MC909 – Computação Gráfica

© Jorge Stolfi

Primeiro Semestre de 1995

Notas de Aula – Fascículo 2

Algoritmos Geométricos Elementares

2.1 Usando coordenadas homogêneas

De modo geral, qualquer fórmula da geometria analítica plana pode ser adaptada para coordenadas homogêneas, bastando substituir na mesma as coordenadas cartesianas X e Y por x/w e y/w, respectivamente. (Se a fórmula descreve as coordenadas de um ponto, precisamos também trocar os parênteses da mesma por colchetes, e acrescentar uma coordenada 1 inicial (o peso).)

2.1.1 Ponto médio

Por exemplo, em geometria cartesiana, sabemos que o ponto médio m do segmento com extremos $p_0 = (X_0, Y_0)$ e $p_1 = (X_1, Y_1)$ é dado por

$$m = \left(\frac{X_0 + X_1}{2}, \frac{Y_0 + Y_1}{2} \right)$$

Portanto, em termos de coordenadas homogêneas, se os extremos forem os pontos do aquém $p_0 = [w_0, x_0, y_0]$ e $p_1 = [w_1, x_1, y_1]$, esta fórmula equivale a

$$\begin{aligned} m &= \left[1, \frac{x_0/w_0 + x_1/w_1}{2}, \frac{y_0/w_0 + y_1/w_1}{2} \right] \\ &= \left[1, \frac{x_0 w_1 + x_1 w_0}{2 w_0 w_1}, \frac{y_0 w_1 + y_1 w_0}{2 w_0 w_1} \right] \end{aligned}$$

Podemos eliminar as divisões desta fórmula, multiplicando as três coordenadas homogêneas por $w_0 w_1$, o que não altera o ponto m. Obtemos assim a fórmula

$$m = [\ 2w_0w_1,\quad w_1x_0 + w_0x_1,\quad w_1y_0 + w_0y_1\ ] \tag{2.1}$$

Ex. 2.1: Calcule as coordenadas homogêneas do ponto do aquém que está a $1/3$ do caminho entre os pontos $[1, 2, 3]$ e $[2, 3, 5]$.

Ex. 2.2: O que acontece com o ponto médio de p_0 e p_1, conforme definido pela fórmula (2.1), se *um* dos pontos estiver no infinito? E se *ambos* estiverem no infinito?

Ex. 2.3: Qual a posição do ponto definido pela fórmula (2.1), se um dos pontos estiver no aquém, e o outro no além? E se ambos estiverem no além?

Ex. 2.4: Uma fórmula para o ponto médio que dá resultados mais consistentes para pontos do além é

$$m = [\ |w_1|w_0 + |w_0|w_1,\quad |w_1|x_0 + |w_0|x_1,\quad |w_1|y_0 + |w_0|y_1\ ]$$

Compare o resultado desta fórmula com o de (2.1) para os 6 casos: p_0 e p_1 ambos no aquém, ambos no além, um no aquém e um no além, um no aquém e outro infinito, um no além e outro infinito, e ambos no infinito.

Ex. 2.5: Dê uma fórmula homogênea, sem divisões, para o centro de gravidade de um triângulo com vértices $p_i = [w_i, x_i, y_i]$, $i = 0, 1, 2$.

Ex. 2.6: Determine uma fórmula homogênea, sem divisões, para o ponto m que divide o segmento $p_0\,p_1$ em duas partes cujos comprimentos estão na razão $\lambda_0 : \lambda_1$. Suponha que p_0, p_1, e m estão no aquém, e $\lambda_0 + \lambda_1 > 0$.

2.1.2 Colinearidade de três pontos

Dizemos que três pontos são *colineares* se eles pertencem a uma mesma reta. O que isto significa em termos de coordenadas homogêneas?

