O plano projetivo orientado

O *plano projetivo orientado* $\mathbb{T}^2$ consiste de *pontos*, *retas*, e uma relação ternária entre eles:

Pontos: triplas $[w, x, y]$ exceto $[0, 0, 0]$ sendo que $[w', x', y']$ e $[w'', x'', y'']$ são o mesmo ponto se e somente se existe $\alpha > 0$ tal que $w'' = \alpha w'$, $x'' = \alpha x'$ e $y'' = \alpha y'$.	Retas: triplas $\langle \mathcal{W}, \mathcal{X}, \mathcal{Y} \rangle$ exceto $\langle 0, 0, 0 \rangle$ sendo que $\langle \mathcal{W}', \mathcal{X}', \mathcal{Y}' \rangle$ e $\langle \mathcal{W}'', \mathcal{X}'', \mathcal{Y}'' \rangle$ são a mesma reta se e somente se existe $\alpha > 0$ tal que $\mathcal{W}'' = \alpha \mathcal{W}'$, $\mathcal{X}'' = \alpha \mathcal{X}'$ e $\mathcal{Y}'' = \alpha \mathcal{Y}'$.

Posição ponto-reta:

$$[w, x, y] \diamond \langle \mathcal{W}, \mathcal{X}, \mathcal{Y} \rangle = \operatorname{sgn}(\mathcal{W}w + \mathcal{X}x + \mathcal{Y}y)$$

Toda a geometria projetiva orientada segue destas definições.

Transformação projetiva de $\mathbb{T}^2$:
função de pontos para pontos que é
uma transformação linear das coordenadas homogêneas:

$$M([w,x,y]) \;=\; [w,x,y]\begin{bmatrix} A & B & C \\ D & E & F \\ G & H & I \end{bmatrix}$$

$$=\; \big[\; Aw+Dx+Gy,\; Bw+Ex+Hy,\; Cw+Fx+Iy \;\big]$$

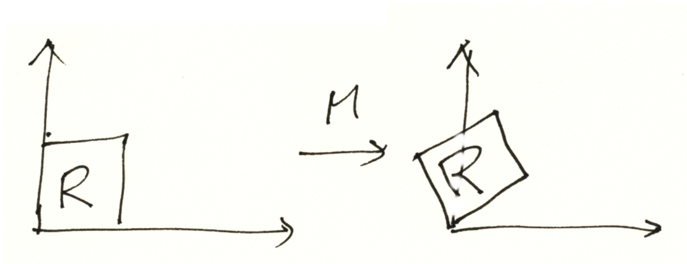
Conjugação de transformações

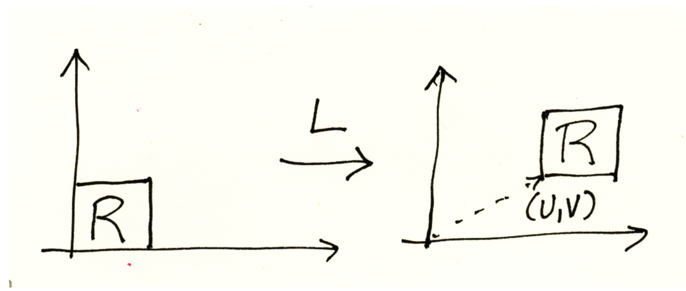
A *conjugada de* uma transformação projetiva M *por* outra transformação L é a transformação $L^{-1}ML$.

