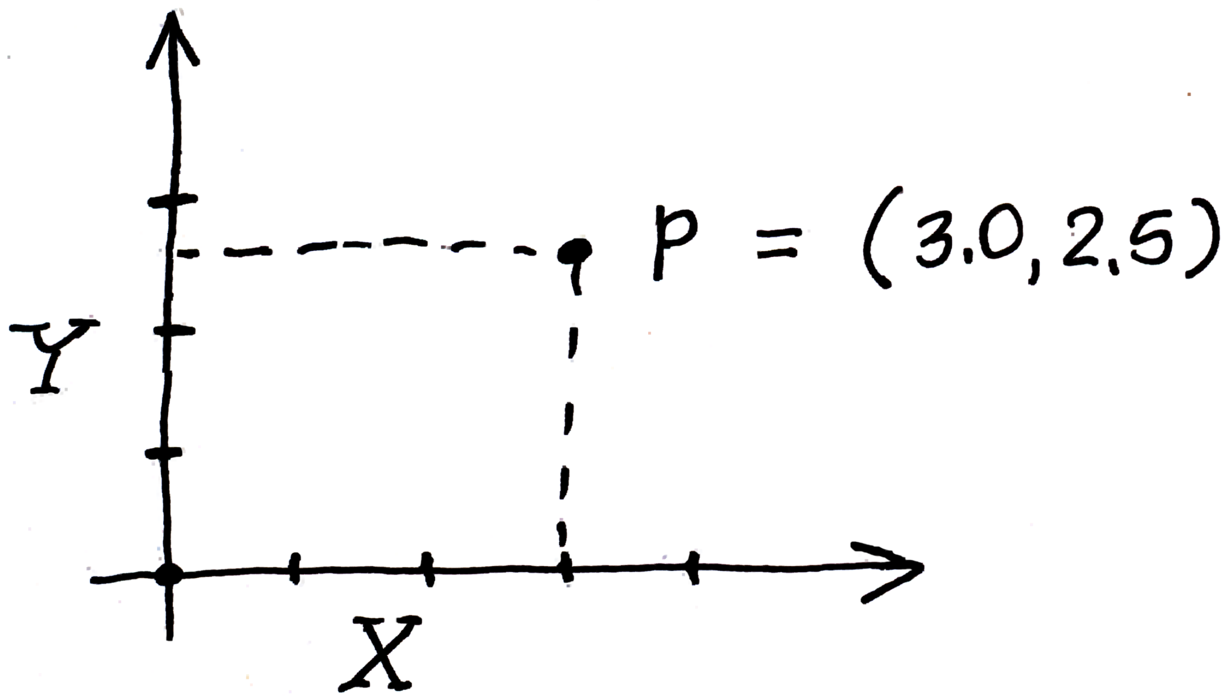
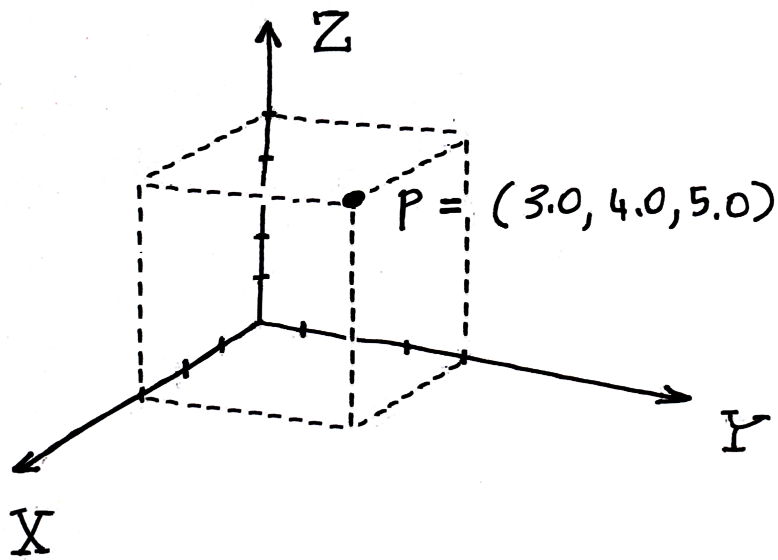
Coordenadas cartesianas no plano

A maneira mais óbvia de fazer geometria no computador é usar geometria analítica, onde pontos são representados por suas coordenadas cartesianas.

Um ponto no plano pode ser representado por um par (X, Y) de números "reais" (ponto flutuante):



Um ponto no epaço pode ser representado por uma tripla (X, Y, Z) de coordenadas:



Operações com coordenadas

Um segmento de reta pode ser representado pelas coordenadas de seus dois extremos.

Determinando o ponto médio p_{m} de um segmento com extremos p_1, p_2:

$$
\begin{aligned}
p_1 &= (X_1, Y_1) \\
p_2 &= (X_2, Y_2) \\
p_{\mathrm{m}} &= \left(\frac{X_1 + X_2}{2}, \frac{Y_1 + Y_2}{2} \right)
\end{aligned}
$$

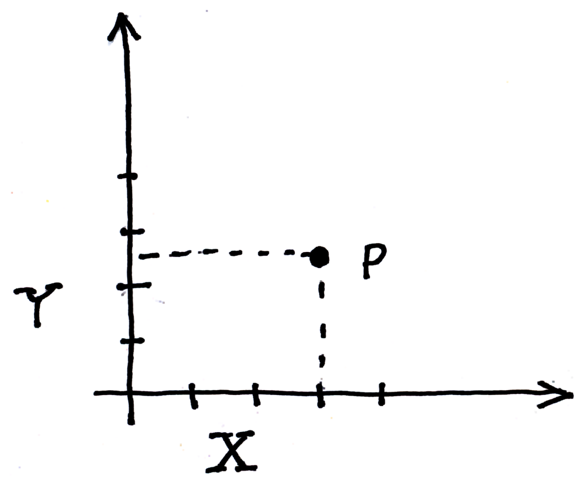
Programas (e hardware) para computação gráfica geralmente usam outra representação, *coordenadas homogêneas*.

As coordenadas homogêneas de um ponto no plano são quaisquer três números reais $[w, x, y]$, tais que as coordenadas cartesianas são $X = x/w$ e $Y = y/w$.

Ou seja, se as coordenadas cartesianas são (X, Y), as coordenadas homogêneas são $[w, wX, wY]$ para qualquer $w > 0$.

