O *plano projetivo orientado* $\mathbb{T}^2$ consiste de *pontos*, *retas*, e uma relação ternária entre eles:

Pontos	Retas
Pontos: triplas $[w, x, y]$ exceto $[0, 0, 0]$ sendo que $[w', x', y']$ e $[w'', x'', y'']$ são o mesmo ponto se e somente se existe $\alpha > 0$ tal que $w'' = \alpha w'$, $x'' = \alpha x'$ e $y'' = \alpha y'$.	Retas: triplas $\langle \mathcal{W}, \mathcal{X}, \mathcal{Y} \rangle$ exceto $\langle 0, 0, 0 \rangle$ sendo que $\langle \mathcal{W}', \mathcal{X}', \mathcal{Y}' \rangle$ e $\langle \mathcal{W}'', \mathcal{X}'', \mathcal{Y}'' \rangle$ são a mesma reta se e somente se existe $\alpha > 0$ tal que $\mathcal{W}'' = \alpha \mathcal{W}'$, $\mathcal{X}'' = \alpha \mathcal{X}'$ e $\mathcal{Y}'' = \alpha \mathcal{Y}'$.

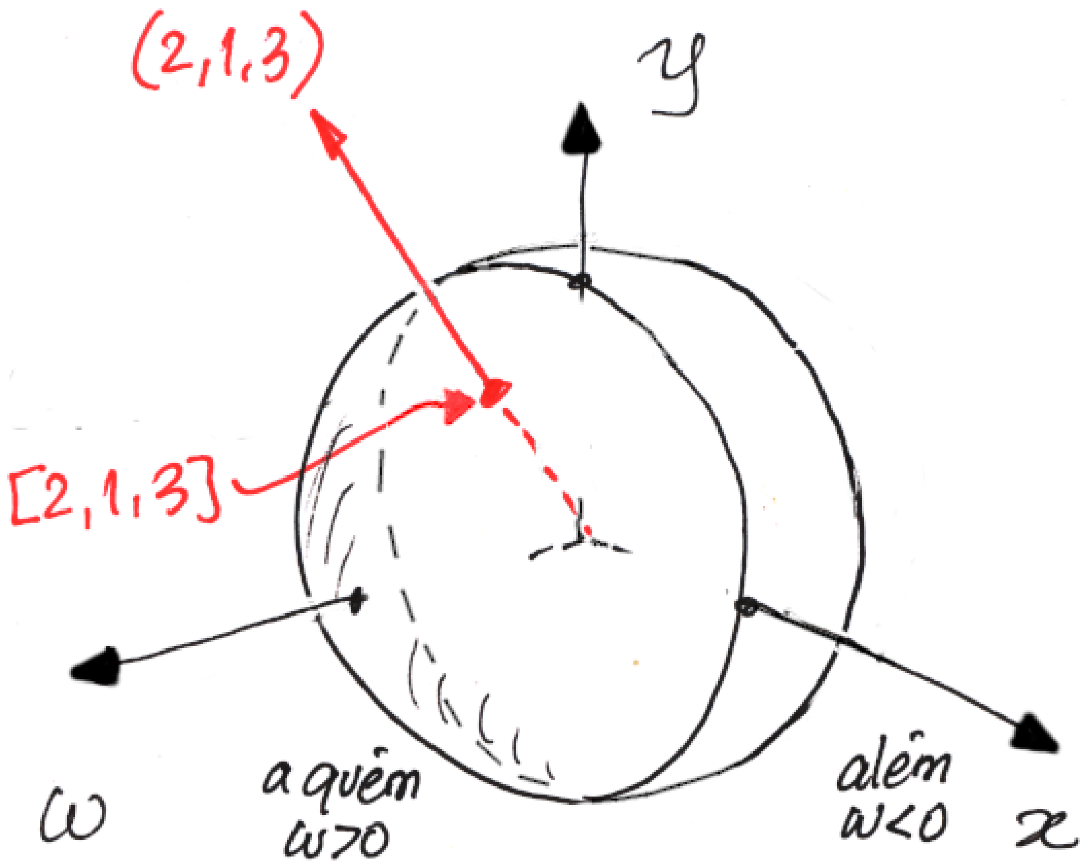
Posição ponto-reta:

$$[w, x, y] \diamond \langle \mathcal{W}, \mathcal{X}, \mathcal{Y} \rangle = \operatorname{sgn}(\mathcal{W} w + \mathcal{X} x + \mathcal{Y} y)$$

