Tópicos em Computação Gráfica

Notas de Aula - Fascículo 99
Questões de Provas 1993–2009

Jorge Stolfi

Sumário

1 Preâmbulos

1.1 Algebra linear

- [PAA-1]

  Nas questões a seguir em que se pedem procedimentos na linguagem C, suponha definidos os seguintes tipos e procedimentos auxiliares:

```
/* ALGEBRA LINEAR NO R^3 COM DOUBLES */
typedef struct matrix3x3 { double c[3][3]; } matrix3x3;
typedef struct vector3 { double c[3]; } vector3;

vector3 scale3(double s, vector3 v);  /* Produto s v.  */
double dot3(vector3 u, vector3 v);    /* Produto escalar u · v.  */
vector3 cross3(vector u, vector v);   /* Produto vetorial u × v.  */
vector3 add3(vector3 u, vector3 v);   /* Soma de vetores u + v.  */
vector3 sub3(vector3 u, vector3 v);   /* Diferença de vetores u - v.  */
double det3x3(matrix3x3 A);           /* Determinante de matriz |A|.  */
matrix3x3 mul3x3(matrix3x3 A, matrix3x3 B);   /* Produto de matrizes AB. */
vector3 mulvm3(vector3 u, matrix3x3 A);       /* Produto de vetor e matriz uA. */

/* ALGEBRA LINEAR NO R^4 COM DOUBLES */
typedef struct matrix4x4  couble c[4][4];  matrix4x4;
typedef struct vector4  double c[4]  vector4;

vector4 scale4(double s, vector4 v);  /* Produto s v.  */
double dot4(vector4 u, vector4 v);    /* Produto escalar u · v.  */
vector4 add4(vector4 u, vector4 v);   /* Soma de vetores u + v.  */
vector4 sub4(vector4 u, vector4 v);   /* Diferença de vetores u -v.  */
double det4x4(matrix4x4 A);           /* Determinante de matriz |A|.  */
matrix4x4 mul4x4(matrix4x4 A, matrix4x4 B);   /* Produto de matrizes A B. */
vector4 mulvm4(vector4 u, matrix4x4 A);       /* Produto de vetor e matriz u A.
*/

int sign(double x);   /* Sinal (-1,0,+1) do número x.  */

/* PLANO PROJETIVO ORIENTADO T^2 */
type pointT2 = vector3;   /* Coordenadas homogeneas [w,x,y] de ponto.  */
type lineT2 = vector3;    /* Coeficientes homogeneos de linha.  */

/* ESPACO PROJETIVO ORIENTADO T^3 */
type pointT3 = vector4;   /* Coordenadas homogeneas [w,x,y,z] de ponto.  */
type planeT3 = vector4;   /* Coeficientes homogeneos de plano.  */
```

Nas questões que pedem funções na linguagem C, a resposta deve ter **sintaxe correta** e deve incluir **todas as declarações** de parâmetros e variáveis locais que forem necessárias. Suponha que todos os números dados ou calculados podem ser armazenados numa variável `double` sem a possibilidade de *overflow*, e ignore os erros de arredondamento nas contas com `double`s. Suponha também que as suas funções serão chamadas apenas com dados válidos.

- [AKQ-1] Nas questões abaixo, pedem-se procedimentos na linguagem C. Suponha definidos os seguintes tipos e procedimentos auxiliares:

```
/* ALGEBRA LINEAR NO R^3 COM INTEIROS */
typedef int[3][3] matrix3x3;
typedef int[3] vector3;

int scale3(int s, vector3 v);         /* Produto sv.  */
int dot3(vector3 u, vector3 v);       /* Produto escalar u·v.  */
vector3 cross3(vector u, vector v);   /* Produto vetorial u×v.  */
vector3 add3(vector3 u, vector3 v);   /* Soma de vetores u+v.  */
vector3 sub3(vector3 u, vector3 v);   /* Diferença de vetores u-v.  */
int det3x3(matrix3x3 A);              /* Determinante de matriz |A|.  */
matrix3x3 mul3x3(matrix3x3 A, matrix3x3 B);   /* Produto de matrizes AB. */
vector3 mulvm3(vector3 u, matrix3x3 A);       /* Produto de vetor e matriz uA. */

/* ALGEBRA LINEAR NO R^4 COM INTEIROS */
typedef int[4][4] matrix4x4;
typedef int[4] vector4;

int scale4(int s, vector4 v);         /* Produto sv.  */
int dot4(vector4 u, vector4 v);       /* Produto escalar u·v.  */
vector4 add4(vector4 u, vector4 v);   /* Soma de vetores u+v.  */
vector4 sub4(vector4 u, vector4 v);   /* Diferença de vetores u-v.  */
int det4x4(matrix4x4 A);              /* Determinante de matriz |A|.  */
matrix4x4 mul4x4(matrix4x4 A, matrix4x4 B);   /* Produto de matrizes AB. */
vector4 mulvm4(vector4 u, matrix4x4 A);       /* Produto de vetor e matriz uA. */

int sign(int x);   /* Sinal (-1,0,+1) do inteiro x.  */

/* PLANO PROJETIVO ORIENTADO T^2 */
type pointT2 = vector3;   /* Coordenadas homogeneas [w,x,y] de ponto.  */
type lineT2 = vector3;    /* Coeficientes homogeneos de linha.  */

/* ESPACO PROJETIVO ORIENTADO T^3 */
type pointT3 = vector4;   /* Coordenadas homogeneas [w,x,y,z] de ponto.  */
type planeT3 = vector4;   /* Coeficientes homogeneos de plano.  */
```

