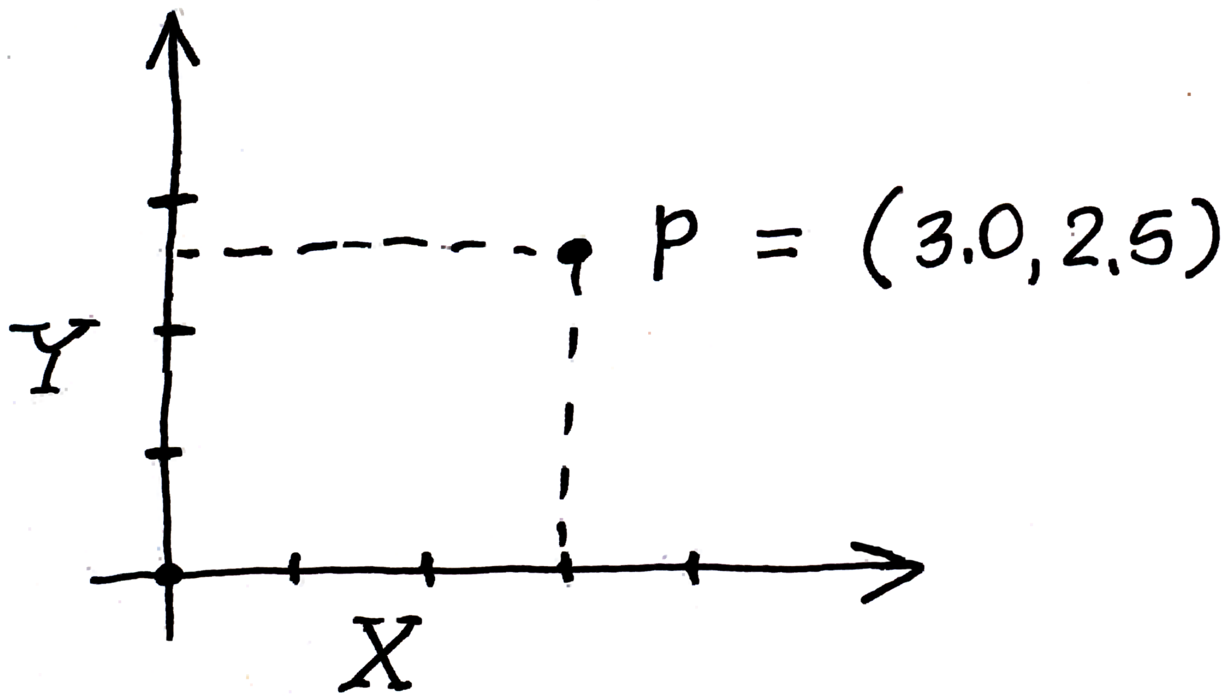
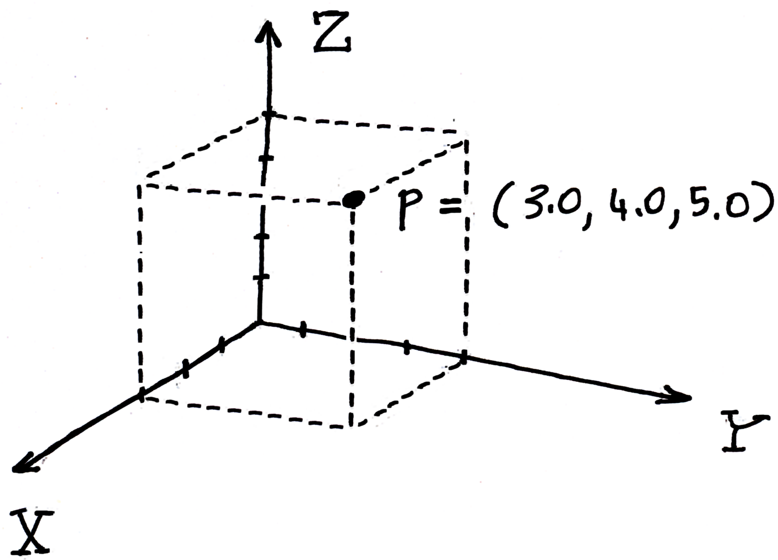
Coordenadas cartesianas no plano

A maneira mais óbvia de fazer geometria no computador é usar geometria analítica, onde pontos são representados por suas coordenadas cartesianas.

Um ponto no plano pode ser representado por um par (X, Y) de números "reais" (ponto flutuante):



Um ponto no epaço pode ser representado por uma tripla (X, Y, Z) de coordenadas:



Um segmento de reta pode ser representado pelas coordenadas de seus dois extremos.