Para começar, vamos supor que os três pontos estão no aquém. Em geometria cartesiana, prova-se que três pontos $p_0 = (X_0, Y_0)$, $p_1 = (X_1, Y_1)$, e $p_2 = (X_2, Y_2)$ são colineares se e somente se

$$\begin{vmatrix} 1 & X_0 & Y_0 \\ 1 & X_1 & Y_1 \\ 1 & X_2 & Y_2 \end{vmatrix} = 0$$

Em termos das coordenadas homogêneas $[w_i, x_i, y_i]$ dos três pontos, esta fórmula equivale a

$$\begin{vmatrix} 1 & x_0/w_0 & y_0/w_0 \\ 1 & x_1/w_1 & y_1/w_1 \\ 1 & x_2/w_2 & y_2/w_2 \end{vmatrix} = 0 \tag{2.2}$$

Podemos multiplicar as três linhas desta matriz por w_0, w_1, e w_2, respectivamente, pois isto apenas multiplica o determinante pelo número positivo $w_0 w_1 w_2$, o que não afeta a equação. Concluímos que os três pontos do aquém são colineares se e somente se

$$\begin{vmatrix} w_0 & x_0 & y_0 \\ w_1 & x_1 & y_1 \\ w_2 & x_2 & y_2 \end{vmatrix} = 0 \tag{2.3}$$

Na verdade, a fórmula (2.3) vale para *quaisquer* tres pontos de $\mathbb{T}^2$, finitos ou infinitos, no aquém ou no além. Este resultado pode ser demonstrado sem muita dificuldade a partir do modelo esférico de $\mathbb{T}^2$, ou da definição algébrica de reta.

Ex. 2.7: Usando a fórmula (2.3), determine quais destas triplas de pontos são colineares:

(a) $[1, 0, 0]$, $[1, 1, 0]$, $[1, 0, 1]$.

(b) $[1, 0, 0]$, $[1, 1, 0]$, $[1, 2, 0]$.

(c) $[1, 0, 1]$, $[1, 2, 6]$, $[1, 3, 8]$.

(d) $[1, 2, 3]$, $[2, 2, 3]$, $[5, 2, 3]$.

Ex. 2.8: Demonstre *algebricamente*, usando a fórmula 2.3, que os pontos p_0, p_1, e p_2 são colineares em cada um dos seguintes casos:

(a) $p_0 = p_1$.

(b) p_2 é o ponto médio de p_0 e p_1.

(c) p_1, p_2 e p_0 são colineares.

Ex. 2.9: Considere três pontos móveis p_0, p_1, p_2 no plano, cada qual se deslocando em linha reta com velocidade uniforme. Ou seja, as coordenadas cartesianas de p_i, num instante t quaisquer, são $(X_i, Y_i) + t(X_i', Y_i')$, onde X_i, Y_i, X_i' e Y_i' são constantes.

(a) Mostre como calcular o instante t^* em que esses três pontos estarão alinhados.

(b) Analise o número de soluções t^* distintas admitidas pelo problema do item (a), discutindo todos os casos que podem ocorrer.

2.1.3 Reta determinada por dois pontos

Como já observamos, dois pontos não coincidentes de $\mathbb{T}^2$ determinam duas retas que passam por eles, coincidentes mas com orientações opostas.

Podemos deduzir a fórmula para os coeficientes destas retas a partir da equação (2.3). De acordo com esta última, a condição para que um ponto genérico $[w, x, y]$ seja colinear com $p_0 = [w_0, x_0, y_0]$ e $p_1 = [w_1, x_1, y_1]$ é

$$\begin{vmatrix} w_0 & x_0 & y_0 \\ w_1 & x_1 & y_1 \\ w & x & y \end{vmatrix} = 0$$

Expandindo este determinante pela última linha, obtemos

$$+\begin{vmatrix} x_0 & y_0 \\ x_1 & y_1 \end{vmatrix} w - \begin{vmatrix} w_0 & y_0 \\ w_1 & y_1 \end{vmatrix} x + \begin{vmatrix} w_0 & x_0 \\ w_1 & x_1 \end{vmatrix} y = 0$$

Daqui se deduz que uma das duas retas que passam por p_0 e p_1 é dada pela fórmula

$$\begin{aligned} p_0 \vee p_1 &= \left\langle +\begin{vmatrix} x_0 & y_0 \\ x_1 & y_1 \end{vmatrix}, -\begin{vmatrix} w_0 & y_0 \\ w_1 & y_1 \end{vmatrix}, +\begin{vmatrix} w_0 & x_0 \\ w_1 & x_1 \end{vmatrix} \right\rangle \qquad (2.4) \\ &= \langle +x_0y_1 - x_1y_0,\ -w_0y_1 + w_1y_0,\ +w_0x_1 - w_1x_0 \rangle \end{aligned}$$

Obviamente, a outra reta que passa por p_0 e p_1 é

$$\neg(p_0 \vee p_1) \quad = \quad \langle\, -x_0y_1 + x_1y_0,\ +w_0y_1 - w_1y_0,\ -w_0x_1 + w_1x_0 \,\rangle$$

A orientação da reta $p_0 \vee p_1$, implícita na fórmula (2.4), tem um significado geométrico bastante simples, que será visto na seção 2.2.5.

