MC409/MO603 – Computação Gráfica

© Jorge Stolfi

Segundo Semestre de 1994

Notas de Aula – Fascículo 10

Sistemas de Modelagem geométrica

10.1 O problema

Nos fascículos anteriores supusemos que a cena a ser desenhada é apenas uma coleção de polígonos planos. (Na verdade, todos os algoritmos de visibilidade que estudamos até agora dependem desta suposição.) Por outro lado, na prática a cena geralmente é uma coleção de objetos tridimensionais, e é inicialmente descrita como tal: um tijolo é descrito como um paralelelpípedo, e não como seis retângulos.

Além do mais, os objetos de uma cena real geralmente incluem superfícies curvas. Estas quase sempre podems ser aproximadas satisfatóriamente por coleções de polígonos planos; porém, o número de polígonos necessário pode ser muito grande, e depende da posição do observador e da resolução da imagem.

Portanto, para ser usável, um sistema de visualização de cenas tridimensionais precisa vir acompanhado de um sistema de *modelagem geométrica*, que permita descrever e manipular as cenas num nível mais alto do que "lista de polígonos".

Em geral, todo sistema de modelagem geométrica baseia-se nalguma noção de "objeto geométrico" [1] que agrupa múltiplos polígonos e superfícies curvas numa única entidade. Na verdade, a maioria dos sistemas suporta estruturas hierárquicas de objetos, isto é, permitem agrupar vários objetos num único super-objeto, recursivamente.

[1] Por favor, não confundam estes objetos com os da "programação orientada a objetos"!

10.1.1 Sólidos ou superfícies?

Dependendo da natureza dos "objetos geométricos", esses sistemas de podem ser divididos em duas grandes "escolas", *modelagem de superfícies* e *modelagem de sólidos*.

Nos sistemas de modelagem de superfícies, um objeto geométrico é definido como uma coleção de *faces* bidimensionais, que são polígonos planos, ou retalhos de superfícies curvas definidas algébricamente, colados entre si ao longo de suas arestas de modo a formar uma superfície contínua. Nestes sistemas, um objeto sólido é representado indiretamente pela sua *fronteira*, a superfície que separa seu interior do meio ambiente.

Nos sitemas de modelagem de sólidos, um objeto geométrico representa uma região do espaço $\mathbb{R}^3$. A região é definida por meio de desigualdades algébricas, ou por operações booleanas e geométricas aplicadas a outras regiões mais simples. A fronteira do objeto é definida implicitamente, como sendo os pontos do espaço vizinhos tanto a pontos dessa região quanto a pontos de seu complemento.

Estas duas escolas são às vezes consideradas concorrentes, mas na verdade elas estão níveis de abstração diferentes. A modelagem de sólidos é em geral a mais próxima do usuário, enquanto que a modelagem de superfícies é mais próxima da "lista de polígonos" com que trabalham os algoritmos de visibilidade e rasterização. Tanto assim que, com o progresso da tecnologia de hardware e algoritmos, a primeira está ficando cada vez mais popular frente à segunda.

Entretanto, a modelagem de superfícies ainda é a mais natural em certas aplicações em que os "sólidos" são tão finos que podem ser considerados bidimensionais. Alguns exemplos notáveis são o projeto de lataria de carros (que, aliás, foi a primeira grande aplicação da modelagem geométrica por computador), cascos de navios, roupas, etc. A modelagem de superfícies tembém é a mais natural para descrever a topografia de terrenos, estratos geológicos, esculturas e moldagens artísticas, e outros objetos com superfícies igualmente complexas e irregulares. Por outro lado, sistemas de modelagem de sólidos são geralmente mais adequados para o projeto de objetos maçicos, como peças mecânicas, gabinetes de eletrodomésticos, prédios e estruturas de concreto, etc.

