, q, r são colineares.
- M preserva segmentos: a imagem de $\mathsf{S}(p, q)$ sob M é $\mathsf{S}(M(p), M(q))$.
- Idem para triângulos e conjutos convexos em geral.
- A transformação M não se altera se a matriz $\widehat{M}$ for multiplicada por qualquer $\alpha > 0$.

Mais propriedades de uma transformação projetiva M de $\mathbb{T}^2$:

- Se o determinante da matriz $\widehat{M}$ for positivo, M sempre preserva a orientação de 3 pontos: $\Delta(M(p), M(q), M(r)) = \Delta(p, q, r)$.
- Se o determinante da matriz $\widehat{M}$ for negativo, M sempre inverte a orientação de 3 pontos: $\Delta(M(p), M(q), M(r)) = -\Delta(p, q, r)$.

A primeira linha da matriz $\widehat{M}$ é para onde vai a origem do aquém:

$$[1, 0, 0] \begin{bmatrix} A & B & C \\ D & E & F \\ G & H & I \end{bmatrix} = [A, B, C]$$

para onde vai a origem do aquém