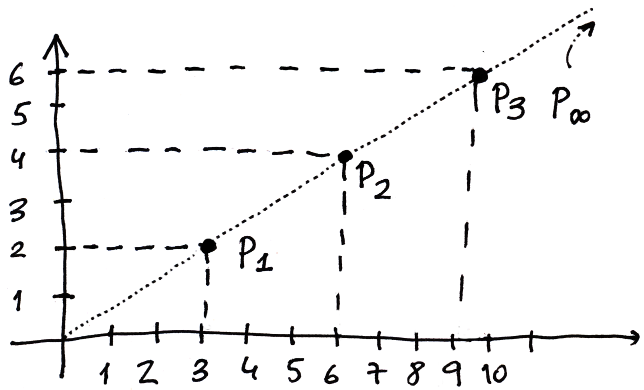
Convenção:

- Cartesianas: $(,)$ e maiúsculas $X, Y, \ldots$
- Homogêneas: $[,,]$ e minúsculas $w, x, y, \ldots$



$$
\begin{aligned}
p &= (3.0, 2.5) \\
&= [1.0, 3.0, 2.5] \\
&= [2, 6, 5] \\
&= [100, 300, 250] \\
&= [0.010, 0.030, 0.025] \\
&= [12, 36, 30] \\
&= \ldots
\end{aligned}
$$

Interpretação de $[0, 3, 2]$: limite de $[w, 3, 2]$ quando w tende a zero.



$$
\begin{aligned}
p_1 = [1, 3, 2] &= (3, 2) \\
p_2 = [1/2, 3, 2] &= (6, 4) = 2(3, 2) \\
p_3 = [1/3, 3, 2] &= (9, 6) = 3(3, 2) \\
&\dots \\
p_\infty = [0, 3, 2] &= \infty(3, 2)
\end{aligned}
$$

Equivalência de coordenadas homogêneas

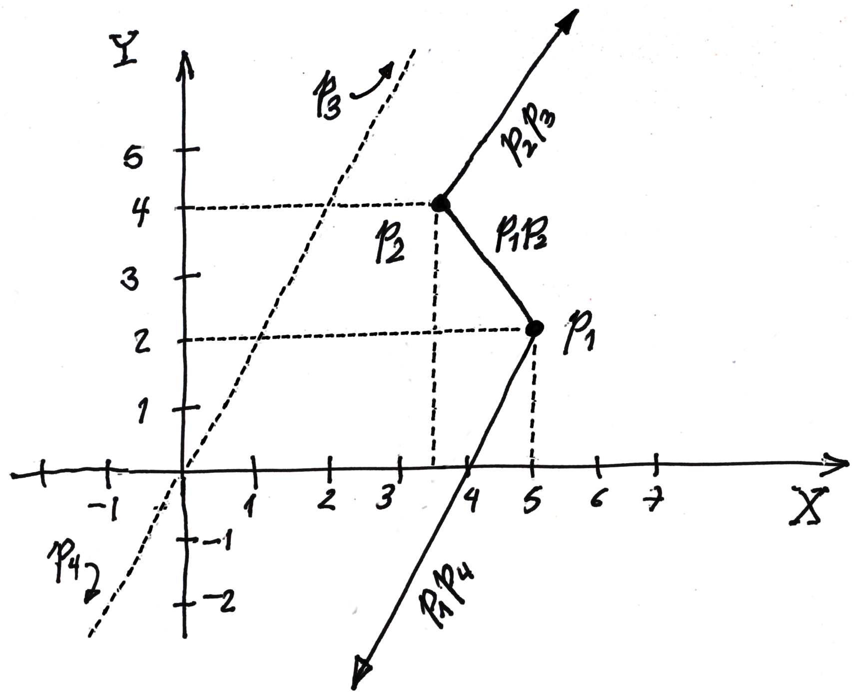
$$
\begin{aligned}
p' &= [w', x', y'] \\
p'' &= [w'', x'', y'']
\end{aligned}
$$

p' e p'' são o mesmo ponto
se e somente se
existe um real $\alpha > 0$ tal que

$$w' = \alpha w'' \qquad x' = \alpha x'' \qquad y' = \alpha y''$$

$$
\begin{aligned}
[2, 3, 5] &\equiv [20, 30, 50] \\
[6, 3, 9] &\not\equiv [6, 30, 90] \\
[0, 3, -5] &\not\equiv [0, -3, 5]
\end{aligned}
$$

$$p_1 = [+1, +5, +2] \;=\; (5, 2)$$
$$p_2 = [+2, +7, +8] \;=\; (7/2, 8/2) = (3.5, 4.0)$$
$$p_3 = [\;\;0, +1, +2] \;=\; \infty(1, 2)$$
$$p_4 = [\;\;0, -1, -2] \;=\; \infty(-1, -2)$$



Reta em coordenadas cartesianas: o ponto (X, Y) está na reta se e somente se

$$AX + BY + C = 0$$

onde A, B, C são números reais, os *coeficientes* da reta.

Em coordenadas homogêneas: o ponto $[w, x, y]$ com $w > 0$ está nessa reta se e somente se

$$A\frac{x}{w} + B\frac{y}{w} + C = 0$$

ou seja

$$Ax + By + Cw = 0$$

Quando se trabalha com coordenadas homogêneas, a equação

$$Ax + By + Cw = 0$$

fica mais natural se escrita

$$\mathcal{W}w + \mathcal{X}x + \mathcal{Y}y = 0$$

onde $\mathcal{W} = C$, $\mathcal{X} = A$, $\mathcal{Y} = B$. Estes números, *nesta orderm*, são os *coeficientes homogêneos* da reta.