Há outros sistemas de modelagem que não se encaixam em nenhuma destas duas classes, como por exemplo os modelos volumétricos (onde a cena é uma matriz tridimensional de células ou "voxels" cúbicos, cada qual com uma "densidade" própria), modelos procedurais (onde cada objeto é descrito implicitmante por uma procedimentos que o desenham), modelos de partículas, modelos fractais, etc. Entretanto, estas alternativas sào (ainda?) pouco usadas em aplicações práticas.

10.1.2 Explícitos ou implícitos?

Poderíamos também classificar os sistemas de modelagem em *explícitos* ou *implícitos*. Nos primeiros, é possivel extrair da representação da cena, com relativamente pouco esforço, uma decomposição da mesma num certo número de objetos simples (polígonos, retalhos de superfícies polinomiais, tetraedros, etc.) que são *disjuntos dois a dois*. Nos segundos, a cena é representada de maneira indireta: por exemplo, um sólido pode ser descrito por uma fórmula complexa envolvendo uniões e intersecções de sólidos simples; uma superfície pode ser descrita por um sistema de equações e inequações algébricas em x, y, z, envolvendo condicionais. Assim, pode ser muito custoso, ou mesmo impossível, transformar uma descrição implícita numa explícita.

Em princípio, os dois eixos — sólidos *versus* superfícies, explícito *versus* implícito — são independentes, e pode-se imaginar sistemas de modelagem que se encaixam nas quatro combinações. Entretanto, por alguma razão, a grande maioria dos sistemas de modelagem de superfícies são explícitos, e a grande maioria dos sistemas de modelagem de sólidos são implícitos.

10.2 Modelagem de sólidos

No restante deste fascículo estudaremos as ferramentas principais da modelagem de sólidos, e deixaremos a modelagem de superfícies para os fascículos seguintes.

10.2.1 Geometria construtiva de sólidos

Uma técnica comum de modelagem é a chamada *geometria construtiva de sólidos* (ou *CSG*, das iniciais em inglês), em que a cena é descrita por meio de uma fórmula, que consiste de operações booleanas (união, intersecção, complemento, diferença, etc.) aplicadas a certos sólidos "primitivos" (esferas, cilindros, semi-espaços, etc.) Tal fórmula pode ser representada dentro do computador por uma estrutura de árvore binária, onde as folhas são os sólidos primitivos, e os nós internos são as operações booleanas. Veja a figura 10.1. O repertório de sólidos

Figura 10.1: Uma cena simples e sua descrição CSG

primitivos e sua codificação nas folhas da árvore CSG variam de sistema para sistema. To ponto de vista do implementador, é desejável minimizar o número de tipos de sólidos primitivos distintos.

Segundo este princípio, não se deve implementar como primitivo um sólido que pode ser descrito pela intersecção ou união de outros sólidos mais simples. Isso exclui, por exemplo, cubos ou paralelepípedos, que podem ser obtidos pela interesecção de seis semi-espaços. O mesmo se aplica a quaisquer outros poliedros (redutíveis a intersecções e uniões de semi-espaços); a cilindros finitos, tubos, discos, e anéis cilíndricos (redutíveis a cilindros infinitos e semi-espaços); calotas e gomos de esfera; etc. etc.

Naturalmente, estamos falando apenas da representação interna. Externamente, todo bom sistema de modelagem deve permitir ao usuário especificar os sólidos mais comuns (cubos, prismas, cilindros finitos, etc.) diretamente, da maneira mais natural possível. Por exemplo, um sistema para projeto de peças mecânicas pode permitir que um cilindro finito seja especificado por dois pontos (os centros das duas bases) e um número real (o raio, ou o diâmetro). Num sistema para projeto arquitetônico, uma parede poderia ser descrita por dois pontos extremos (x_1, y_1) e (x_2, y_2) na planta, mais dois números reais (altura e espessura). Cabe ao sistema de modelagem traduzir automáticamente estes pseudo-primitivos externos nas árvores CSG equivalentes.

10.2.2 Sólidos algébricos

Se considerarmos os sistemas de modelagem de sólidos em uso corrente, veremos que quase todas as formas geométricas que eles suportam podem ser fácilmente reduzidas a combinações booleanas de um único tipo de objeto primitivo, que podemos chamar de *sólido algébrico*.