Determinando o ponto médio p_{m} de um segmento com extremos p_1, p_2:

$$\begin{aligned} p_1 &= (X_1, Y_1) \\ p_2 &= (X_2, Y_2) \\ p_{\mathrm{m}} &= \left(\frac{X_1 + X_2}{2}, \frac{Y_1 + Y_2}{2} \right) \end{aligned}$$

Coordenadas homogêneas no plano

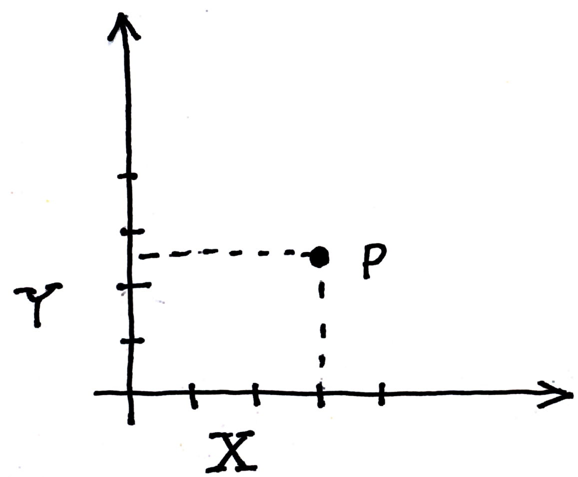
Programas (e hardware) para computação gráfica geralmente usam outra representação, *coordenadas homogêneas*.

As coordenadas homogêneas de um ponto no plano são quaisquer três números reais $[w, x, y]$, tais que as coordenadas cartesianas são $X = x/w$ e $Y = y/w$.

Ou seja, se as coordenadas cartesianas são (X, Y), as coordenadas homogêneas são $[w, wX, wY]$ para qualquer $w > 0$.

Convenção:
Cartesianas: $(,)$ e maiúsculas $X, Y, \ldots$
Homogêneas: $[,,]$ e minúsculas $w, x, y, \ldots$

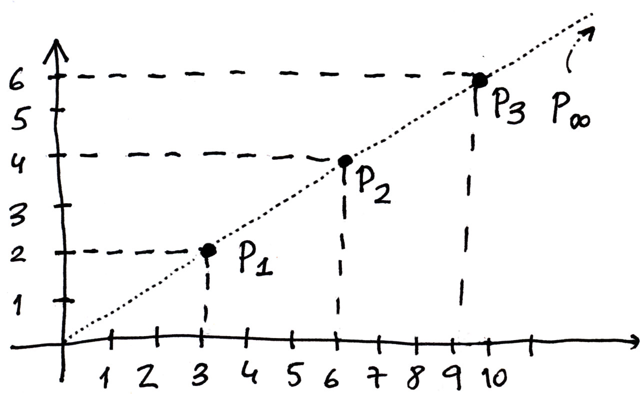
Coordenadas homogêneas no plano



$$
\begin{aligned}
p &= (3.0, 2.5) \\
&= [1.0, 3.0, 2.5] \\
&= [2, 6, 5] \\
&= [100, 300, 250] \\
&= [0.010, 0.030, 0.025] \\
&= [12, 36, 30] \\
&= \ldots
\end{aligned}
$$

Pontos no infinito

Interpretação de $[0, 3, 2]$: limite de $[w, 3, 2]$ quando w tende a zero.



$$
\begin{aligned}
p_1 = [1, 3, 2] &= (3, 2) \\
p_2 = [1/2, 3, 2] &= (6, 4) = 2(3, 2) \\
p_3 = [1/3, 3, 2] &= (9, 6) = 3(3, 2) \\
\ldots \\
p_\infty = [0, 3, 2] &= \infty(3, 2)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
p' &= [w', x', y'] \\
p'' &= [w'', x'', y'']
\end{aligned}
$$

p' e p'' são o mesmo ponto
se e somente se
existe um real $\alpha > 0$ tal que

$$w' = \alpha w'' \qquad x' = \alpha x'' \qquad y' = \alpha y''$$

$$
\begin{aligned}
[2, 3, 5] &\equiv [20, 30, 50] \\
[6, 3, 9] &\not\equiv [6, 30, 90] \\
[0, 3, -5] &\not\equiv [0, -3, 5]
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
p_1 = [1,5,2] &= (5,2) \\
p_2 = [2,7,8] &= (7/2, 8/2) = (3.5, 4.0) \\
p_3 = [0,1,2] &= \infty(1,2) \\
p_4 = [0,-1,-2] &= \infty(-1,-2)
\end{aligned}
$$