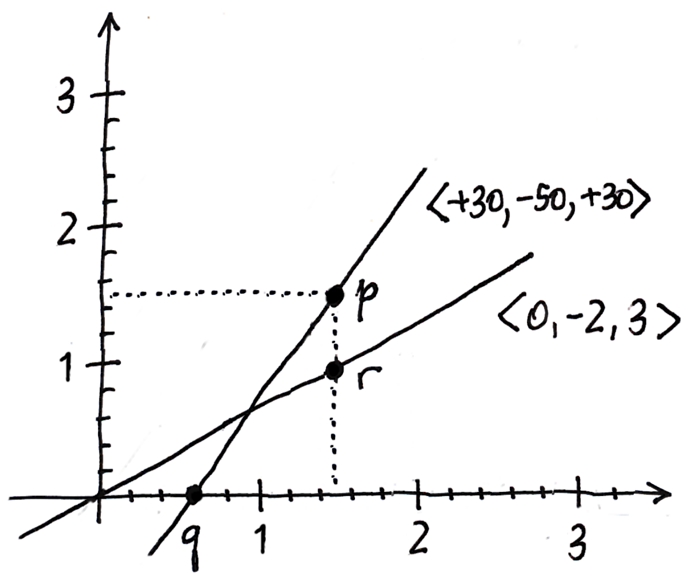
Indicamos essa reta por $\langle \mathcal{W}, \mathcal{X}, \mathcal{Y} \rangle$.

0520-retas-h

Por exemplo, os pontos $p = [2, 3, 3]$ e $q = [5, 3, 0]$ estão na reta $\langle +30, -50, +30 \rangle$, pois

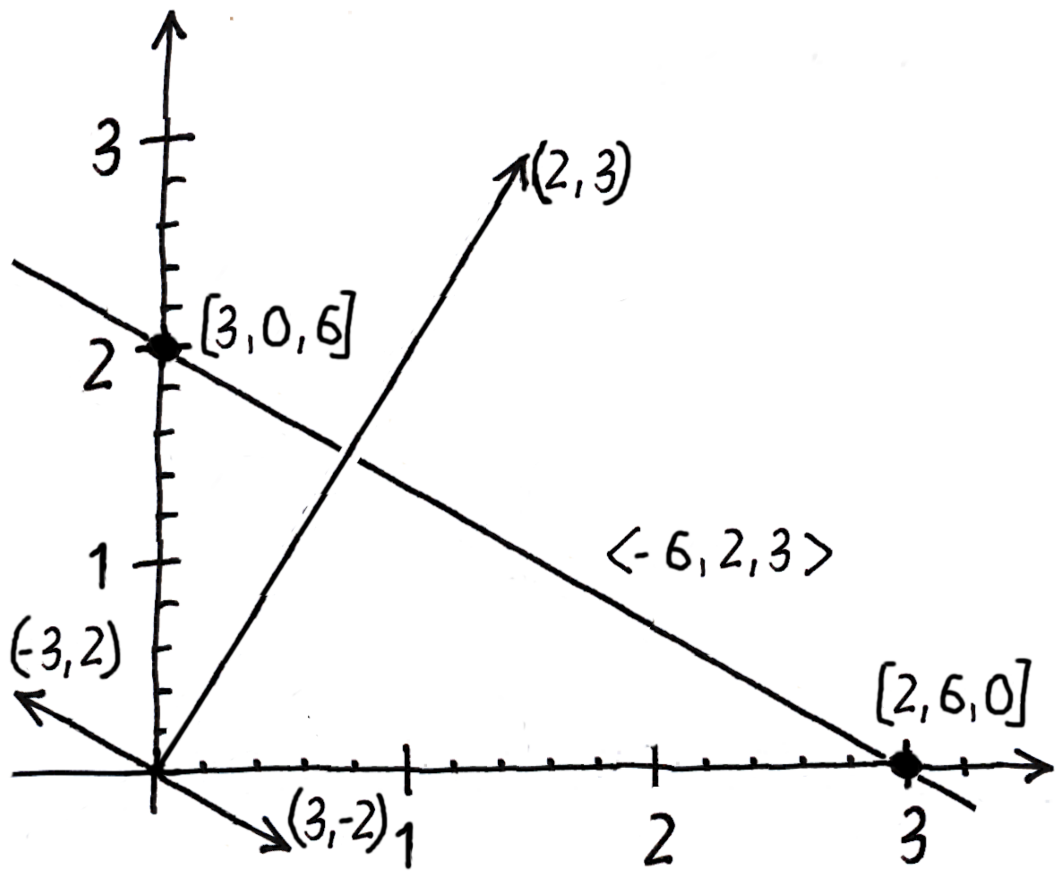
$$\begin{aligned}(+30) \cdot 2 + (-50) \cdot 3 + (+30) \cdot 3 &= 0 \\ (+30) \cdot 5 + (-50) \cdot 3 + (+30) \cdot 0 &= 0\end{aligned}$$

Por outro lado, o ponto $r = [2, 3, 2]$ não está nessa reta, mas está na reta $\langle 0, -2, 3 \rangle$.



Em geral, os coeficientes $\langle \mathcal{W}, \mathcal{X}, \mathcal{Y} \rangle$ tem as seguintes interpretações:

- $(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$ é um vetor **perpendicular** à reta.
- $(-\mathcal{Y}, \mathcal{X})$ e $(\mathcal{Y}, -\mathcal{X})$ são vetores **paralelos** à reta.
- $\mathcal{W}$ é zero se e somente se a reta passa pela origem.
- $\mathcal{X}$ é zero se e somente se a reta é horizontal (não depende de X).
- $\mathcal{Y}$ é zero se e somente se a reta é vertical (não depende de Y).
- A distância da reta à origem é $|\mathcal{W}| / \sqrt{\mathcal{X}^2 + \mathcal{Y}^2}$.
- Os pontos $[\mathcal{X}, -\mathcal{W}, 0]$ e $[\mathcal{Y}, 0, -\mathcal{W}]$, se válidos, estão sobre a reta.


3
2
1
(2, 3)
[3, 0, 6]
<- 6, 2, 3>
(-3, 2)
[2, 6, 0]
(3, -2)
1
2
3

Pontos no infinito de reta

Por defininição, o ponto $[w, x, y]$ está na reta $\langle \mathcal{W}, \mathcal{X}, \mathcal{Y} \rangle$ se e somente se

$$\mathcal{W}w + \mathcal{X}x + \mathcal{Y}y = 0$$

mesmo quando o ponto está no infinito $(w = 0)$.

Uma reta $\langle \mathcal{W}, \mathcal{X}, \mathcal{Y} \rangle$ normalmente tem dois pontos no infinito:
$[0, -\mathcal{Y}, \mathcal{X}]$ e $[0, \mathcal{Y}, -\mathcal{X}]$ (nas duas direções paralelas à reta).

Formalmente, uma reta em coordenadas homogêneas é uma tripla $\langle \mathcal{W}, \mathcal{X}, \mathcal{Y} \rangle$, onde $\mathcal{W}, \mathcal{X}, \mathcal{Y}$ não são todos zero.