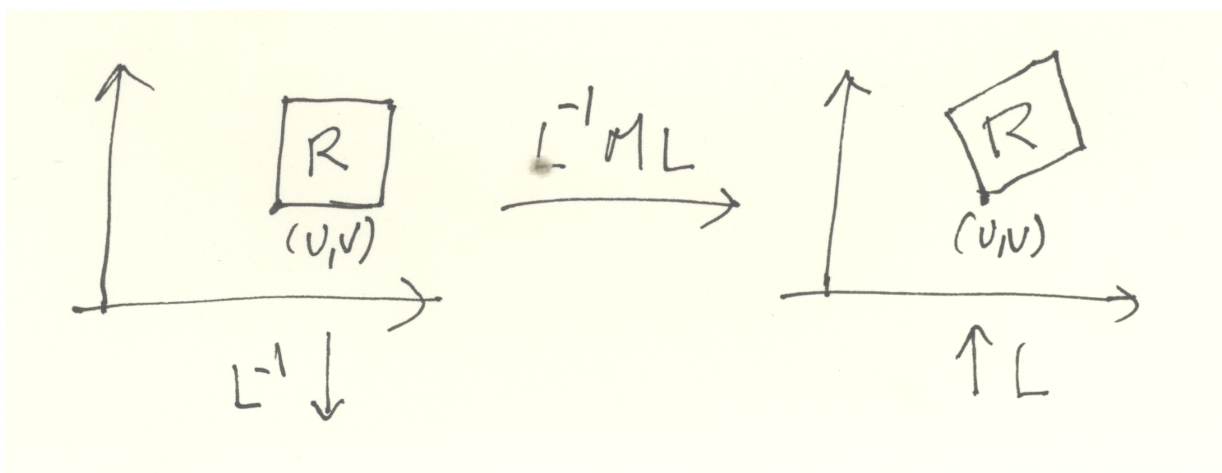
Intuitivamente, $L^{-1}ML$ tem o efeito de M, mas no plano $\mathbb{T}^2$ transformado por L.

Por exemplo, se M é a rotação de 30 graus em torno da origem, e L é a translação que leva a origem para (U, V), então $L^{-1}ML$ é uma rotação de 30 graus emtorno de (U, V).

Conjugação de transformações







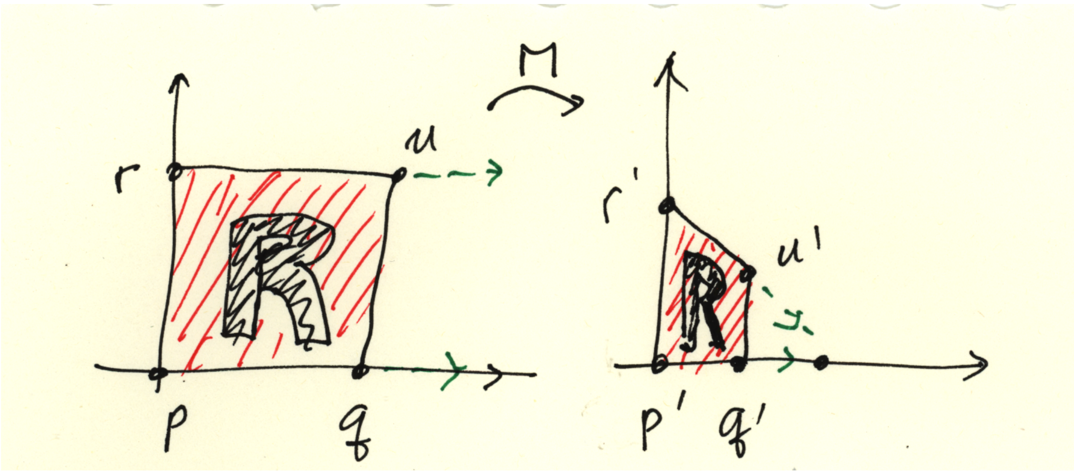
Se a primeira coluna da matriz $\widehat{M}$ não é $1, 0, 0$,
a transformação M mstura pontos finitos e infinitos, e não preserva paralelismo:

$$
\begin{aligned}
[w, x, y]M &= [w, x, y] \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\
&= \left[\; w + x,\; x,\; y \;\right]
\end{aligned}
$$

Em coordenadas cartesianas:

$$
(X, Y)M = [1, X, Y]M = [1 + X, X, Y] = \left(\frac{X}{1+X}, \frac{Y}{1+X} \right)
$$

$$
\begin{array}{lllll}
pM = (0,0)M = [\;1\;\;0\;\;0\;] & & = [\;1\;\;0\;\;0\;] & = (0,0) \\
qM = (1,0)M = [\;1\;\;1\;\;0\;] & \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} & = [\;2\;\;1\;\;0\;] & = (1/2, 0) \\
rM = (0,1)M = [\;1\;\;0\;\;1\;] & & = [\;1\;\;0\;\;1\;] & = (0,1) \\
uM = (1,1)M = [\;1\;\;1\;\;1\;] & & = [\;2\;\;1\;\;1\;] & = (1/2, 1/2)
\end{array}
$$


M
r
u
p
q
r'
u'
p'
q'

Dados 4 pontos p, q, r, u onde u está dentro do triângulo $\mathsf{S}(p, q, r)$, existe uma única transformação projetiva que leva os cantos do primeiro quadrante para p, q, r, e o ponto $[1, 1, 1, 1]$ para u.