Em todas as questões a seguir, a resposta deve ser uma função **na linguagem C**, **com sintaxe correta e com todas as declarações** de parâmetros e variáveis locais que forem necessárias. Observe que, segundo as definições acima, as coordenadas homogêneas e os coeficientes homogêneos são sempre números inteiros. Suponha que todos os números dados ou calculados podem ser armazenados numa variável `int` sem a possibilidade de *overflow*. Suponha também que as suas funções serão chamadas apenas com dados válidos.

(a) Escreva na linguagem C uma função `float_to_T2` que, dadas as coordenadas cartesianas X, Y de um ponto p de $\mathbb{R}^2$, ambas com tipo `float`, devolve um ponto p' do aquém de $\mathbb{T}^2$ — com coordenadas homogêneas **inteiras** — tal que a diferença absoluta entre p e p', em cada coordenada cartesiana, seja menor que 0.001.

(b) Escreva uma função `joinT2`, que, dados dois pontos p, q de $\mathbb{T}^2$, devolve a reta $L = p \vee q$ que passa pelos dois.

(c) Escreva uma função `coplanar` que, dados quatro pontos p, q, r, s de $\mathbb{T}^3$, devolve 0 se eles são coplanares, e 1 se eles não são.

(d) Seja M a transformação afim do $\mathbb{T}^2$ que, no aquém, transforma o quadrado $[-1, +1] \times [-1, +1]$ no retângulo $[2, 6] \times [3, 4]$, invertendo o sentido esquerda-direita mas preservando o sentido alto-baixo. Escreva uma função `makematrix` que constrói e devolve a matriz homogênea `M` dessa transformação.

(e) Escreva uma função `clipsegT3` que, dado um plano H e dois pontos p, q de $\mathbb{T}^3$, retorna o pedaço do segmento pq que não está no lado negativo de H. Se esse pedaço for vazio, a função deve retornar o segmento inválido com extremos p e $\neg p$.

(f) Seja V um conjunto de pontos de $\mathbb{T}^3$. Por definição, um *plano de suporte* de V é um plano H que passa por três pontos distintos de V, e tal que todos os demais pontos de V estão no lado positivo de H. Escreva uma função `supplanes` que, dado o tamanho n de V, e os elementos $v[i]$, $i = 0, 1, \ldots, n-1$ de V, em ordem arbitrária, escreve em `stdout` todos os planos de suporte de V. Para simplificar, suponha que não existe nenhum plano que passe por quatro pontos distintos de V.

2 Geometria bidimensional

2.1 Pontos e linhas

- [AAE-1] No caso geral, em quantas partes fica o plano $\mathbb{T}^2$ dividido por 3 retas? $\boxed{\qquad\qquad\qquad}$. Quantas dessas partes são triângulos? $\boxed{\qquad\qquad\qquad}$.

  Quais os casos excepcionais?

- [AAP-1] Por definição, o predicado $Esq(p, q, r)$ é **true** se e somente se o ponto r do plano $\mathbb{T}^2$ está à esquerda da reta que passa por p e por q, relativamente à direção de p para q.

  Descreva os cálculos necessários para determinar $Esq(p, q, r)$, a partir das coordenadas homogêneas desses pontos.

- [AAT-1] Dê fórmulas ou algoritmos para resolver cada um dos seguintes problemas. (Dica: considere algoritmos condicionais, pois nem sempre existe uma única fórmula que funciona em todos os casos.)