Um sólido algébrico é caracterizado por um polinômio f de quatro variáveis, nào identicamente nulo. Por convenção, um ponto com coordenadas homogêneas $[w, x, y, z]$ está dentro, fora, ou na fronteira do objeto se $f(w, x, y, z)$ for negativo, positivo, ou nulo, respectivamente.

É facil verificar que esta definição é consistente com a equivalência $[w, x, y, z] = [\alpha w, \alpha x, \alpha y, \alpha z]$ (para $\alpha > 0$) se e somente se f for um polinômio homogêneo; isto é, todos seus monômios devem ter o mesmo grau total. Assim, por exemplo, $3w - 2x + y$ e $w^5 - 6w^2x^3 + 4xyz^2$ são homogêneos, enquanto que $w^3 - w^2$ e $x^2 + y^2z^2$ não são.

Se f é um polinômio homogêneo de grau total n, então $f(\alpha w, \alpha x, \alpha y, \alpha z) = \alpha^n f(w, x, yz)$. Podemos concluir que um ponto p pertence à fronteira do sólido definido por f se e somente se o antípoda $\neg p$ também pertence à fronteira. Mais ainda, se p está no interior do sólido definido por f, então seu antípoda $\neg p$ está no exterior se n é ímpar, e no interior se n é par.

Quando f é um polinômio de grau 1, isto é, $f(w, x, y, z) = \mathcal{W}w + \mathcal{X}x + \mathcal{Y}y + \mathcal{Z}z$, o sólido correpondente é obviamente um semi-espaço, delimitado pelo plano $\pi_f = \langle \mathcal{W}, \mathcal{X}, \mathcal{Y}, \mathcal{Z} \rangle$. Segundo a convenção acima, o interior do sólido é o lado negativo de π_f, e o exterior é o lado positivo. Como sabemos, se π_f é um plano finito, seu lado positivo consiste de um semi-espaço do aquém, mais o semi-espaço complementar do além, mais um hemisfério da “esfera celeste” (o plano no infinito Ω_2).

Observe que nào existem sólidos algébricos de grau zero. (O polinômio nulo talvez pudesse ser considerado um polinômio de grau zero; mas, por definição não pode ser usado para descrever um sólido algébrico.)

10.2.3 Conversão de e para coordenadas cartesianas

Seja A um sólido algébrico descrito pelo polinômio homogêneo $f(w, x, y, z)$, de grau total n. Em coordenadas cartesianas, o mesmo sólido (ou melhor, o pedaço dele que está contida no aquém de $\mathbb{T}_3$) é descrito pelo polinômio três variáveis F tal que $F(X, Y, Z) = f(1, X, Y, Z)$. (Note que F em geral não é homogêneo, e tem grau menor ou igual a n.)

Isto é, um ponto do aquém com coordenadas cartesianas (X, Y, Z) está no exterior, no interior, ou na superfície do sólido A se $F(X, Y, Z)$ for negativo, positivo, ou nulo, respectivamente. Para os pontos do além, o mesmo vale com o polinômio $(-1)^n F(X, Y, Z) = f(-1, -x, -y, -z)$.

Reciprocamente, seja A um sólido do $\mathbb{R}^3$ definido por um polinômio de três variáveis $F(X, Y, Z)$, com grau menor ou igual a n. Para descrever o mesmo sólido em têrmos de coordenadas homogêneas, basta tomar o polinômio $f(w, x, y, z) = w^n F(x/w, y/w, z/w)$. Note entretanto que esta conversão produz na verdade duas cópias do sólido original, uma no aquém e uma no além (esta última complementada ou não, conforme n é ímpar ou par); sem falar dos pontos no infinito.