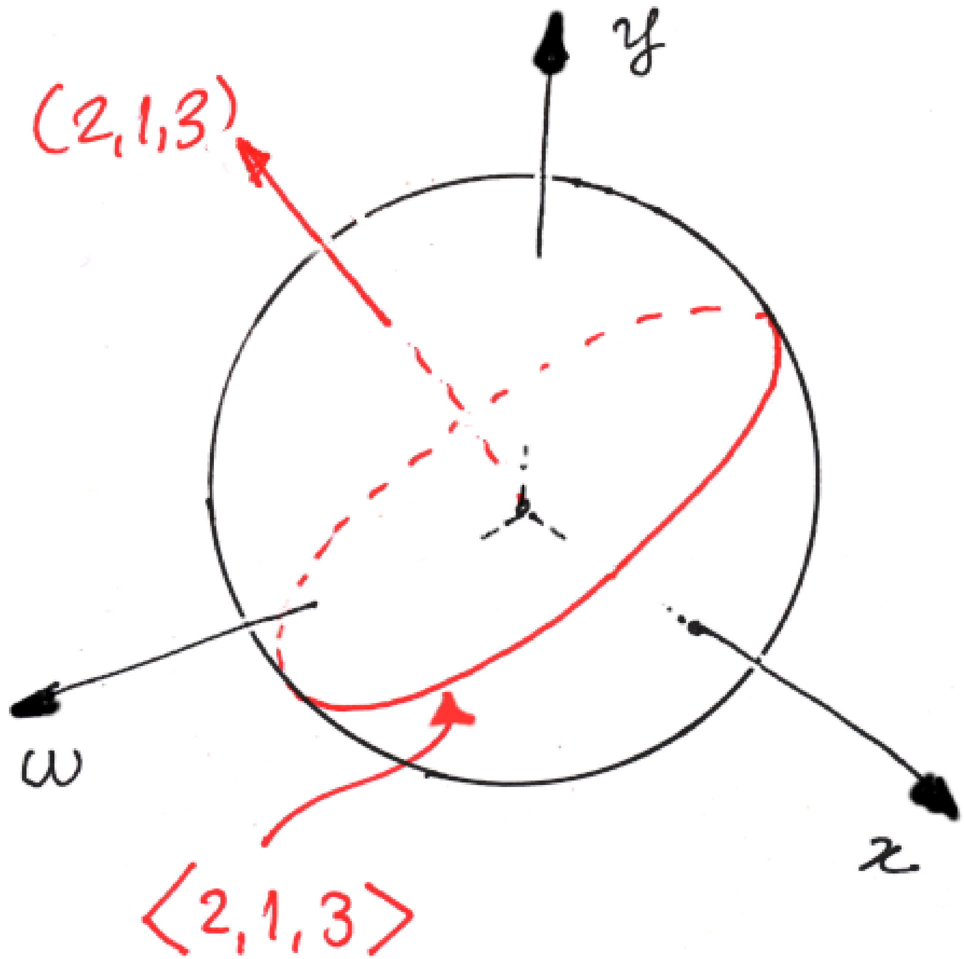
Toda a geometria projetiva orientada segue destas definições.