  (a) Dada a reta $r = \langle \mathcal{W}, \mathcal{X}, \mathcal{Y} \rangle$, determinar um ponto p tal que $p \diamond r = 0$.

  (b) Dada a reta $r = \langle \mathcal{W}, \mathcal{X}, \mathcal{Y} \rangle$, determinar um ponto p tal que $p \diamond r = +1$.

  (c) Dado o ponto $p = [w, x, y]$, determinar uma reta r tal que $p \diamond r = +1$.

- [AAU-1] Em cada um dos casos abaixo, desenhe o triângulo pqr, segundo as convenções gráficas vistas em classe.

  (a) $p = [1, 0, 0]$ $q = [1, 2, 3]$ $r = [0, 1, 0]$.

  (b) $p = [1, 1, 0]$ $q = [1, 0, 1]$ $r = [-1, 1, 1]$.

  (c) $p = [1, 1, 1]$ $q = [0, 1, 1]$ $r = [0, 1, -1]$.

- [AAX-1] Dê uma fórmula **sem divisões ou raízes quadradas** para determinar se um ponto $p = [w, x, y]$ com $w > 0$ está dentro do círculo de raio r com centro na origem.

- [ABA-1] Determine o valor de t para que a intersecção das retas $l(t)$ e $m(t)$ esteja na reta $n(t)$, onde

$$l(t) = \langle 1,\ 3t,\ 0 \rangle \qquad m(t) = \langle 1,\ 2 - 3t,\ 1 \rangle \qquad n(t) = \langle 1,\ 1,\ 2t \rangle$$

- [ABL-1] Determine a fórmula geral explícita para os coeficientes da reta que passa pelo ponto cartesiano (X, Y) e cruza o eixo das abscissas no mesmo ponto que a reta $\langle \mathcal{W}, \mathcal{X}, \mathcal{Y} \rangle$.

- [ABP-1] Considere os retângulos $A = [2 \ldots 4] \times [5 \ldots 7]$ e $B = [6 \ldots 10] \times [11 \ldots 17]$. Determine uma única reta r que divide A e B em duas metades iguais.

- [ABQ-1] Considere o triângulo com vértices $a = [3, 10, 1]$, $b = [1, -3, 1]$, e $c = [1, -1, 5]$.

  (a) Determine o comprimento dos segmentos ab e ac.

  (b) Determine os coeficientes homogêneos da bissetriz do ângulo $b\hat{a}c$ (a reta que divide o ângulo ao meio).

- [ABS-1] Escreva um procedimento em Pascal ou C que, dados números reais U, V quaisquer, e um real $\varepsilon > 0$, determina um ponto do aquém de $\mathbb{T}^2$ com coordenadas homogêneas $[w, x, y]$ **inteiras**, tal que a distância de (U, V) para p seja menor que ε. (Não se preocupe com a possibilidade de *overflow*.)

- [ABW-1] Três retas genéricas no plano $\mathbb{T}^2$ dividem o mesmo em quantas regiões conexas:

  A ☐ 4 B ☐ 6 C ☐ 7 D ☐ 8 E ☐ 9

- [ACC-1] Dentre as retas abaixo, há duas que são perpendiculares entre si. Quais?

  A ☐ $\langle 7, 3, 5\rangle$
  B ☐ $\langle -3, 7, 5\rangle$
  C ☐ $\langle 1, 1, -2\rangle$
  D ☐ $\langle -2, -5, 3\rangle$
  E ☐ $\langle -7, 3, 5\rangle$

- [ACF-1] Um programa representa pontos de $\mathbb{T}^2$ usando coordenadas homogêneas **inteiras** no intervalo $[-M .. +M]$, onde $M = 2^{15} - 1$. Se p e q são tais pontos, quantos bits serão estritamente necessários para armazenar cada um dos coeficientes da reta $p \vee q$, sem risco de *overflow*?

  A ☐ 16 B ☐ 18 C ☐ 32 D ☐ 46 E ☐ 64

- [ACI-1] O segmento de $\mathbb{T}^2$ que liga $[-2, 2, 1]$ a $[2, 2, 1]$ cruza Ω no ponto

  A ☐ $[0, 1, 0]$
  B ☐ $[0, 2, 1]$
  C ☐ $[0, -2, -1]$
  D ☐ $[1, 0, 0]$
  E ☐ $[0, 1, -2]$

- [ACK-1] Três retas genéricas no plano $\mathbb{T}^2$ dividem o mesmo em quantas regiões conexas:

  A ☐ 4 B ☐ 6 C ☐ 7 D ☐ 8 E ☐ 9

- [ACP-1] Determine o valor de t para que a intersecção das retas $l(t)$ e $m(t)$ esteja na reta n, onde

$$l(t) = \langle 1,\, 3t,\, 0\rangle \qquad m(t) = \langle 1,\, 2-3t,\, 1\rangle \qquad n = \langle 1,\, 1,\, 2\rangle$$

  (Mostre as contas.)