10.2.4 Sólidos quadráticos

Quando f é um polinômio homogêneo de grau 2, o sólido correspondente é dito um *sólido quadrático*. Sua superfície é uma das chamadas *superfícies quádricas*, que incluem cilindros, cones e parabolóides (com secção circular ou elíptica), esferas e elipsóides, e outras superfícies menos comuns (hiperbolóides e parabolóides hiperbólicos).

Por exemplo, o sólido definido pelo polinômio $x^2 + y^2 + z^2 - w^2$ é a bola de raio 1 centrada na origem: em coordenadas cartesianas, seu interior é o conjunto $\{ (X, Y, Z) \ : \ X^2 + Y^2 + Z^2 < 1 \}$. Mais exatamente, o sólido consiste de duas cópias desta bola, uma no aquém e uma no além.

O polinômio genérico de grau 2 em quatro variáveis tem a forma

$$f(w,x,y,z) = \mathcal{A}w^2+\mathcal{B}wx+\mathcal{C}wy+\mathcal{D}wz+\mathcal{E}x^2+\mathcal{F}xy+\mathcal{G}xz+\mathcal{H}y^2+\mathcal{I}yz+\mathcal{J}z^2 \tag{10.1}$$

onde $\mathcal{A}, \mathcal{B}, \ldots, \mathcal{J}$ são 10 números reais arbitrários, não todos iguais a zero.

Incidentalmente, note que o sólido definido por este polinômio não se altera se multiplicarmos todos os seus coeficientes pelo mesmo número real positivo. Se fossemos matemáticos, concluiríamos daí que o conjunto dos sólidos quadráticos é topologicamente equivalente a $\mathcal{S}_9$ (a esfera de nove dimensões) e a $\mathbb{T}_9$ (o espaço projetivo orientado de nove dimensões). Ainda bem que não somos.

No que segue, se f é um polinômio homogêneo em quatro variáveis, e $p = [w,x,y,z]$ é um ponto de $\mathbb{T}_3$, denotaremos por $f(p)$ ou por pf o sinal de $f(w,x,y,z)$, que pode ser -1, 0, ou $+1$.

O polinômio (10.1) também pode ser escrito na forma de um produto de matrizes,

$$\begin{aligned}
f(w,x,y,z) &= (w,x,y,z)\,\mathsf{F}\,(w,x,y,z)^{\top} \\
&= (w,x,y,z) \begin{pmatrix} \mathsf{f}_{00} & \mathsf{f}_{01} & \mathsf{f}_{02} & \mathsf{f}_{02} \\ \mathsf{f}_{10} & \mathsf{f}_{11} & \mathsf{f}_{12} & \mathsf{f}_{12} \\ \mathsf{f}_{20} & \mathsf{f}_{21} & \mathsf{f}_{22} & \mathsf{f}_{22} \\ \mathsf{f}_{30} & \mathsf{f}_{31} & \mathsf{f}_{32} & \mathsf{f}_{32} \end{pmatrix} \begin{matrix} w \\ x \\ y \\ z \end{matrix}
\end{aligned}$$

onde $\mathsf{f}_{00} = \mathcal{A}$, $\mathsf{f}_{01} + \mathsf{f}_{10} = \mathcal{B}$, etc.

A forma (10.2–10.2) é mais uniforme e elegante do que (10.1), porém mais redundante: ela usa 16 coeficientes reais, em vez de 10. Caso espaço seja importante, podemos armazenar apenas a metade superior da matriz F (incluindo a diagonal); e supor que a metade inferior é nula, ou então que a matriz é simétrica. A primeira opção equivale a guardar os 10 coeficientes da fórmula (10.1); a segunda equivale a guardar os coeficientes $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}/2$, $\mathcal{C}/2$, $\mathcal{D}/2$, $\mathcal{E}$, $\mathcal{F}/2$, $\ldots$, $\mathcal{I}/2$, $\mathcal{J}$.