Ex. 2.10: Determine as duas retas que passam pelos pontos $[1, 2, 3]$ e $[4, 5, 6]$.

Ex. 2.11: Determine a reta que passa pelo ponto do eixo X com abscissa X_0, e pelo ponto do eixo Y com ordenada Y_0.

Ex. 2.12: Determine a reta que passa pela origem e pelo ponto (X, Y).

Ex. 2.13: O que acontece com a fórmula (2.4), quando os pontos p_0 e p_1 coincidem?

2.1.4 Reta por pontos no infinito

Pode-se verificar que a fórmula (2.4) vale para quaisquer dois pontos — no aquém, no além, ou infinitos — que não sejam iguais ou antipodais.

Esta flexibilidade é útil, por exemplo, quando queremos calcular os coeficientes da reta r que passa por um ponto finito $p = [w_p, x_p, y_p]$ e é paralela a um certo vetor $d = (x_d, y_d)$. Esta reta contém o ponto infinito $\infty d = [0, x_d, y_d]$; ou seja, $r = p \vee (\infty d)$. Portanto, não precisamos desenvolver (e programar) uma fórmula especial para este problema; basta usar a fórmula (2.4), da reta $p_0 \vee p_1$, com $p_0 = p$ e $p_1 = \infty d$.

Ex. 2.14: Determine os coeficientes da reta que passa por $[2, 3, 4]$ e é paralela ao vetor $(-2, 3)$.

Ex. 2.15: Determine a fórmula geral explícita para os coeficientes da reta que passa pelo ponto cartesiano (X, Y) e faz um ângulo anti-horário de θ radianos com o eixo X.

Ex. 2.16: Diga como calcular os coeficientes da reta que passa por um ponto finito $p = [w_p, x_p, y_p]$ e é *perpendicular* a um vetor cartesiano $d = (x_d, y_d)$.

Ex. 2.17: O que acontece com a reta $p_0 \vee p_1$ (fórmula (2.4)), quando os pontos p_0 e p_1 são ambos infinitos?

2.1.5 Ponto determinado por duas retas

Na geometria euclidiana, aprendemos que duas retas $r_0 = \langle \mathcal{W}_0, \mathcal{X}_0, \mathcal{Y}_0 \rangle$ e $r_1 = \langle \mathcal{W}_1, \mathcal{X}_1, \mathcal{Y}_1 \rangle$, distintas e não paralelas, se cruzam num único ponto, que vamos denotar por $r_0 \wedge r_1$.

As coordenadas cartesianas (X, Y) desse ponto devem satisfazer as duas equações $\mathcal{W}_i + \mathcal{X}_i X + \mathcal{Y}_i Y = 0$; e portanto podem ser calculadas resolvendo-se o sistema linear

$$\begin{cases} \mathcal{X}_0 X + \mathcal{Y}_0 Y &= -\mathcal{W}_0 \\ \mathcal{X}_1 X + \mathcal{Y}_1 Y &= -\mathcal{W}_1 \end{cases}$$

Segundo a regra de Cramer, a solução deste sistema é

$$X = -\frac{\begin{vmatrix} \mathcal{W}_0 & \mathcal{Y}_0 \\ \mathcal{W}_1 & \mathcal{Y}_1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \mathcal{X}_0 & \mathcal{Y}_0 \\ \mathcal{X}_1 & \mathcal{Y}_1 \end{vmatrix}}, \qquad Y = -\frac{\begin{vmatrix} \mathcal{X}_0 & \mathcal{W}_0 \\ \mathcal{X}_1 & \mathcal{W}_1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \mathcal{X}_0 & \mathcal{Y}_0 \\ \mathcal{X}_1 & \mathcal{Y}_1 \end{vmatrix}} \tag{2.5}$$