Duas triplas $\langle \mathcal{W}', \mathcal{X}', \mathcal{Y}' \rangle$ e $\langle \mathcal{W}'', \mathcal{X}'', \mathcal{Y}'' \rangle$ são a mesma reta se e somente se existe um real $\alpha > 0$ tal que

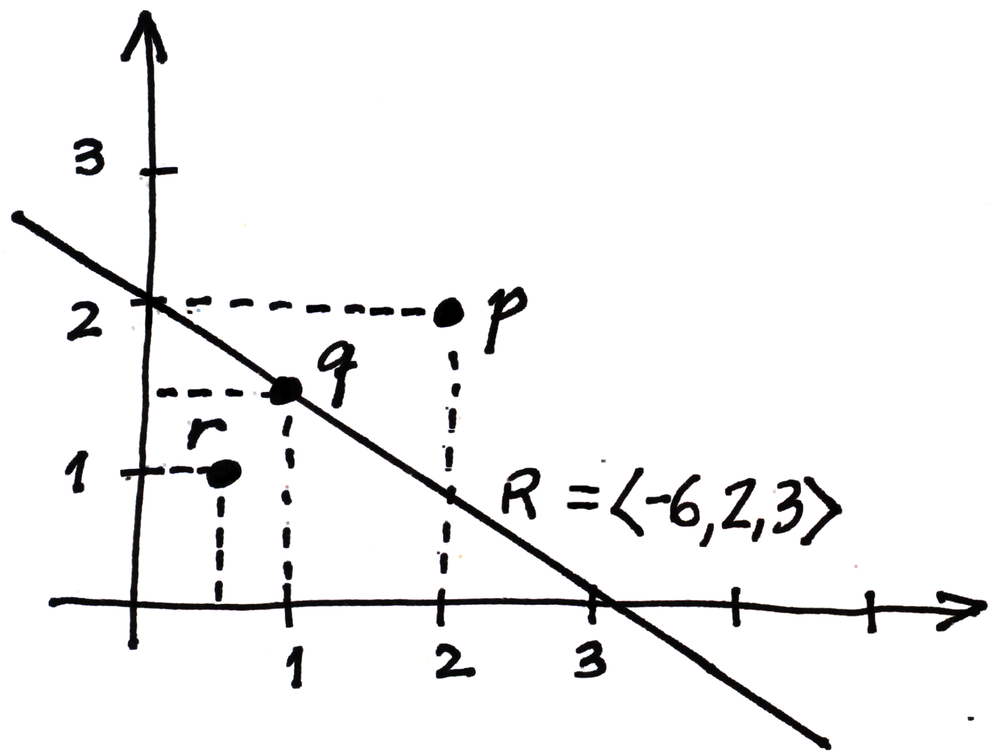
$$\mathcal{W}' = \alpha \mathcal{W}'' \qquad \mathcal{X}' = \alpha \mathcal{X}'' \qquad \mathcal{Y}' = \alpha \mathcal{Y}''$$

Posição relativa de ponto e reta

A *posição* do ponto $p = [w, x, y]$ em relação à reta $R = \langle \mathcal{W}, \mathcal{X}, \mathcal{Y} \rangle$ é

$$p \diamond R = \operatorname{sgn}(\mathcal{W}w + \mathcal{X}x + \mathcal{Y}y) = \begin{cases} -1 & \textit{lado negativo} \\ 0 & \textit{sobre} \\ +1 & \textit{lado positivo} \end{cases}$$

onde $\operatorname{sgn}(x)$ é o sinal de x (-1, 0, ou $+1$).



$$
\begin{array}{lll}
p \diamond R = [1,2,2] \diamond \langle -6,2,3 \rangle = \mathrm{sgn}(-6+4+6) & = \mathrm{sgn}(+4) & = \ \ +1 \\
q \diamond R = [3,3,4] \diamond \langle -6,2,3 \rangle = \mathrm{sgn}(-18+6+12) & = \mathrm{sgn}(0) & = \ \ \ \ 0 \\
r \diamond R = [2,1,2] \diamond \langle -6,2,3 \rangle = \mathrm{sgn}(-12+2+6) & = \mathrm{sgn}(-4) & = \ \ -1
\end{array}
$$

Pela definição do $\mathbb{T}^2$, as retas $R = \langle -6, +2, +3\rangle$ e $S = \langle +6, -2, -3\rangle$ são distintas.

Elas passam pelos mesmos pontos:

$$[w, x, y]\diamond R = 0 \Leftrightarrow -6w+2x+3y = 0 \Leftrightarrow +6w-2x-2y = 0 \Leftrightarrow [w, x, y]\diamond S = 0$$

Mas os lados positvos e negativos são invertidos:

$$[w, x, y]\diamond R = +1 \Leftrightarrow -6w+2x+3y > 0 \Leftrightarrow +6w-2x-2y < 0 \Leftrightarrow [w, x, y]\diamond S = -1$$

$$[w, x, y]\diamond R = -1 \Leftrightarrow -6w+2x+3y < 0 \Leftrightarrow +6w-2x-2y > 0 \Leftrightarrow [w, x, y]\diamond S = +1$$

Em geral, a reta $\langle \mathcal{W}, \mathcal{X}, \mathcal{Y}\rangle$ é distinta da *reta oposta* $\neg\langle \mathcal{W}, \mathcal{X}, \mathcal{Y}\rangle = \langle -\mathcal{W}, -\mathcal{X}, -\mathcal{Y}\rangle$, embora passe pelos mesmos pontos. A diferença é qual lado é positivo, e qual é negativo.

Pontos antípodas

Pela definição, $[-2,-3,-5]$ é um ponto vãlido de $\mathbb{T}^2$, distinto de $[2,3,5]$.

Por convenção, ambos tem as mesmas coordenadas cartesianas: $(-3/-2,-5/-2)=(3/2,5/2)$.