Por exemplo, considere a bola de raio 1 com centro no ponto $(2,3,4)$. O polinômio homogêneo correspondente é

$$\begin{aligned}
f(w,x,y,z) &= (x-2w)^2 + (y-3w)^2 + (z-4w)^2 - w^2 \\
&= 28w^2 - 4wx - 6wy - 8wz + x^2 + y^2 + z^2
\end{aligned}$$

que pode ser escrito em forma matricial como

$$f(w,x,y,z) = (w,x,y,z)\begin{pmatrix} 28 & -4 & -6 & -8 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} w \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix} \tag{10.2}$$

ou, também, como

$$f(w,x,y,z) = (w,x,y,z)\begin{pmatrix} 28 & -2 & -3 & -4 \\ -2 & 1 & 0 & 0 \\ -3 & 0 & 1 & 0 \\ -4 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} w \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix} \tag{10.3}$$

ou de infinitas outras maneiras equivalentes.

10.2.5 Transformação projetiva de um sólido quadrático

Considere a aplicação de uma transformação projetiva M a todos os pontos do espaço $\mathbb{T}_3$. Os pontos do interior, exterior e fronteira de um objeto sólido qualquer A serão levados para outros conjuntos de pontos, que podem ser interpretados como o interior, exterior e fronteira de um outro objeto sólido A'. Por definição, este último é a *imagem de A por F*, que, de acordo com nossa notação, denotaremos por $M(A)$ ou AM.

É fácil verificar que, se A é um sólido algébrico definido pelo polinômio homogêneo f, então a imagem $A' = AM$ é definida pelo polinômio $f' = p \mapsto pM^{-1}f$. Uma vez que M^{-1} executa uma transformação linear das coordenadas, podemos concluir que f' também é um polinômio homogêneo, com grau igual ao de f; e, portanto, a imagem AM é também um sólido algébrico.

Como sabemos, no caso em que f é um polinômio do primeiro grau (isto é, A é um semi-espaço), a função f pode ser escrita como um produto matricial

$$f(w,x,y,z) \;=\; (w,x,y,z)\,(\mathcal{W},\mathcal{X},\mathcal{Y},\mathcal{Z})^{\top}$$

$$= \quad (w, x, y, z) \begin{pmatrix} \mathcal{W} \\ \mathcal{X} \\ \mathcal{Y} \\ \mathcal{Z} \end{pmatrix}$$

onde $\langle \mathcal{W}, \mathcal{X}, \mathcal{Y}, \mathcal{Z} \rangle$ são os coeficientes do plano que é a fronteira de A. A função f' pode ser escrita então como

$$\begin{aligned}
f'(w, x, y, z) &= \Big((w, x, y, z)\mathsf{M}^{-1}\Big)\ (\mathcal{W}, \mathcal{X}, \mathcal{Y}, \mathcal{Z})^{\top} \\
&= (w, x, y, z)\left(\mathsf{M}^{-1}\ (\mathcal{W}, \mathcal{X}, \mathcal{Y}, \mathcal{Z})^{\top}\right) \\
&= (w, x, y, z)\Big((\mathcal{W}, \mathcal{X}, \mathcal{Y}, \mathcal{Z})\mathsf{M}^{-1\top}\Big)^{\top}
\end{aligned}$$

Ou seja, os coeficientes de f', na forma de um vetor linha, são os coeficietnes de f pós-multiplicados pela matriz $\mathsf{M}^{-1\top}$.

Podemos obter uma fórmula análoga para a imagem de um sólido de segundo grau, partindo da forma matricial (10.2), e substituindo-se (w, x, y, z) por $(w, x, y, z)\mathsf{M}^{-1}$:

$$\begin{aligned}
f'(w, x, y, z) &= \Big((w, x, y, z)\mathsf{M}^{-1}\Big)\,\mathsf{F}\Big((w, x, y, z)\mathsf{M}^{-1}\Big)^{\top} \\
&= (w, x, y, z)\left(\mathsf{M}^{-1}\mathsf{F}\mathsf{M}^{-1\top}\right)(w, x, y, z)^{\top}
\end{aligned}$$

Portanto, se A é um sólido quadrático descrito pela matriz de coeficientes F, a imagem $A' = AM$ é outro sólido quadrático, descrito pela matriz $\mathsf{M}^{-1}\mathsf{F}\mathsf{M}^{-1\top}$.

