MC409/MO603 – Computação Gráfica

© Jorge Stolfi

Segundo Semestre de 1994

Notas de Aula – Fascículo 5
Transformações Geométricas no Espaço

5.1 Transformações projetivas no espaço

A teoria das transformações projetivas de $\mathbb{T}^2$, que vimos na seção 3.1, pode ser facilmente generalizada para espaços projetivos de três dimensões, ou mais.

5.1.1 Definição

Em particular, definem-se as *transformações projetivas* de $\mathbb{T}^3$ como sendo os mapas de $\mathbb{T}^3$ para $\mathbb{T}^3$ que preservam a coplanaridade de pontos.

Prova-se que qualquer transformação F desse tipo equivale a multiplicar as coordenadas homogêneas de cada ponto por uma certa matriz F de 4×4 coeficientes reais:

$$
\begin{aligned}
[w, x, y, z] &\mapsto [w, x, y, z]\,\mathsf{F} \\
&= [w, x, y, z] \begin{bmatrix} f_{ww} & f_{wx} & f_{wy} & f_{wz} \\ f_{xw} & f_{xx} & f_{xy} & f_{xz} \\ f_{yw} & f_{yx} & f_{yy} & f_{yz} \\ f_{zw} & f_{zx} & f_{zy} & f_{zz} \end{bmatrix} \\
&= [\; w f_{ww} + x f_{xw} + y f_{yw} + z f_{zw}, \\
&\qquad w f_{wx} + x f_{xx} + y f_{yx} + z f_{zx}, \\
&\qquad w f_{wy} + x f_{xy} + y f_{yy} + z f_{zy}, \\
&\qquad w f_{wz} + x f_{xz} + y f_{yz} + z f_{zz} \;]
\end{aligned}
\tag{5.1}
$$

Pode-se provar que toda transformação projetiva do espaço fica completamente determinada se dermos cinco pontos do espaço, quatro a quatro não-coplanares, e suas respectivas imagens.

5.2 Translações e mudanças de escala

Aa transformações projetivas do espaço incluem muitos casos particulares de interesse para computação gráfica, alguns dos quais são mencionados a seguir.

Em muitos casos, a matriz e as propriedades desses mapas são generalizações triviais dos conceitos análogos de $\mathbb{T}^2$ para três dimensões. Veja o exercícios 5.1.

Ex. 5.1: Dê as matrizes das transformações projetivas que correspondem a:

(a) translação do aquém por um vetor cartesiano (X, Y, Z) dado;

(b) mudança de escala (ampliação ou redução) com fatores de escala α, β e γ nas direções X, Y e Z;

5.2.1 Rotações

Assim como toda rotação em $\mathbb{R}^2$ tem um centro (um ponto fixo), toda rotação em $\mathbb{R}^3$ têm um eixo (uma reta fixa). A matriz da transformação projetiva que realiza uma rotação no aquém de $\mathbb{T}^3$, com um determinado eixo e ângulo, tem a forma geral

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & r_x & r_y & r_z \\ 0 & s_x & s_y & s_z \\ 0 & t_x & t_y & t_z \end{bmatrix} \tag{5.2}$$

onde $r = (r_x, r_y, r_z)$, $s = (s_x, s_y, s_z)$, e $t = (t_x, t_y, t_z)$ são três vetores ortogonais de comprimento unitário, numa ordem tal que o determinante da matriz acima é positivo. Estes vetores são as imagens dos vetores da base canônica, $(1, 0, 0)$, $(0, 1, 0)$, e $(0, 0, 1)$ pela rotação.

Note que a transformação inversa — isto é, a rotação em torno do mesmo eixo pelo mesmo ângulo, em sentido oposto — é dada pela transposta da matriz acima, ou seja

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & r_x & s_x & t_x \\ 0 & r_y & s_y & t_y \\ 0 & r_z & s_z & t_z \end{bmatrix} \tag{5.3}$$

É possível determinar a direção do eixo e o ângulo de rotação a partir da matriz acima, e vice-versa; mas, como as fórmulas são um tanto complexas (na verdade, quatérnio-complexas!), vamos deixá-las para mais tarde.

Quando o eixo de rotação desejado é uma reta m que não passa pela origem, a matriz correspondente pode ser obtida pela composição TRT^{-1}, onde T é qualquer translação que traz o eixo m para uma reta m' passando pela origem, e R é a rotação pelo ângulo desejado em torno do eixo m'.