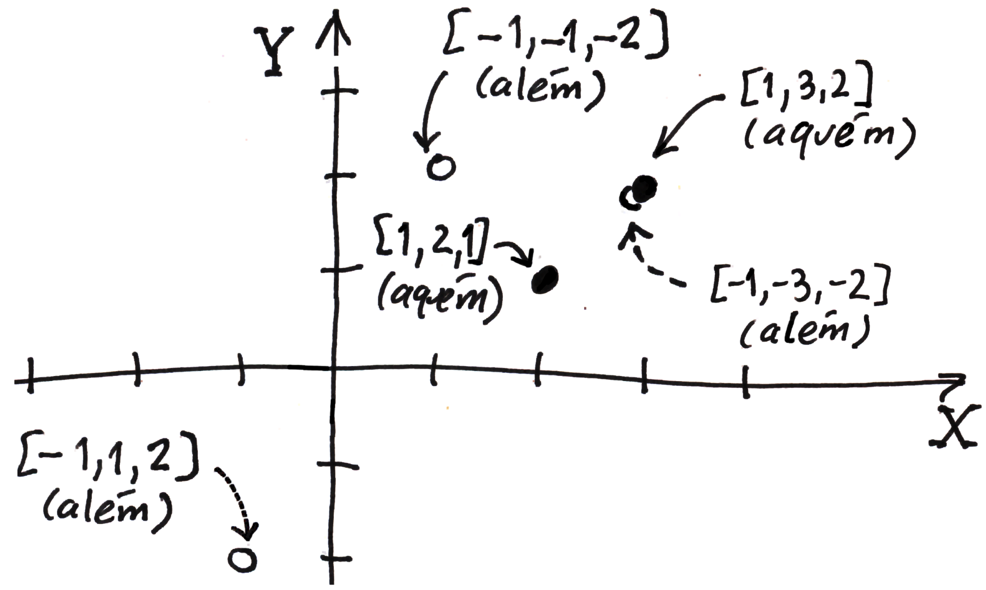
Para manter a distinção, imaginamos que o plano $\mathbb{R}^2$ é uma folha infinita de papel, e que $[2,3,5]$ está “na frente” dessa folha (no *aquém* do $\mathbb{R}^2$), enquanto que $[-2,-3,-5]$ está na mesma posição mas “no verso” da folha (no *além* do $\mathbb{R}^2$).

De modo geral, a *interpretação cartesiana* de um ponto $[w,x,y]$ de $\mathbb{T}^2$ é

- O ponto $(x/w, y/w)$ do aquém do $\mathbb{R}^2$, se $w>0$;
- O ponto no infinito na direção (x,y) do aquém, se $w=0$;
- O ponto $(x/w, y/w)$ do além do $\mathbb{R}^2$, se $w<0$.

O ponto $[-w,-x,-y]$ é o *antípoda* de $[w,x,y]$, denotado por $\neg[w,x,y]$

Pontos antípodas - aquém e além



Para quaisquer pontos p, q e retas R, S:

- $(\neg(\neg p)) = p$ e $(\neg(\neg R)) = R$
- $(\neg p) \diamond R = p \diamond (\neg R) = -(p \diamond R)$.
- $(\neg p) \diamond (\neg R) = p \diamond R$.
- p está sobre R se e somente se $\neg p$ está sobre R.
- p está sobre R se e somente se p está sobre $\neg R$.
- Se p é finito, p e $\neg p$ tem as mesmas coordenadas cartesianas.
- Se R é finita, R e $\neg R$ tem as mesmas equações cartesianas.

O *plano projetivo orientado* $\mathbb{T}^2$ consiste de *pontos*, *retas*, e uma relação ternária entre eles:

Pontos	Retas
Pontos: triplas $[w, x, y]$ exceto $[0, 0, 0]$ sendo que $[w', x', y']$ e $[w'', x'', y'']$ são o mesmo ponto se e somente se existe $\alpha > 0$ tal que $w'' = \alpha w'$, $x'' = \alpha x'$ e $y'' = \alpha y'$.	Retas: triplas $\langle \mathcal{W}, \mathcal{X}, \mathcal{Y} \rangle$ exceto $\langle 0, 0, 0 \rangle$ sendo que $\langle \mathcal{W}', \mathcal{X}', \mathcal{Y}' \rangle$ e $\langle \mathcal{W}'', \mathcal{X}'', \mathcal{Y}'' \rangle$ são a mesma reta se e somente se existe $\alpha > 0$ tal que $\mathcal{W}'' = \alpha \mathcal{W}'$, $\mathcal{X}'' = \alpha \mathcal{X}'$ e $\mathcal{Y}'' = \alpha \mathcal{Y}'$.
$\neg[w, x, y] = [-w, -x, -y] \neq [w, x, y]$	$\neg\langle \mathcal{W}, \mathcal{X}, \mathcal{Y} \rangle = \langle -\mathcal{W}, -\mathcal{X}, -\mathcal{Y} \rangle \neq \langle \mathcal{W}, \mathcal{X}, \mathcal{Y} \rangle$

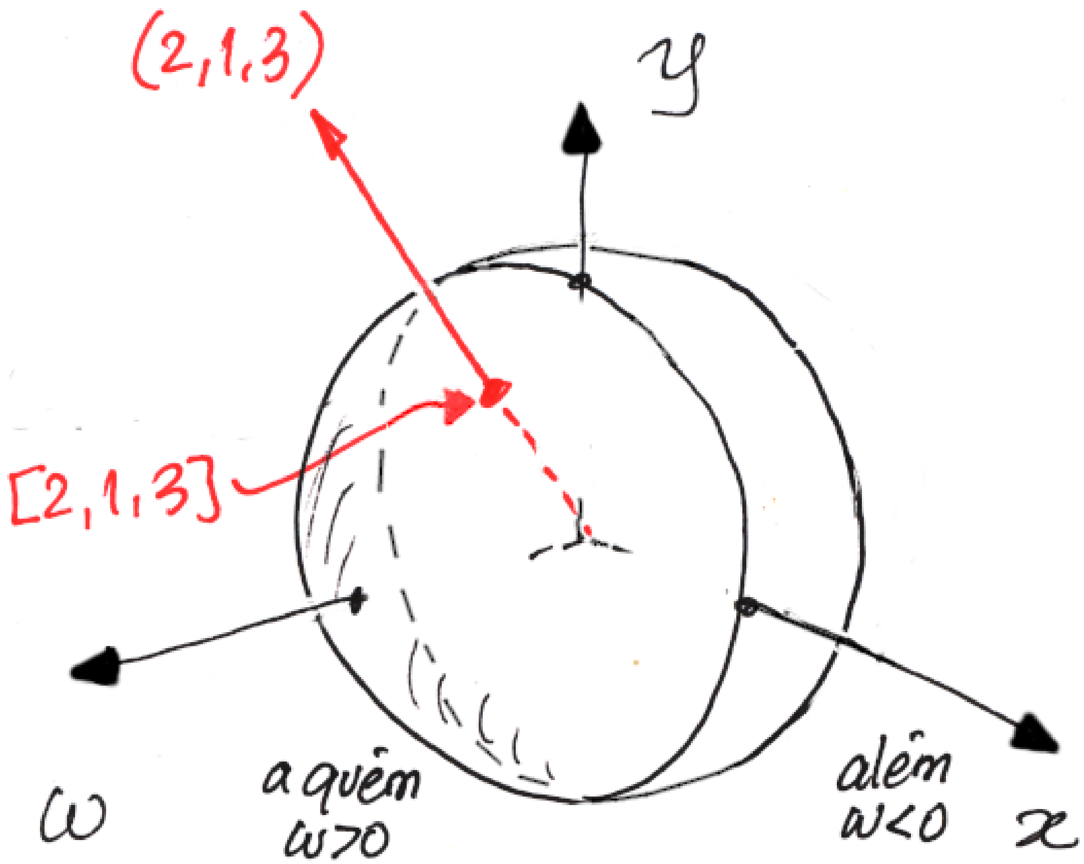
Posição ponto-reta:

$$[w, x, y] \diamond \langle \mathcal{W}, \mathcal{X}, \mathcal{Y} \rangle = \operatorname{sgn}(\mathcal{W} w + \mathcal{X} x + \mathcal{Y} y)$$

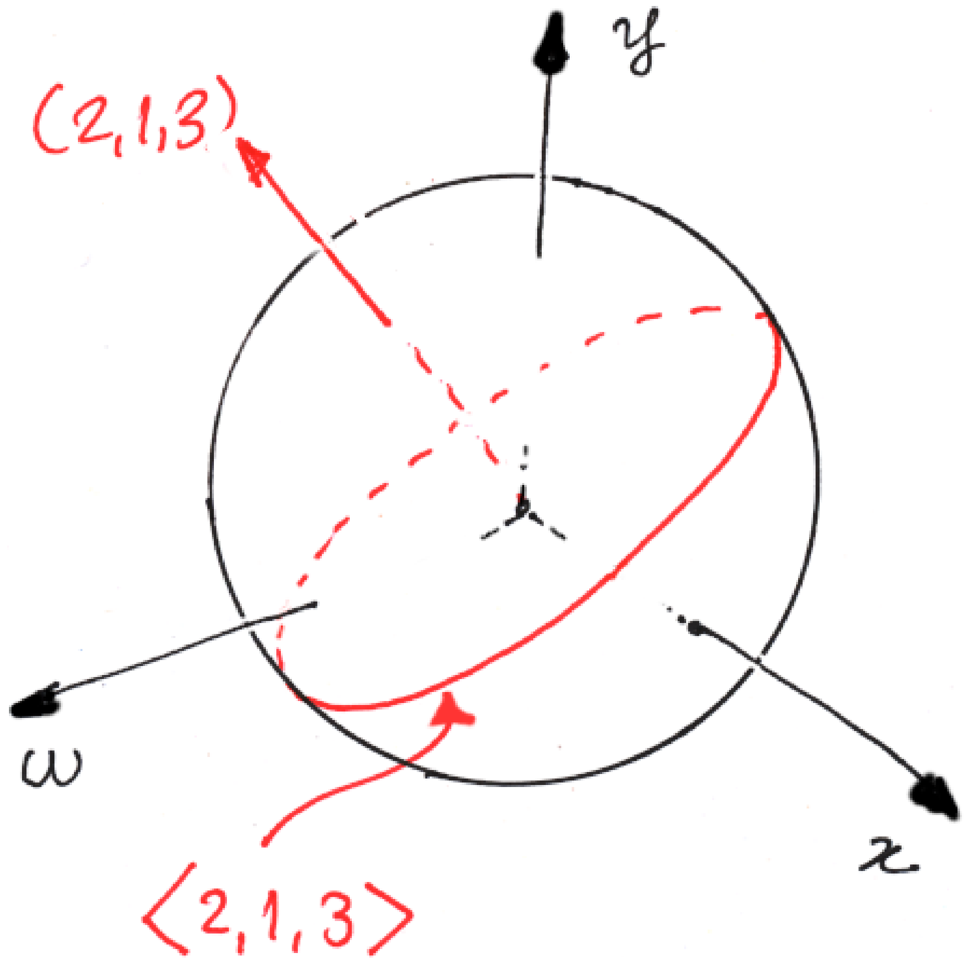
Toda a geometria projetiva orientada segue destas definições.

Modelo esférico - ponto

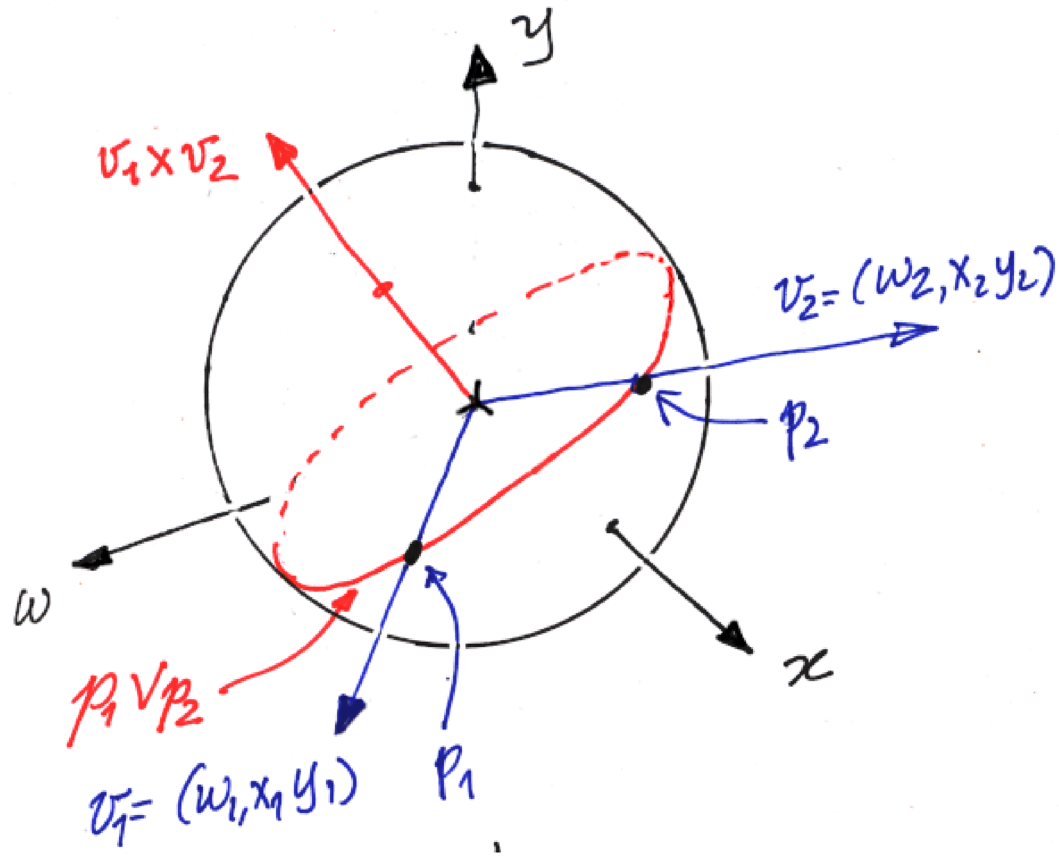
$$[w, x, y] \quad \leftrightarrow \quad \frac{(w, x, y)}{\sqrt{w^2 + x^2 + y^2}}$$