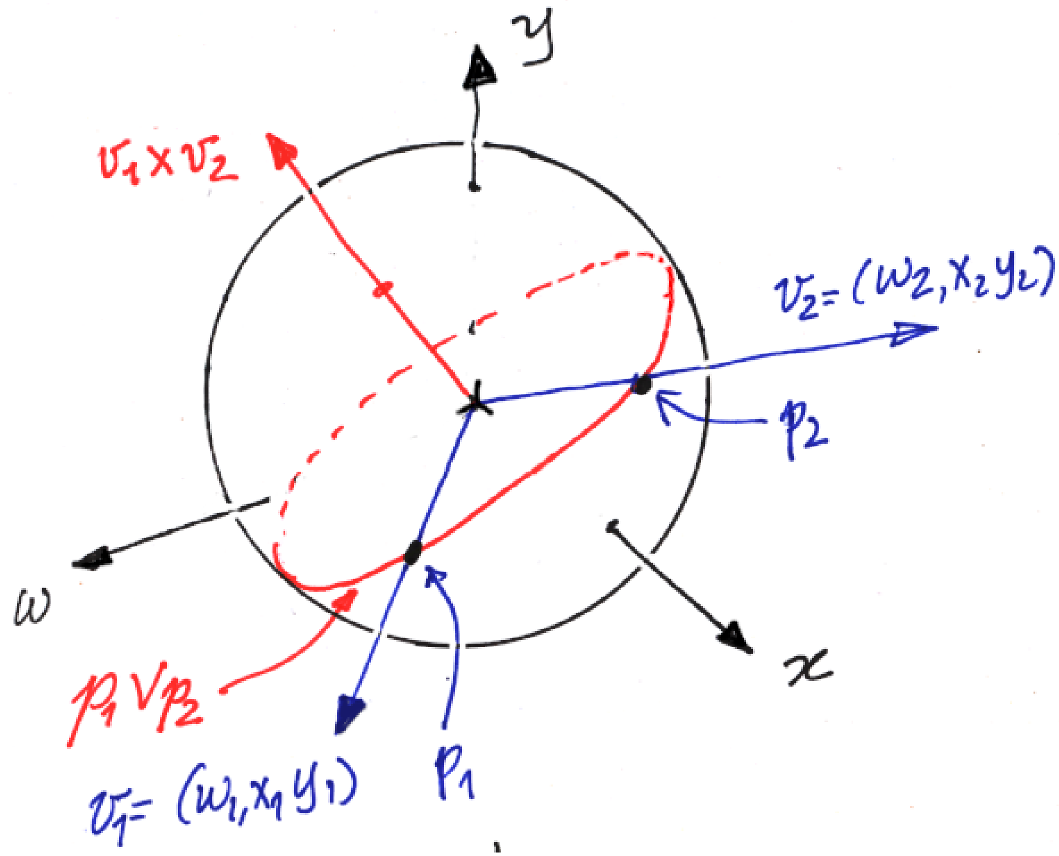
Modelo esférico - ponto

$$[w, x, y] \quad \leftrightarrow \quad \frac{(w, x, y)}{\sqrt{w^2 + x^2 + y^2}}$$



$\langle \mathcal{W}, \mathcal{X}\,\mathcal{Y} \rangle \quad \leftrightarrow \quad$ círculo perpendicular a $(\mathcal{W}, \mathcal{X}, \mathcal{Y})$