5.2.2 Reflexões

Uma reflexão do espaço tridimensional substitui cada ponto pelo seu simétrico em relação a um plano fixo. Por exemplo, a reflexão através do plano $Z = 0$ é definida pela matriz

$$\begin{bmatrix} +1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & +1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & +1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \tag{5.4}$$

A matriz da reflexão em torno de um plano perpendicular ao vetor cartesiano unitário (X, Y, Z) que passa pela origem é

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1-2X^2 & -2YX & -2ZX \\ 0 & -2XY & 1-2Y^2 & -2ZY \\ 0 & -2XZ & -2YZ & 1-2Z^2 \end{bmatrix} \tag{5.5}$$

De mode geral, uma reflexão preserva todas as distâncias entre pontos, mas (ao contrário de uma rotação) inverte a orientação de objetos assimétricos: por exemplo, transforma uma mão esquerda numa mão direita.

Pode-se mostrar que a composição de zero ou mais rotações e reflexões que deixam a origem fixa é equivalente a uma única rotação (possivelmente identidade), sozinha ou seguida de uma única reflexão. Mais exatamente, um número par de reflexões equivalem a uma rotação pura, e um número ímpar de reflexões equivalem a uma rotação seguida de uma reflexão.

Por exemplo, a transformação que inverte todas as coordenadas

$$\begin{bmatrix} +1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \tag{5.6}$$

equivale à composição de três reflexões sucessivas, através dos planos $X = 0$, $Y = 0$ e $Z = 0$; ou também a uma rotação de $180°$ em torno do eixo Z, seguida de uma reflexão através do plano $Z = 0$.

Da mesma forma, a transformação

$$\begin{bmatrix} +1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & +1 \end{bmatrix}$$

equivale a duas reflexões seguidas, através dos planos $X = 0$ e $Y = 0$, ou a uma rotação de $180°$ em torno do eixo Z.

5.2.3 Cisalhamento

Em três dimensões, uma transformação de cisalhamento é descrita por um vetor unitário u e um vetor v ortogonal a u. A transformação consiste em transladar cada plano perpendicular a u pelo vetor αv, onde α é a cota do plano na direção u (isto é, $\alpha = p \cdot u$, onde p é qualquer ponto do plano).

No caso particular em que u é a direção do eixo Z, e v é o vetor horizontal arbitrário $(X, Y, 0)$, a matriz da transformação é

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & X & Y & 1 \end{bmatrix} \tag{5.7}$$

5.2.4 Transformações afins do espaço

As composições arbitrárias de translações, rotações, reflexões, mudanças de escala e cisalhamentos constituem um subconjunto próprio das transformações projetivas de $\mathbb{T}^3$: são as *transformações afins* desse espaço. Suas matrizes têm a forma geral

$$\begin{bmatrix} 1 & a & b & c \\ 0 & d & e & f \\ 0 & g & h & i \\ 0 & j & k & l \end{bmatrix} \tag{5.8}$$

onde $a, b, \ldots l$ são números reais tais que o determinante da matriz acima é diferente de zero. (Na verdade, o elemento no canto superior esquerdo pode ser qualquer número diferente de zero, pois todos os múltiplos não-nulos da matriz acima são equivalentes.) Esta transformação leva a origem para $[1, a, b, c]$, os pontos no infinito dos três eixos para $[0, d, e, f]$, $[0, g, h, i]$, e $[0, j, k, l]$, e o ponto $[1, 1, 1, 1]$ para $[1,\ a + d + g + j,\ b + e + h + k,\ c + f + i + l]$.

As transformações afins formam um subconjunto próprio das transformações projetivas de $\mathbb{T}^3$. Sua propriedade característica é que elas mantêm a distinção entre pontos finitos e infinitos, isto é, mantêm o plano Ω^2 fixo (como conjunto, não necessariamente ponto-a-ponto). Em conseqüência, elas preservam o paralelismo entre retas e planos.

Em geral, as transformações afins não preservam comprimentos, distâncias, áreas, volumes, ângulos, ou perpendicularidade. Pode-se provar no entanto que elas preservam a razão entre os volumes de dois sólidos, a razão entre as áreas de duas figuras planas coplanares ou paralelas, e a razão entre os comprimentos de dois segmentos colineares ou paralelos. Em particular, o ponto médio de um segmento é levado para o ponto médio da imagem desse segmento. O mesmo vale para o ponto que divide um segmento numa certa proporção, e para o baricentro de um triângulo ou tetraedro.

Existe uma única transformação afim F_{pqrs} que leva os quatro pontos $[1,0,0,0]$, $[1,1,0,0]$, $[1,0,1,0]$, e $[1,0,0,1]$ para quatro pontos finitos e não coplanares p, q, r e s dados. Segue-se portanto que, dados dois tetraedros finitos não-degenerados, $pqrs$ e $p'q'r's'$, existe uma única transformação afim que leva o primeiro para o segundo, qual seja, ${F_{pqrs}}^{-1}F_{p'q'r's'}$. (Por "tetraedro não degenerado" entenda-se um tetraedro cujos quatro vértices não são coplanares.)