$$\langle \mathcal{W}, \mathcal{X}\, \mathcal{Y} \rangle \quad \leftrightarrow \quad \text{círculo perpendicular a } (\mathcal{W}, \mathcal{X}, \mathcal{Y})$$

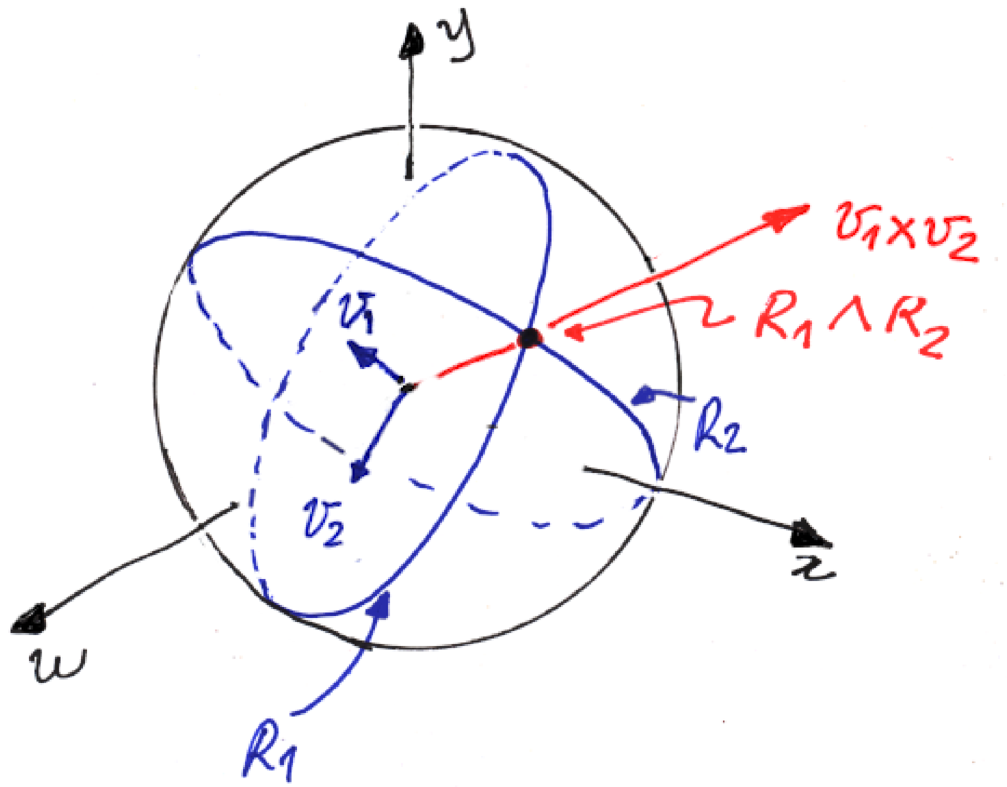


Modelo esférico - reta por dois pontos



Dados pontos $p_1 = [w_1, x_1, y_1]$ e $p_2 = [w_2, x_2, y_2]$, a reta p_1 *junta* p_2 é

$$
\begin{aligned}
p_1 \vee p_2 &= \left\langle +\begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix}, -\begin{vmatrix} w_1 & y_1 \\ w_2 & y_2 \end{vmatrix}, +\begin{vmatrix} w_1 & x_1 \\ w_2 & x_2 \end{vmatrix} \right\rangle \\
&= \langle\, x_1 y_2 - x_2 y_1,\; y_1 w_2 - y_2 w_1,\; w_1 x_2 - w_2 x_1 \,\rangle
\end{aligned}
$$