Convertendo o par (X, Y) para coordenadas homogêneas, e multiplicando as mesmas pelo denominador comum, concluímos que o ponto de intersecção das duas retas é dado pela fórmula

$$r_0 \wedge r_1 = \left[+\begin{vmatrix} \mathcal{X}_0 & \mathcal{Y}_0 \\ \mathcal{X}_1 & \mathcal{Y}_1 \end{vmatrix}, -\begin{vmatrix} \mathcal{W}_0 & \mathcal{Y}_0 \\ \mathcal{W}_1 & \mathcal{Y}_1 \end{vmatrix}, +\begin{vmatrix} \mathcal{W}_0 & \mathcal{X}_0 \\ \mathcal{W}_1 & \mathcal{X}_1 \end{vmatrix} \right] \tag{2.6}$$

$$= \begin{matrix} [& +\mathcal{X}_0\mathcal{Y}_1 - \mathcal{X}_1\mathcal{Y}_0, & \\ & -\mathcal{W}_0\mathcal{Y}_1 + \mathcal{W}_1\mathcal{Y}_0, & \\ & +\mathcal{W}_0\mathcal{X}_1 - \mathcal{W}_1\mathcal{X}_0 &] \end{matrix} \tag{2.7}$$

Ex. 2.18: Usando a fórmula 2.7, determine o ponto de encontro $r \wedge s$ para os seguintes pares de retas:

(a) $r = \langle 0, 1, 0 \rangle \quad s = \langle 0, 0, 1 \rangle$

(b) $r = \langle 0, 0, 1 \rangle \quad s = \langle 0, 1, 0 \rangle$

(c) $r = \langle 1, 3, 5 \rangle \quad s = \langle 2, 4, 6 \rangle$

(d) $r = \langle 1, 3, 5 \rangle \quad s = \langle 1, 0, 0 \rangle$

(d) $r = \langle 1, 3, 5 \rangle \quad s = \langle 2, 3, 5 \rangle$

Apesar da fórmula (2.7) ter sido desenvolvida sob a hipótese do ponto de encontro ser finito, pode-se verificar que ela vale para quaisquer duas retas não coincidentes, mesmo as que se encontram no infinito. Veja os exercícios 2.19, e 2.20.

Ex. 2.19: Verifique algebricamente que o ponto $r \wedge s$, calculado pela fórmula (2.7), sempre pertence às retas r e s.

Ex. 2.20: Prove que duas retas r e s, ordinárias e não coincidentes, são paralelas se e somente se $r \wedge s$ é um ponto infinito.

Ex. 2.21: Determine o ponto de encontro das retas que passam pelos pontos de abscissa $+1$ e -1 do eixo X, e formam ângulos α e β com o mesmo, respectivamente.

Ex. 2.22: O que acontece com a fórmula (2.7), quando as retas r_0 e r_1 coincidem (são iguais ou opostas)?

Já observamos antes que, no plano $\mathbb{T}^2$, duas retas não coincidentes se encontram em *dois* pontos antipodais. A fórmula (2.7) dá apenas um desses pontos. Qual deles? Os exercícios 2.23 e 2.24 respondem em parte a essa pergunta; a resposta completa será vista na seção 2.2.7.

Ex. 2.23: A partir da fórmula (2.7), mostre que

$$(\neg r_0) \wedge r_1 = r_0 \wedge (\neg r_1) = \neg(r_0 \wedge r_1)$$

Ex. 2.24: A partir da fórmula (2.7), mostre que $r_1 \wedge r_0 = \neg(r_0 \wedge r_1)$

Ex. 2.25: Usando a fórmula (2.7), determine as coordenadas do ponto de intersecção da reta genérica $\langle \mathcal{W}, \mathcal{X}, \mathcal{Y} \rangle$ com a reta Ω. Qual o significado geométrico desse ponto?

2.1.6 Dualidade

Leitores atentos provavelmente notaram a semelhança entre as fórmulas da reta que passa por dois pontos (2.4) e do ponto de intersecção de duas retas (2.7).

Esta semelhança é uma manifestação de um princípio muito importante, a *dualidade* entre pontos e retas do plano projetivo. Considere a função que ao ponto $p = [w, x, y]$ associa a reta $p^* = \langle w, x, y\rangle$; e à reta $r = \langle \mathcal{W}, \mathcal{X}, \mathcal{Y}\rangle$ associa o ponto $r^* = [\mathcal{W}, \mathcal{X}, \mathcal{Y}]$. É fácil ver que um ponto p está numa reta r se e somente se a reta p^* passa pelo ponto r^*; e, na verdade,

$$r \diamond p = p^* \diamond r^*$$

Com um pouco mais de trabalho, pode-se concluir que

$$(p_0 \vee p_1)^* = (p_0)^* \wedge (p_1)^*$$

para quaisquer dois pontos p_0, p_1. Como $(p^*)^* = p$, temos também

$$(m_0 \wedge m_1)^* = (m_0)^* \vee (m_1)^*$$

para quaisquer duas linhas m_0, m_1.

