Reta em coordenadas cartesianas: o ponto (X, Y) está na reta se e somente se

$$AX + BY + C = 0$$

onde A, B, C são números reais, os *coeficientes* da reta.

Em coordenadas homogêneas: o ponto $[w, x, y]$ com $w > 0$ está nessa reta se e somente se

$$A\frac{x}{w} + B\frac{y}{w} + C = 0$$

ou seja

$$Ax + By + Cw = 0$$

Quando se trabalha com coordenadas homogêneas, a equação

$$Ax + By + Cw = 0$$

fica mais natural se escrita

$$\mathcal{W}w + \mathcal{X}x + \mathcal{Y}y = 0$$

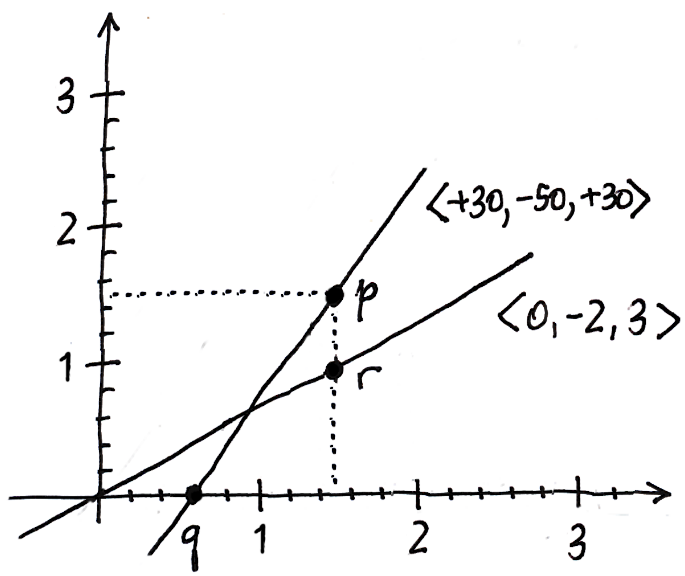
onde $\mathcal{W} = C$, $\mathcal{X} = A$, $\mathcal{Y} = B$. Estes números, *nesta orderm*, são os *coeficientes homogêneos* da reta.

Indicamos essa reta por $\langle \mathcal{W}, \mathcal{X}, \mathcal{Y} \rangle$.

Por exemplo, os pontos $p = [2, 3, 3]$ e $q = [5, 3, 0]$ estão na reta $\langle +30, -50, +30 \rangle$, pois

$$\begin{aligned}(+30) \cdot 2 + (-50) \cdot 3 + (+30) \cdot 3 &= 0 \\ (+30) \cdot 5 + (-50) \cdot 3 + (+30) \cdot 0 &= 0\end{aligned}$$