10.2.6 Classificação dos sólidos quadráticos

Um *sólido quadrático canônico* é um sólido quadrático cuja matriz de coeficientes tem as seguintes propriedades:

1. os elementos fora da diagonal principal são zeros;
2. os elementos da diagonal principal são $+1$, 0, ou -1;
3. o número de elementos -1 é menor ou igual ao de elementos $+1$;

4. os elementos da diagonal estão em ordem crescente de valor.

Existem apenas 7 matrizes que satisfazem estas condições, e portanto 7 sólidos quadráticos canônicos. A figura 10.3 dá a matriz, a fórmula cartesiana equivalente, e a descriçào geométrica de cada um. Pode-se provar que qualquer sólido quadrático é a imagem projetiva de um destes sete sólidos canônicos, ou de seu complemento.

Por exemplo, toda esfera ou elipsóide é a imagem da bola canônica. O mesmo vale para todo parabolóide ou hiperbolóide de duas folhas; estes não passam de elipsóides que são respectivamente tangenciados e cortados pelo plano no infinito Ω_2.

Da mesma forma, todo cilindro infinito, com secção circular ou elíptica, é a imagem do cilindro canônico. O mesmo vale para todo cone infinito duplo (com dois lóbulos opostos pelo vértice), circular ou elíptico. Na verdade, um cilindro é um cone cujo vértice está no infinito.

Diga-se de passagem que esta unificação maciça dos sólidos quadráticos é mais uma vantagem de se trabalhar no espaço projetivo, em vez de no espaço cartesiano.

10.2.7 Conversão de CSG para lista de polígonos

A árvore CSG é uma descrição implícita, que não permite determinar fácilmente quais os pedaços de objetos e faces que realmente existem na cena. Se quisermos calcular uma imagem da mesma usando os algoritmos vistos até agora, precisamos primeiro transformar essa árvore numa lista explícita de polígonos. (Mais adiante no curso estudaremos uma técnica de visualização — *traçado de raios* — que permite produzir a imagem diretamente a partir da uma árvore CSG. Entretanto, essa técnica é demasiado dispendiosa para muitas aplicações.)

Se as folhas da árvore são todas semi-planos, a cena é uma coleção de poliedros com um número finito de faces (possivelmente ilimitadas). Existem algoritmos exatos para calcular a união, intersecção, e diferença de dois poliedros. Usando esses algoritmos, podemos transformar uma árvore CSG com folhas de grau 1 numa lista explícita de faces poligonais. No pior caso, o custo deste processo para n folhas é aproximadamente $\Theta(n^3)$ (ignorando fatores de $\log n$), e a lista de faces resultante pode conter até $\Omega(n^3)$ polígonos distintos.

Em princípio, é possível generalizar estes algoritmos mesmo para árvores CSG com folhas de grau maior do que 1. Entretanto, o resultado é uma coleção de retalhos curvos com topologia complexa, cada qual definido por uma equação e várias inequações polinomiais. Encontrar estes retalhos, eliminar as partes invisíveis dos mesmos, e projetá-los no plano da imagem exige algoritmos bastante complexos baseados em ferramentas não triviais de geometria algébrica e álgebra computacional.

É concebível que, dentro de alguns anos, esta solução exata se torne viável e popular; mas, por enquanto, este problema é geralmente resolvido aproximando-se as superfícies curvas da cena por um número grande de polígonos planos, suficientemente pequenos. Para tanto, basta em princípio aproximar cada sólido algébrico que aparece nas folhas da árvore CSG por um poliedro, e aplicar a estes poliedros as operações booleanas indicadas pela árvore, usando os algoritmos de união e intersecção mencionados acima.