A função '*' é a *dualidade canônica* de $\mathbb{T}^2$. Ela nos permite traduzir mecanicamente muitas fórmulas geométricas que envolvem pontos em outras fórmulas que envolvem linhas, e vice-versa. O mesmo vale para teoremas, algoritmos, e estruturas de dados. Com isto, o custo de desenvolvimento e programação de algoritmos geométricos fica substancialmente reduzido, quase que pela metade.

Ex. 2.26: Qual é o dual canônico dos seguintes objetos e conceitos:

(a) Um ponto do aquém.

(b) Um ponto no infinito.

(c) O antípoda de um ponto.

(d) A origem do aquém.

(e) O eixo X.

(f) Um segmento pq.

2.2 Orientação

2.2.1 Orientação de três pontos

Sejam p, q, e r três pontos não colineares contido no aquém. Informalmente, a *orientação* da tripla (p, q, r) é o sentido (horário ou anti-horário) em que o segmento segmento $p\,u$ roda em torno de p, quando o ponto u vai de q para r ao longo do segmento $q\,r$.

Observe que a ordem dos pontos é importante. Por exemplo, a tripla $((1,1),\ (3,2),\ (2,4))$ tem orientação anti-horária enquanto que $((1,1),\ (2,4),\ (3,2))$ tem orientação horária.

Os termos *horário* e *anti-horário* pressupõem a convenção usual que o eixo Y do plano cartesiano é desenhado a $90°$ do eixo X, no sentido anti-horário. Para não dependermos dessa convenção puramente gráfica, chamaremos os dois sentidos de rotação de *negativo* e *positivo*; sendo que, por definição, a tripla $((0,0),\ (1,0),\ (0,1))$ tem orientação positiva.

Mais formalmente, definimos a função $\Delta(p,q,r)$, que vale -1 ou $+1$, conforme a tripla (p,q,r) tenha orientação negativa ou positiva, respectivamente; e que vale 0 se os três pontos são colineares.

Ex. 2.27: Determine o valor de $\Delta(p,q,r)$ para cada uma das triplas abaixo:

(a) $p = [1,0,0]$ $q = [1,1,0]$ $r = [1,0,1]$

(b) $p = [1,0,0]$ $q = [1,3,2]$ $r = [2,5,3]$

(c) $p = [1,2,3]$ $q = [1,4,4]$ $r = [2,8,9]$

Na seção 1.5.3 definimos o triângulo $p\,q\,r$ como sendo um conjunto de pontos, incluindo os vértices, lados, e interior. Portanto, estritamente falando, o triângulo não depende da ordem dos seus vértices. Entretanto, abusando um pouco da linguagem, vamos freqüentemente escrever "orientação do triângulo $p\,q\,r$" em vez de "orientação da tripla (p,q,r)"

2.2.2 Orientação algébrica

Vimos na seção 2.1.2 que três pontos são colineares quando o determinante 3×3 de suas coordenadas homogêneas é zero.

Verifica-se que, se esses três pontos estão no aquém, e não são colineares, o sinal desse mesmo determinante é precisamente a orientação do triângulo determinado por esses três pontos.

Ou seja, se $p_i = [w_i, x_i, y_i]$, para $i = in\{0,1,2\}$, temos

$$\Delta(p_0,p_1,p_2) \;=\; \operatorname{sgn}\begin{vmatrix} w_0 & x_0 & y_0 \\ w_1 & x_1 & y_1 \\ w_2 & x_2 & y_2 \end{vmatrix} \tag{2.8}$$

Em álgebra linear aprendemos que multiplicar uma linha de uma matriz por uma constante α também multiplica seu determinante por α. Decorre daí que o sinal do determinante acima não se altera se substituirmos as triplas homogêneas $[w_i, x_i, y_i]$ por quaisquer outras triplas equivalentes. Ou seja, o valor da função $\Delta(p_0, p_1, p_2)$ depende apenas das posições dos pontos, e não da escolha dos pesos w_i.