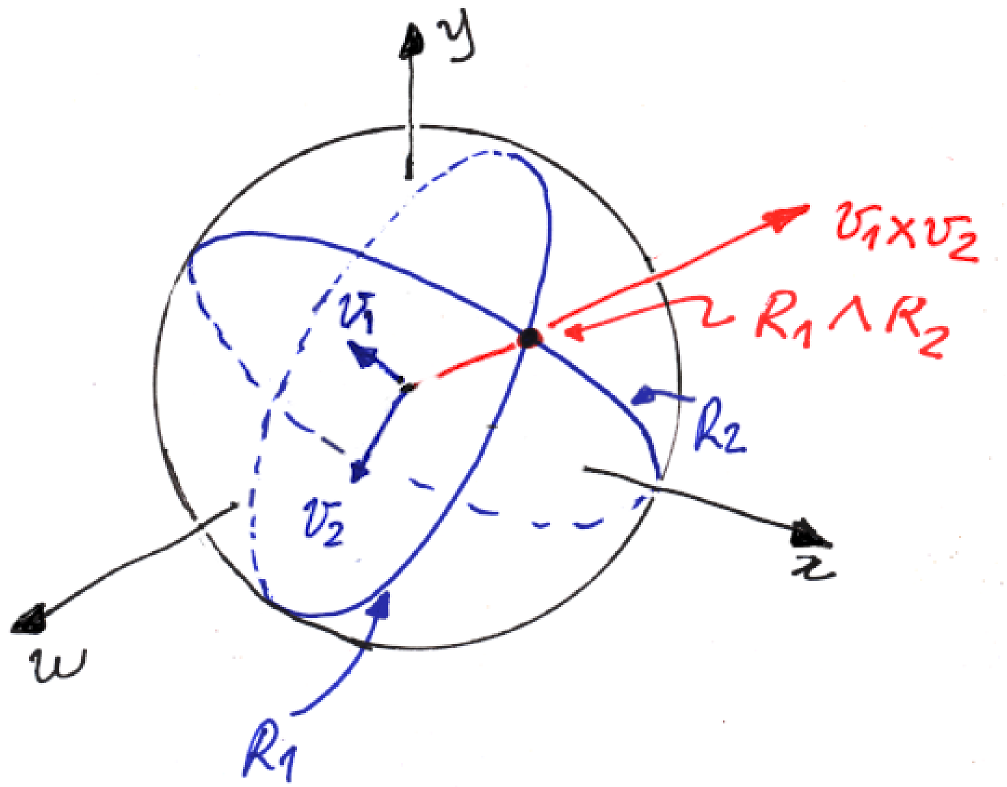



y
$v_1 \times v_2$
$v_2 = (w_2, x_2 y_2)$
p_2
w
x
$p_1 \vee p_2$
$v_1 = (w_1, x_1 y_1)$
p_1

Dados pontos $p_1 = [w_1, x_1, y_1]$ e $p_2 = [w_2, x_2, y_2]$, a reta p_1 *junta* p_2 é

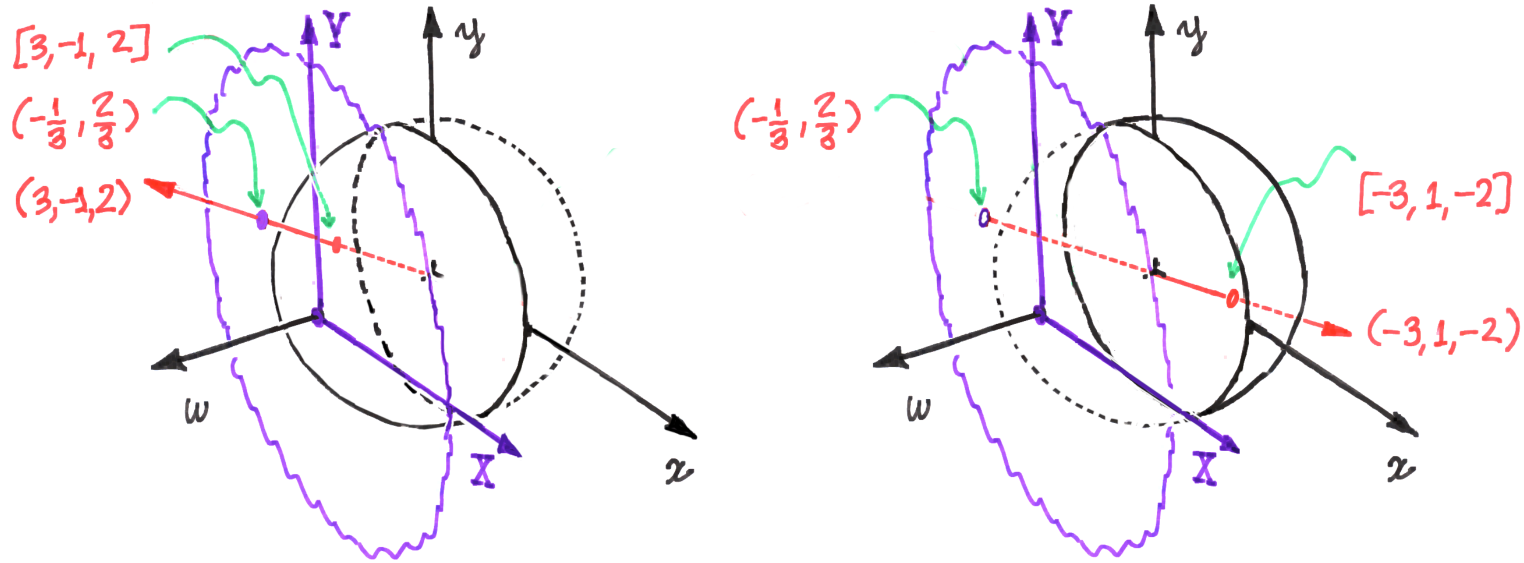
$$
\begin{aligned}
p_1 \vee p_2 \; &= \; \left\langle \; + \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix}, \; - \begin{vmatrix} w_1 & y_1 \\ w_2 & y_2 \end{vmatrix}, \; + \begin{vmatrix} w_1 & x_1 \\ w_2 & x_2 \end{vmatrix} \; \right\rangle \\
&= \; \langle \; x_1 y_2 - x_2 y_1, \; y_1 w_2 - y_2 w_1, \; w_1 x_2 - w_2 x_1 \; \rangle
\end{aligned}
$$