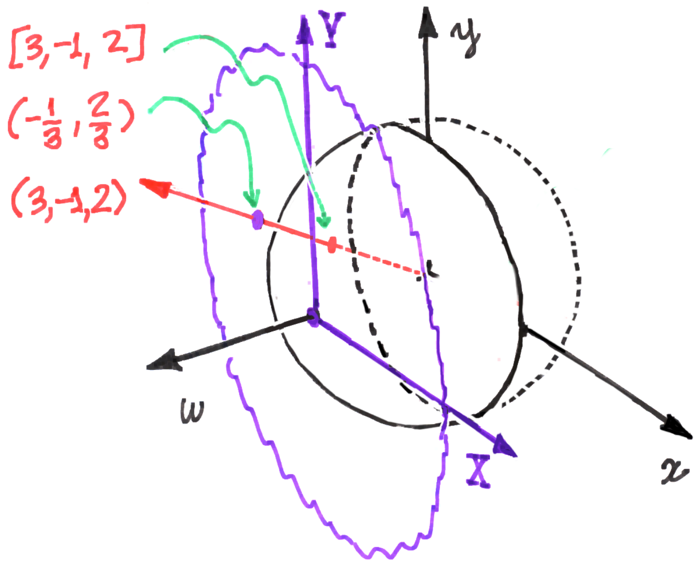

y
$v_1 \times v_2$
$R_1 \wedge R_2$
v_1
R_2
v_2
z
w
R_1

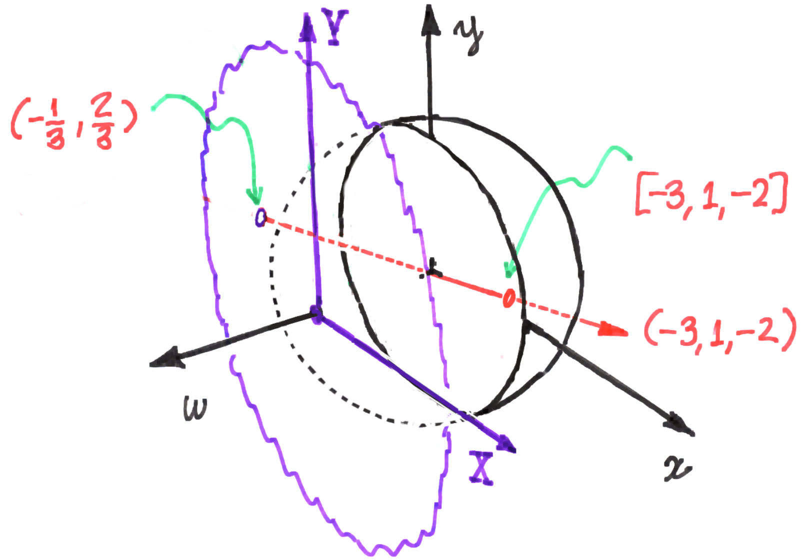
Dadas duas retas $R_1 = \langle \mathcal{W}_1, \mathcal{X}_1, \mathcal{Y}_1 \rangle$ e $R_2 = \langle \mathcal{W}_2, \mathcal{X}_2, \mathcal{Y}_2 \rangle$, o ponto R_1 *encontra* R_2 é

$$\begin{aligned} R_1 \wedge R_2 &= \left[+\begin{vmatrix} \mathcal{X}_1 & \mathcal{Y}_1 \\ \mathcal{X}_2 & \mathcal{Y}_2 \end{vmatrix}, -\begin{vmatrix} \mathcal{W}_1 & \mathcal{Y}_1 \\ \mathcal{W}_2 & \mathcal{Y}_2 \end{vmatrix}, +\begin{vmatrix} \mathcal{W}_1 & \mathcal{X}_1 \\ \mathcal{W}_2 & \mathcal{X}_2 \end{vmatrix} \right] \\ &= [\, \mathcal{X}_1\mathcal{Y}_2 - \mathcal{X}_2\mathcal{Y}_1,\ \mathcal{Y}_1\mathcal{W}_2 - \mathcal{Y}_2\mathcal{W}_1,\ \mathcal{W}_1\mathcal{X}_2 - \mathcal{W}_2\mathcal{X}_1 \,] \end{aligned}$$

Algumas propriedades de $\vee$ e $\wedge$:

$$
\begin{array}{rcl|rcl}
q \vee p & = & \neg(p \vee q) & S \wedge R & = & \neg(R \wedge S) \\
p \vee (\neg q) & = & \neg(p \vee q) & R \wedge (\neg S) & = & \neg(R \wedge S) \\
(\neg p) \vee q & = & \neg(p \vee q) & (\neg R) \wedge S & = & \neg(R \wedge S) \\
p \vee p & = & \langle 0,0,0 \rangle & R \wedge R & = & [0,0,0] \\
p \vee (\neg p) & = & \langle 0,0,0 \rangle & R \wedge (\neg R) & = & [0,0,0]
\end{array}
$$


[3,-1, 2]
(-1/3, 2/3)
(3,-1,2)
Y
y
w
X
x


(-1/3, 2/3)
Y
y
[-3, 1, -2]
(-3,1,-2)
w
X
x

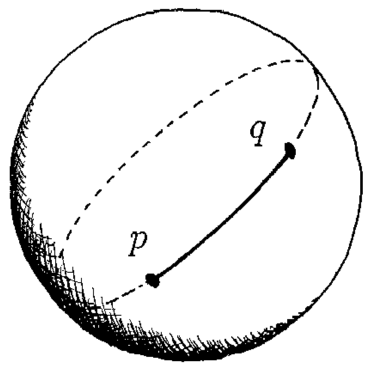
Sejam

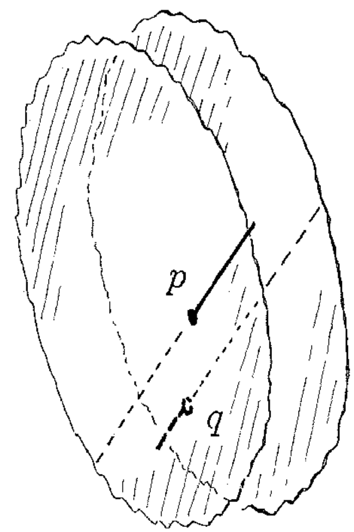
$$\begin{aligned} p_1 &= [w_1, x_1, y_1] \\ p_2 &= [w_2, x_2, y_2] \end{aligned}$$

O segmento p_1p_2 é o conjunto de pontos

$$\mathsf{S}(p_1, p_2) = \{\, [\, \alpha w_1 + \beta w_2,\ \alpha x_1 + \beta x_2,\ \alpha y_1 + \beta y_2 \,] \;\mid\; \alpha, \beta \geq 0 \;\wedge\; \alpha + \beta > 0 \,\}$$

Segmentos nos modelos esférico e chato





Os pontos p_1 e p_2 pertencem a $\mathsf{S}(p_1, p_2)$.

O segmento $\mathsf{S}(p_2, p_1)$ é idêntico ao segmento $\mathsf{S}(p_1, p_2)$.

Se $p_1 = p_2$, o segmento $\mathsf{S}(p_1, p_2)$ tem apenas um ponto, $\{p_1\}$.

Se $p_1 = \neg p_2$, o segmento $\mathsf{S}(p_1, p_2)$ não está definido.

Todos os pontos do segmento $\mathsf{S}(p_1, p_2)$ estão todos sobre a reta $p_1 \vee p_2$.

Se u e v pertencem ao segmento $\mathsf{S}(p_1, p_2)$, então $\mathsf{S}(u, v)$ está contido em $\mathsf{S}(p_1, p_2)$.