10.2.8 Cálculo do poliedro aproximador

Para alguns sólidos algébricos — semi-espaços, esferas, cilindros, cones — é fácil construir aproximações poliédricas com erro de aproximação especificado. Por exemplo, um cilindro pode ser aproximado por um prisma regular de n lados, tal que a distância entre os dois é proporcional a $1/n^2$. Da mesma forma, um cone pode ser aproximado por uma pirâmide regular.

Para aproximar uma esfera, começamos com um poliedro regular P com faces triangulares (por exemplo, um icosaedro) inscrito na mesma. Dividimos a seguir cada face de P em n^2 triângulos equiláteros, como indicado na figura **??**, e projetamos os vértices desses triângulos na esfera a partir do centro. Esses vértices projetados definem um poliedro Q com faces triangulares, que aproxima a esfera com erro proporcional a $1/n^2$. (As "cúpulas geodésicas" dos arquitetos são variantes deste tipo de poliedro.)

Uma desvantagem destas soluções "ad hoc" é que há uma variedade muito grande de sólidos algébricos, e é impraticável escrever um algoritmo de aproximação específico para cada um.

Outra desvantagem é que muitos sólidos algébricos são ilimitados, e por razões de eficiência devemos evitar gerar as partes do poliedro aproximador que ficam fora do volume visível. Mais ainda, quando aplicamos a transformação de perspectiva a um sólido, algumas partes do mesmo são ampliadas, e outras reduzidas; portanto, o poliedro aproximador deve ser mais preciso em certos lugares do que em outros. Aliás, a transformação de perspectiva pode até mesmo mudar o tipo de sólido: por exemplo, uma esfera que cruza o plano do observador será transformada num hiperbolóide de duas folhas. Estes detalhes podem complicar bastante os algoritmos de aproximação.

Devido a estes problemas, é importante ter à mão algum algoritmo "universal" de aproximação, que possa ser aplicado a qualquer sólido geométrico F.

Um método "universal" bastante simples é o da *subdivisão simplicial do espaço*. Este método consiste em recortar o volume da imagem num grande número de tetraedros — *células* — suficientemente pequenos para que, dentro de cada tetraedro, a função $f(w,x,y,z)$ que define o sólido F possa ser aproximada por uma função afim (polinômio de 1º grau) f^*_K. Desta maneira, dentro de cada célula o sólido pode ser aproximado pelo semi-espaço S^*_K. A união desses fragmentos de semi-espaços forma um poliedro, que é a aproximação desejada ao sólido S.

Uma maneira simples de definir as células é dividir o volume da imagem primeiro em pequenos cubos (ou paralelepípedos) por meio de planos paralelos aos eixos X, Y, e Z. (Estamos supondo a cena tranformada de modo que o observador está em em $[0,0,0,1]$, a imagem em $Z = 0$, e o volume da imagem é um paralelepípedo.) Cada um desses cubículos pode ser dividido em tetraedros, sem introduzir novos vértices além dos do cubículo. (Há várias maneiras de fazer isso, algumas usando cinco tetraedros por cubo, outras usando seis.)

Dentro de cada célula K, substituimos a função característica $f(w,x,y,z)$ do sólido pela funcão afim (polinômio de 1º grau) f^*_K que concorda com f nos quatro vértices a,b,c,d da célula. Isto é,

$$f^*_K(p) = \alpha f(a) + \beta f(b) + \gamma f(c) + \delta f(d) \tag{10.4}$$

onde $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ são as coordenadas baricentricas de p relativas a K. Isto é, $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ são as distâncias de p às quatro faces de K, opostas respectivamente aos vértices a, b, c, d, e normalizadas de modo que $\alpha = 1$ para $p = a$, $\beta = 1$ para $p = b$, etc.

Assim como está, a receita acima é ambígua. Os argumentos de $f(w, x, y, z)$ são coordenadas homogêneas, que podem ser multiplicadas por um fator de escala arbitrário. Por conseguinte, não faz sentido calcular o valor de f num ponto de $\mathbb{T}_3$; apenas seu sinal está bem definido. Para que possamos aplicar a fórmula (10.4) sem ambigüidade, devemos normalizar as coordenadas homogêneas dos vértices, antes de aplicar f às mesmas. No caso, o mais simples e conveniente é normalizá-las de forma que w seja 1. Ou seja, convém trabalhar com coordenadas cartesianas, que não são ambíguas, e com a função $F(X, Y, Z) = f(1, X, Y, Z)$, cujo valor é bem definido para todo ponto p.