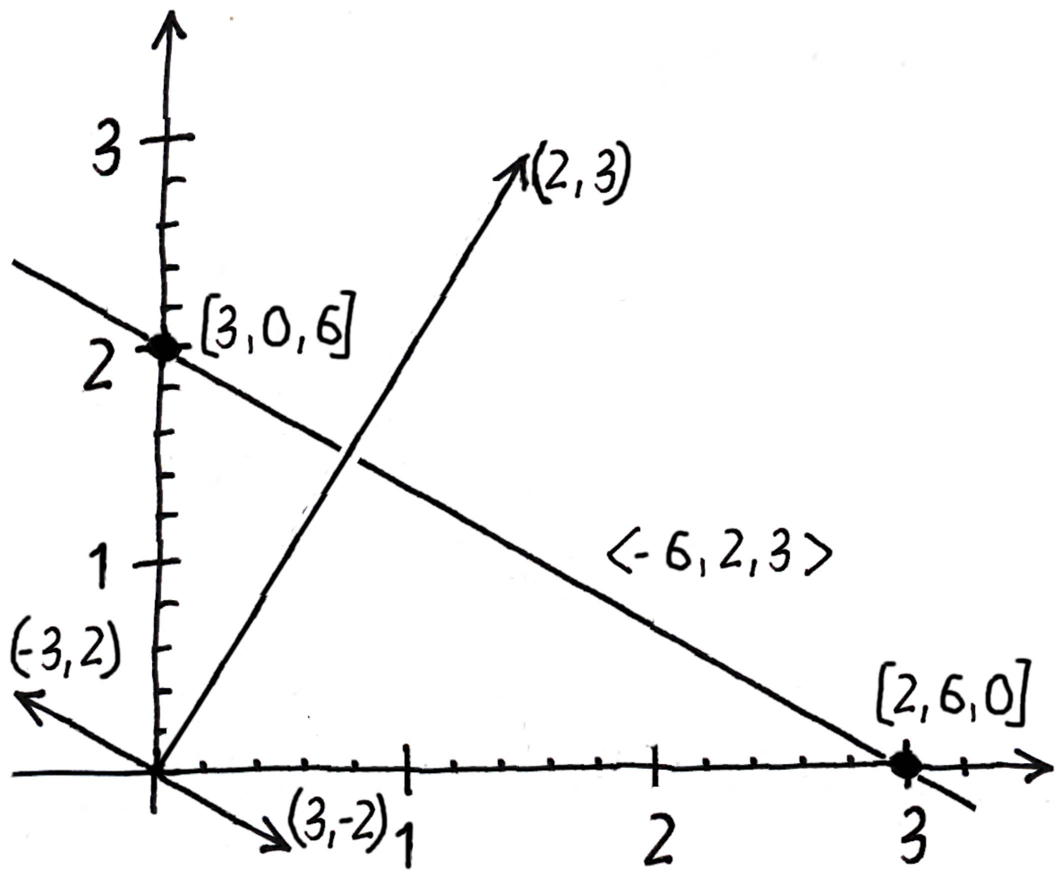
Por outro lado, o ponto $r = [2, 3, 2]$ não está nessa reta, mas está na reta $\langle 0, -2, 3 \rangle$.



Interpretação dos coeficientes

Em geral, os coeficientes $\langle \mathcal{W}, \mathcal{X}, \mathcal{Y} \rangle$ tem as seguintes interpretações:

- $(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$ é um vetor **perpendicular** à reta.
- $(-\mathcal{Y}, \mathcal{X})$ e $(\mathcal{Y}, -\mathcal{X})$ são vetores **paralelos** à reta.
- $\mathcal{W}$ é zero se e somente se a reta passa pela origem.
- $\mathcal{X}$ é zero se e somente se a reta é horizontal (não depende de X).
- $\mathcal{Y}$ é zero se e somente se a reta é vertical (não depende de Y).
- A distância da reta à origem é $|\mathcal{W}| / \sqrt{\mathcal{X}^2 + \mathcal{Y}^2}$.
- Os pontos $[\mathcal{X}, -\mathcal{W}, 0]$ e $[\mathcal{Y}, 0, -\mathcal{W}]$, se válidos, estão sobre a reta.


3
2
1
1
2
3
(2, 3)
[3, 0, 6]
<-6, 2, 3>
(-3, 2)
[2, 6, 0]
(3, -2)

Pontos no infinito de reta

Por defininição, o ponto $[w, x, y]$ está na reta $\langle \mathcal{W}, \mathcal{X}, \mathcal{Y} \rangle$ se e somente se

$$\mathcal{W}w + \mathcal{X}x + \mathcal{Y}y = 0$$

mesmo quando o ponto está no infinito $(w = 0)$.

Uma reta $\langle \mathcal{W}, \mathcal{X}, \mathcal{Y} \rangle$ normalmente tem dois pontos no infinito:
$[0, -\mathcal{Y}, \mathcal{X}]$ e $[0, \mathcal{Y}, -\mathcal{X}]$ (nas duas direções paralelas à reta).

Definição formal de reta

Formalmente, uma reta em coordenadas homogêneas é uma tripla $\langle \mathcal{W}, \mathcal{X}, \mathcal{Y} \rangle$, onde $\mathcal{W}, \mathcal{X}, \mathcal{Y}$ não são todos zero.

Duas triplas $\langle \mathcal{W}', \mathcal{X}', \mathcal{Y}' \rangle$ e $\langle \mathcal{W}'', \mathcal{X}'', \mathcal{Y}'' \rangle$ são a mesma reta se e somente se existe um real $\alpha > 0$ tal que

$$\mathcal{W}' = \alpha \mathcal{W}'' \qquad \mathcal{X}' = \alpha \mathcal{X}'' \qquad \mathcal{Y}' = \alpha \mathcal{Y}''$$