Observe também que se trocarmos a ordem de quaisquer duas linhas da matriz, o sinal do determinante se inverte. Portanto, a orientação de um triângulo também se inverte quando trocamos quaisquer dois de seus vértices. Ou seja,

$$\Delta(q,p,r) = \Delta(p,r,q) = \Delta(r,q,p) = -\,\Delta(p,q,r) \tag{2.9}$$

Ex. 2.28: Determine *algebricamente* o valor de $\Delta(p,q,r)$, usando a fórmula (2.8), para cada um dos triângulos

(a) $p = [1,0,0]$ $q = [1,1,0]$ $r = [1,0,1]$

(b) $p = [1,0,0]$ $q = [1,3,2]$ $r = [2,5,3]$

(c) $p = [1,2,3]$ $q = [1,4,4]$ $r = [2,8,9]$

Ex. 2.29: Qual o efeito de uma permutação circular dos argumentos de Δ? Isto é, qual a relação entre $\Delta(p,q,r)$, $\Delta(q,r,p)$, e $\Delta(r,p,q)$?

Ex. 2.30: Demonstre que os triângulos pqr, pmr e mqr têm a mesma orientação, se m for o ponto médio do segmento pq.

2.2.3 Orientação no além

Até agora só definimos a função Δ para pontos do aquém. Como fica esse conceito quando alguns dos pontos estão no infinito, ou no além?

Como o conceito intuitivo de "sentido de rotação" não é muito claro nesses casos, vamos adotar a fórmula (2.8) como sendo a *definição* da função Δ, para quaisquer três pontos de $\mathbb{T}^2$.

Observe que o determinante da fórmula (2.8) muda de sinal se multiplicarmos qualquer linha por -1. Portanto, se trocarmos qualquer vértice pelo seu antípoda, a orientação do triângulo se inverte. Ou seja,

$$\Delta(\neg p_0, p_1, p_2) = -\,\Delta(p_0, p_1, p_2) \tag{2.10}$$

Portanto,

$$\Delta(\neg p_0, \neg p_1, \neg p_2) = -\,\Delta(p_0, p_1, p_2) \tag{2.11}$$

Em particular, a orientação de um triângulo no além é oposta à do triângulo coincidente no aquém.

Ex. 2.31: Usando as equações (2.9) e (2.10), determine a orientação dos pontos abaixo, sabendo que $\Delta(p, q, r) = +1$:

(a) $\Delta(p, q, \neg r)$ (b) $\Delta(p, \neg q, \neg r)$

(c) $\Delta(p, \neg r, q)$ (d) $\Delta(q, r, \neg p)$

2.2.4 Orientação no modelo esférico

O significado geométrico da função Δ é relativamente fácil de visualizar no modelo esférico.

Em primeiro lugar, vamos definir informalmente o *sentido positivo de rotação* em torno de um ponto qualquer p de $\mathbb{S}^2$, como sendo o sentido anti-horário se visto de um ponto exterior à esfera mas arbitrariamente próximo de p.

Esta definição pressupõe que os eixos de $\mathbb{R}^3$ estão dispostos de maneira usual; ou seja que os vetores $(1, 0, 0)$, $(0, 1, 0)$, e $(0, 0, 1)$, nessa ordem, rodam em sentido anti-horário quando vistos do ponto $(1, 1, 1)$.

Com esta definição, podemos então verificar que $\Delta(p, q, r)$ indica o sentido em que o segmento $p\,u$ roda em torno de p, quando o ponto u vai de q para r ao longo do segmento $q\,r$. Veja a figura 2.1.

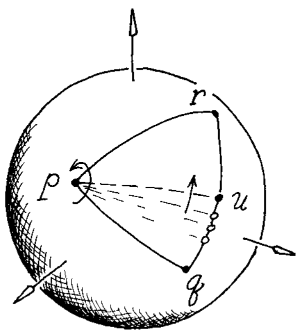

Figura 2.1: Orientação de um triângulo no modelo esférico.

2.2.5 Orientação da reta por dois pontos

Estamos agora em condições de esclarecer uma dúvida que restou da seção 2.1.3: qual é a orientação da reta $p_0 \vee p_1$, definida pela fórmula (2.4).

Para esse fim, vamos testar a posição de um ponto genérico $p_2 = [w_2, y_2, x_2]$ em relação à mesma:

$$(p_0 \vee p_1) \diamond p_2 = \operatorname{sgn} \left(+ \begin{vmatrix} x_0 & y_0 \\ x_1 & y_1 \end{vmatrix} w_2 - \begin{vmatrix} w_0 & y_0 \\ w_1 & y_1 \end{vmatrix} x_2 + \begin{vmatrix} w_0 & x_0 \\ w_1 & x_1 \end{vmatrix} y_2 \right)$$

Note que a fórmula dentro dos parênteses é simplesmente a expansão, pela última linha, do determinante da matriz de coordenadas dos três pontos p_0, p_1, p_2. Como vimos, o sinal desse determinante define a orientação do triângulo p_0, p_1, p_2.