Considere agora o semi-espaço S^*_K definido por f^*_K. Se f (e portanto f^*_K) é positiva nos quatro vértices de K, então a célula K está inteiramente no exterior de S^*_K. Da mesma forma, se f for negativa nos quatro vértices, então a célua está totalmente no interior de S^*_K.

Nos demais casos, a célula contém pelo menos um ponto da fronteira de S^*_K, e possivelmente um pedaço poligonal — triângulo ou quadrilátero — da mesma. Veja a figura 10.2. Os vértices desse polígono in-

Figura 10.2: Aproximação dentro de uma célula.

cluem todos os vértices de K nos quais f é zero, e também um ponto m em cada aresta de K cujos vértices u, v têm sinais opostos. Neste último caso, as coordenadas do ponto m podem ser calculadas pela fórmula de intersecção segmento-plano, isto é, $|f(b)|a + |f(a)|b$. Repetindo-se este processo para todas as células, obtemos uma coleção de polígonos que aproxima a superfície do sólido S dentro do volume da imagem.

Note que um mesmo vértice a pode ser compartilhado por várias células vizinhas. Obviamente, para economizar ciclos, devemos calcular $f(a)$ uma única vez. De qualquer forma, é essencial que usemos o mesmo valor de $f(a)$ para aproximar f em todas essas células. É fácil verificar que, se tomarmos este cuidado em todos os vértices, então as funcões f^*_H, f^*_K de quaisquer duas céluas adjacentes concordarão em todos os pontos da face comum. Ou seja, a coleção de todas as f^*_K define uma função *contínua* do volume da imagem para $\mathbb{R}$. Isto garante que os polígonos aproximadores obtidos em duas células adjacentes terão uma aresta em comum.

A solução acima tem a vantagem de produzir resultados exatos para as partes da cena que são de fato poliedros. Por outro lado, tem a desvantagem de que os algoritmos de união e intersecção de poliedros são bastante complicados. Outra desvantagem mais significativa é que, em geral, apenas uma pequena parte de cada sólido algébrico sobrevive na cena final; portanto o tempo e espaço gastos para construir a aproximação poliédrica do sólido dentro do volume inteiro da imagem é quase todo desperdiçado.

$\begin{matrix} +1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & +1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & +1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & +1 \end{matrix}$	$X^2+Y^2+Z^2+1$	Todo ponto é exterior.
$\begin{matrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & +1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & +1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & +1 \end{matrix}$	$X^2+Y^2+Z^2$	A superfície são dois pontos antípodas; o resto é exterior.
$\begin{matrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & +1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & +1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & +1 \end{matrix}$	$X^2+Y^2+Z^2-1$	Esfera de raio 1 com centro na origem; a origem está no interior.
$\begin{matrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & +1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & +1 \end{matrix}$	Y^2+Z^2	A superfície é o eixo X; o resto é exterior.
$\begin{matrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & +1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & +1 \end{matrix}$	Y^2+Z^2-1	A superfície é o cilindro infinito de raio 1 centrado no eixo X; a origem está no interior.
$\begin{matrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & +1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & +1 \end{matrix}$	$Y^2+Z^2-X^2-1$	Hiperbolóide de revolução de uma folha, em torno do eixo X.
$\begin{matrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & +1 \end{matrix}$	Z^2	A superfície é o plano $Z = 0$, os dois semi-espaços são exterior.
$\begin{matrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & +1 \end{matrix}$	Z^2-1	A superfície são os planos $Z = +1$ e $Z = -1$; o interior são os pontos $\|Z\| < 1$.

Figura 10.3: Os sete sólidos quadráticos canônicos.