- [ACR-1] Escreva um procedimento em Pascal ou C que, dados números reais Xc, Yc, Zc entre -1 e +1, e um inteiro k entre 0 e 30, determina um ponto p do aquém de $\mathbb{T}^3$ com coordenadas homogêneas $[w, x, y, z]$ **inteiras**, tal que a distância de (Xc, Yc, Zc) para p seja menor que 2^{-k}. (Não se preocupe com a possibilidade de *overflow*.)

- [ACV-1] Dê fórmulas ou algoritmos para resolver cada um dos seguintes problemas. (Dica: considere algoritmos condicionais, pois nem sempre existe uma única fórmula que funciona em todos os casos.)

  (a) Dada a reta $r = \langle \mathcal{W}, \mathcal{X}, \mathcal{Y}\rangle$, determinar um ponto p tal que $p \diamond r = 0$.

  (b) Dada a reta $r = \langle \mathcal{W}, \mathcal{X}, \mathcal{Y}\rangle$, determinar um ponto p tal que $p \diamond r = +1$.

  (c) Dado o ponto $p = [w, x, y]$, determinar uma reta r tal que $p \diamond r = +1$.

  (d) Dada a reta $r = \langle \mathcal{W}, \mathcal{X}, \mathcal{Y}\rangle$ e o ponto $p = [w, x, y]$ tais que $p \diamond r = 0$, determinar uma reta s tal que $r \wedge s = p$.

  (e) Dados três pontos não-colineares $p = [w_p, x_p, y_p]$, $q = [w_q, x_q, y_q]$, e $r = [w_r, x_r, y_r]$, determinar três pontos a, b, c tais que o triângulo abc é um subconjúnto próprio do triângulo pqr.

- [ACW-1] Em cada um dos casos abaixo, desenhe o triângulo pqr, segundo as convenções gráficas vistas em classe.

  (a) $p = [+1, \ \ 0, \ \ 0] \quad q = [+1, +2, +3] \quad r = [\ \ 0, +1, \ \ 0]$.

  (b) $p = [+1, +1, \ \ 0] \quad q = [+1, \ \ 0, +1] \quad r = [-1, +1, +1]$.

  (c) $p = [+1, +1, +1] \quad q = [\ \ 0, +1, +1] \quad r = [\ \ 0, +1, -1]$.

- [ACZ-1] Dê uma fórmula **sem divisões** para determinar se um ponto $p = [w, x, y, z]$ do aquém está dentro do círculo de raio r com centro na origem.

- [ADC-1] Determine o valor de t para que a intersecção das retas $L(t)$ e $M(t)$ esteja na reta $N(t)$, onde $L(t) = \langle 1,\, 3t,\, 0\rangle$, $M(t) = \langle 1,\, 2-3t,\, 1\rangle$, $N(t) = \langle 1,\, 1,\, 2t\rangle$

- [ADG-1] Considere os retângulos $A = [8 \ldots 10] \times [7 \ldots 9]$ e $B = [1 \ldots 5] \times [11 \ldots 13]$. Determine uma única reta r que divide A e B em duas metades iguais.

- [ADH-1] Considere o triângulo com vértices

$$a = [1, 1, 0] \quad b = [5, 9, 3] \quad c = [1, 2, 0]$$

  Determine os coeficientes homogêneos da bissetriz do ângulo $b\hat{a}c$ (a reta que divide o ângulo ao meio).

- [ADJ-1] Escreva um procedimento em Pascal ou C que, dados números reais U, V quaisquer, e um real $\varepsilon > 0$, determina um ponto do aquém de $\mathbb{T}^2$ com coordenadas homogêneas $[w, x, y]$ **inteiras**, tal que a distância de (U, V) para p seja menor que ε. (Não se preocupe com a possibilidade de *overflow*.)

- [ADL-1] Determine o valor de t para que a intersecção das retas $l(t)$ e $m(t)$ esteja na reta n, onde

$$l(t) = \langle 1,\, 3t,\, 0\rangle \qquad m(t) = \langle 1,\, 2-3t,\, 1\rangle \qquad n = \langle 1,\, 1,\, 2\rangle$$

  (Mostre as contas.)