Modelo esférico - encontro de duas retas



Dadas duas retas $R_1 = \langle \mathcal{W}_1, \mathcal{X}_1, \mathcal{Y}_1 \rangle$ e $R_2 = \langle \mathcal{W}_2, \mathcal{X}_2, \mathcal{Y}_2 \rangle$, o ponto R_1 *encontra* R_2 é

$$\begin{aligned} R_1 \wedge R_2 &= \left[+\begin{vmatrix} \mathcal{X}_1 & \mathcal{Y}_1 \\ \mathcal{X}_2 & \mathcal{Y}_2 \end{vmatrix}, -\begin{vmatrix} \mathcal{W}_1 & \mathcal{Y}_1 \\ \mathcal{W}_2 & \mathcal{Y}_2 \end{vmatrix}, +\begin{vmatrix} \mathcal{W}_1 & \mathcal{X}_1 \\ \mathcal{W}_2 & \mathcal{X}_2 \end{vmatrix} \right] \\ &= [\, \mathcal{X}_1\mathcal{Y}_2 - \mathcal{X}_2\mathcal{Y}_1,\ \mathcal{Y}_1\mathcal{W}_2 - \mathcal{Y}_2\mathcal{W}_1,\ \mathcal{W}_1\mathcal{X}_2 - \mathcal{W}_2\mathcal{X}_1 \,] \end{aligned}$$



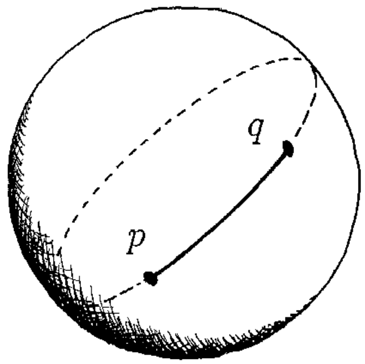
[3,−1, 2]
$(-\frac{1}{3},\frac{2}{3})$
(3,−1,2)
Y
y
w
X
x
$(-\frac{1}{3},\frac{2}{3})$
[−3, 1, −2]
(−3, 1, −2)
Y
y
w
X
x

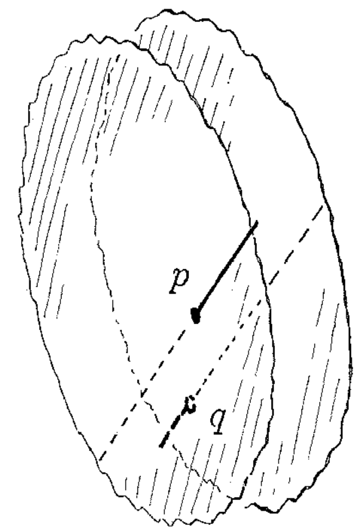
Sejam

$$\begin{aligned} p_1 &= [w_1, x_1, y_1] \\ p_2 &= [w_2, x_2, y_2] \end{aligned}$$

O segmento p_1p_2 é o conjunto de pontos

$$\mathsf{S}(p_1, p_2) = \{\, [\, \alpha w_1 + \beta w_2,\ \alpha x_1 + \beta x_2,\ \alpha y_1 + \beta y_2 \,] \ \mid\ \alpha, \beta \geq 0 \ \wedge\ \alpha + \beta > 0 \,\}$$


q
p


p
q

Os pontos p_1 e p_2 pertencem a $\mathsf{S}(p_1, p_2)$.

O segmento $\mathsf{S}(p_2, p_1)$ é idêntico ao segmento $\mathsf{S}(p_1, p_2)$.

Se $p_1 = p_2$, o segmento $\mathsf{S}(p_1, p_2)$ tem apenas um ponto, $\{p_1\}$.

Se $p_1 = \neg p_2$, o segmento $\mathsf{S}(p_1, p_2)$ não está definido.

Todos os pontos do segmento $\mathsf{S}(p_1, p_2)$ estão todos sobre a reta $p_1 \vee p_2$.

Se u e v pertencem ao segmento $\mathsf{S}(p_1, p_2)$, então $\mathsf{S}(u, v)$ está contido em $\mathsf{S}(p_1, p_2)$.