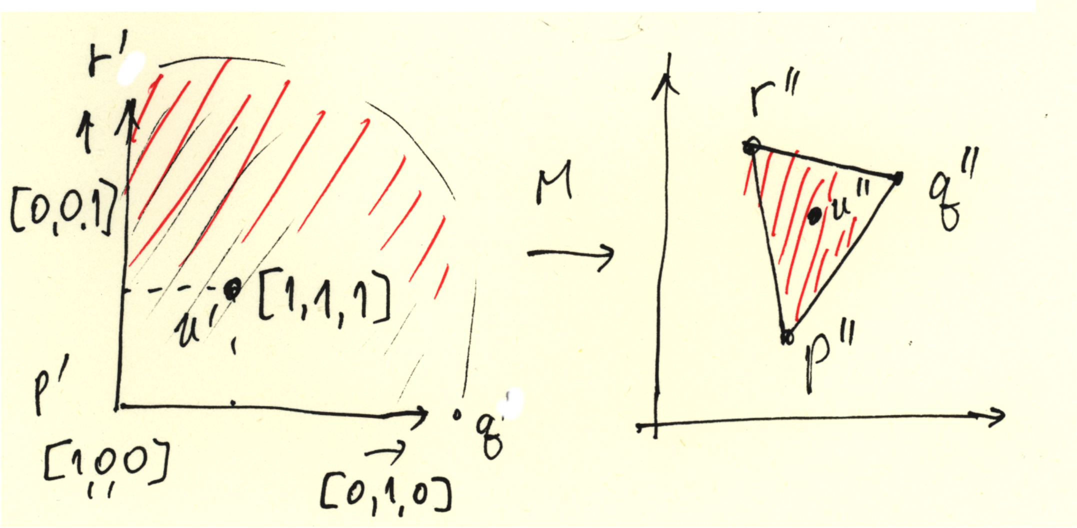
Queremos:

$$\begin{matrix} [\ 1\ \ 0\ \ 0\ ] \\ [\ 0\ \ 1\ \ 0\ ] \\ [\ 0\ \ 0\ \ 1\ ] \\ [\ 1\ \ 1\ \ 1\ ] \end{matrix} \begin{bmatrix} A & B & C \\ D & E & F \\ G & H & I \end{bmatrix} \begin{matrix} = [\ \alpha\, p.w \ \ \alpha\, p.x \ \ \alpha\, p.y\ ] \\ = [\ \beta\, q.w \ \ \beta\, q.x \ \ \beta\, q.y\ ] \\ = [\ \gamma\, r.w \ \ \gamma\, r.x \ \ \gamma\, r.y\ ] \\ = [\ u.w \ \ u.x \ \ u.y\ ] \end{matrix}$$

Logo M é

$$M = \begin{bmatrix} \alpha p.w & \alpha p.x & \alpha p.y \\ \beta q.w & \beta q.x & \beta q.y \\ \gamma r.w & \gamma r.x & \gamma r.y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ 0 & \beta & 0 \\ 0 & 0 & \gamma \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p.w & p.x & p.y \\ q.w & q.x & q.y \\ r.w & r.x & r.y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ 0 & \beta & 0 \\ 0 & 0 & \gamma \end{bmatrix} N$$

Resta determinar α, β, e γ para que a quarta equação seja satisfeita.


r'
[0,0,1]
[1,1,1]
u'
p'
[1,0,0]
q'
[0,1,0]
M
r''
q''
u''
p''

A quarta equação é

$$[1, 1, 1] \begin{bmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ 0 & \beta & 0 \\ 0 & 0 & \gamma \end{bmatrix} N = [u.w, u.x, u.y]$$

ou seja

$$[\alpha, \beta, \gamma] = [u.w, u.x, u.y] N^{-1}$$