Concluímos portanto que *o lado positivo da reta $p_0 \vee p_1$ consiste de todos os pontos p_2 que formam um triângulo positivo com p_0 e p_1.* Formalmente,

$$(p_0 \vee p_1) \diamond p_2 = \Delta(p_0, p_1, p_2) \tag{2.12}$$

Ex. 2.32: Mostre que a reta de p_1 a p_0 tem orientação contrária à reta de p_0 a p_1; isto é, $p_1 \vee p_0 = \neg(p_0 \vee p_1)$.

Ex. 2.33: Qual é o lado positivo da reta $p \vee (\infty d)$?

2.2.6 Orientação longitudinal de uma reta

Por definição, a *orientação externa* (ou *transversal*) de uma reta é simplesmente a especificação de qual lado da mesma é o lado positivo.

A partir da orientação externa de uma reta e do conceito de rotação positiva em torno de um ponto, podemos definir a *orientação interna* (ou *longitudinal*) da reta como sendo o sentido de percurso da mesma que circunda os pontos do seu hemisfério positivo no sentido positivo.

Ou seja, se p e q são dois pontos de uma reta r, tais que $p \vee q = r$, a orientação interna de r é o sentido de percurso da mesma que corresponde a ir de p para q ao longo do segmento $p\,q$.

No modelo esférico, a orientação externa pode ser visualizada como uma seta t perpendicular à reta, afixada a qualquer ponto da mesma, apontando do lado negativo para o positivo. A orientação interna pode ser visualizada como uma seta u ao longo da reta, dirigida de tal forma que o sentido rotação de u para t pelo menor ângulo seja positivo.

No modelo plano, as convenções gráficas acima só podem ser usadas no caso de retas ordinárias. Neste caso, é importante observar que as setas que indicam a orientação longitudinal de uma reta são paralelas no aquém e no além; enquanto que as setas da orientação transversal no aquém são opostas às do além.

Ex. 2.34: Seja r uma reta ordinária, desenhada no modelo plano, com sua orientação longitudinal indicada por uma seta. Dê uma regra geométrica para determinar a orientação transversal de r, no aquém e no além, a partir da orientação longitudinal. (Suponha que os eixos X e Y têm as direções convencionais.)

Ex. 2.35: Desenhe cada uma das retas abaixo, no modelo plano de $\mathbb{T}^2$, indicando por meio de setas as orientações transversal e longitudinal, tanto no aquém quanto no além :

(a) $\langle 0, 1, 0\rangle$;
(b) $\langle -2, 3, 5\rangle$;
(c) $\langle 2, -3, -5\rangle$;
(d) $\langle 2, 3, 5\rangle$.

Ex. 2.36: Descreva geometricamente a orientação longitudinal da reta $\Omega = \langle 1, 0, 0\rangle$, nos modelos planos e esférico.

2.2.7 Cruzamento de retas e orientação

Podemos agora responder também a outra dúvida que ficou em aberto da seção 2.1.5: se duas retas r e s se cruzam em dois pontos antipodais p e q, qual destes dois é o ponto $r \wedge s$, definido pela fórmula (2.7)?

Lembremos que $r \wedge s$ só está definido se r e s não são coincidentes. Neste caso, existe uma única maneira de rodar a reta r em torno do eixo p–q, por um ângulo menor que 180°, que a torna igual a s, em posição e orientação.

É fácil ver que essa rotação vai ter sentidos opostos em relação a p e q. Pode-se provar que o ponto $r \wedge s$, calculado segundo a fórmula (2.7), é precisamente aquele ponto em que o sentido desta rotação é positivo.

Pode-se também verificar que $r \wedge s$ é o ponto onde r, percorrida no sentido da sua orientação longitudinal, passa do hemisfério positivo de s para o hemisfério negativo.

Ex. 2.37: Mostre que, se $\Delta(p, q, r) = +1$, então $(p \vee q) \wedge (q \vee r) = q$.

Ex. 2.38: Se r é uma reta ordinária, obviamente $r \wedge \Omega$ é um dos dois pontos infinitos de r. Qual deles? (Responda em termos geométricos, e não algébricos.)