- [ADP-1] Escreva um procedimento em Pascal ou C que, dados números reais Xc, Yc, Zc entre -1 e +1, e um inteiro k entre 0 e 30, determina um ponto p do aquém de $\mathbb{T}^3$ com coordenadas homogêneas $[w, x, y, z]$ **inteiras**, tal que a distância de (Xc, Yc, Zc) para p seja menor que 2^{-k}. (Não se preocupe com a possibilidade de *overflow*.)

- [AEU-1] Considere os retângulos $A = [2 \ldots 4] \times [5 \ldots 7]$ e $B = [6 \ldots 10] \times [11 \ldots 17]$. Determine uma única reta r que divide A e B em duas metades iguais.

- [AEV-1] Considere o triângulo com vértices

$$a = [1, 1, 0] \quad b = [5, 9, 3] \quad c = [1, 2, 0]$$

  (a) Determine o comprimento dos segmentos ab e ac.

  (b) Determine os coeficientes homogêneos da bissetriz do ângulo $b\hat{a}c$ (a reta que divide o ângulo ao meio).

- [AEX-1] Escreva um procedimento em Pascal ou C que, dados números reais U, V quaisquer, e um real $\varepsilon > 0$, determina um ponto do aquém de $\mathbb{T}^2$ com coordenadas homogêneas $[w, x, y]$ **inteiras**, tal que a distância de (U, V) para p seja menor que ε. (Não se preocupe com a possibilidade de *overflow*.)

- [AFB-1] Determine os coeficientes da reta que passa pelo ponto cartesiano (X, Y) e faz um ângulo anti-horário de θ radianos com o eixo X.

- [AFF-1] Para cada uma das seqüências a seguir, determine se a seqüência converge quando i tende para infinito, e, em caso afirmativo, qual é o ponto limite:

  (a) $p_i = [(-1)^i,\, 1,\, i]$

  (b) $p_i = [1/i,\, 1/(i+1),\, 1/(i+3)]$

  (c) $p_i = [i^3,\, i^4,\, i^2]$

  (d) $p_i = [1,\, i,\, \sin i]$

  (e) $p_i = [(-1)^i,\, 1,\, i(-1)^i]$

- [AFU-1] Determine os coeficientes da reta que passa pelo ponto cartesiano (X, Y) e faz um ângulo anti-horário de θ radianos com o eixo X.

- [AFY-1] Para cada uma das seqüências a seguir, determine se a seqüência converge quando i tende para infinito, e, em caso afirmativo, qual é o ponto limite:
  (a) $p_i = [1,\, i,\, \sin i]$.
  (b) $p_i = [1/i,\, 1/(i+1),\, 1/(i+3)]$.
  (c) $p_i = [i^3,\, i^4,\, i^2]$.
  (d) $p_i = [(-1)^i,\, 1,\, i]$.
  (e) $p_i = [(-1)^i,\, 1,\, i(-1)^i]$.

- [AGN-1] Determine os coeficientes da reta que passa pelo ponto cartesiano (X, Y) e faz um ângulo anti-horário de θ radianos com o eixo X.

- [AGR-1] Para cada uma das seqüências a seguir, determine se a seqüência converge quando i tende para infinito, e, em caso afirmativo, qual é o ponto limite:
  (a) $p_i = [1,\, i,\, \sin i]$
  (b) $p_i = [1/i,\, 1/(i+1),\, 1/(i+3)]$
  (c) $p_i = [i^3,\, i^4,\, i^2]$
  (d) $p_i = [(-1)^i,\, 1,\, i]$
  (e) $p_i = [(-1)^i,\, 1,\, i(-1)^i]$

- [AHD-1] Desenhe o polígono *abcde* no plano projetivo orientado, onde os pontos têm as coordenadas indicadas abaixo, segundo as convenções usadas em classe. (No aquém, pontos cheios e linhas cheias; no além, pontos ocos e linhas tracejadas):
  (a) $a = [1, 0, 2]$
  (b) $b = [1, 1, 1]$
  (c) $c = [0, 1, 0]$
  (d) $d = [-1, 2, 0]$
  (e) $e = [-1, 0, 2]$

- [AHF-1] Determine os coeficientes da reta que passa pelo ponto P de coordenadas cartesianas $(2, 3)$ e pelo ponto de encontro das retas $R = \langle -4, 3, 1 \rangle$ e $S = \langle -4, 1, 3 \rangle$.

- [AHG-1] Dê a fórmula para a reta que é tangente ao círculo de raio 1 e centro na origem, e passa por um ponto dado $p = [w, x, y]$.

- [AHN-1] Desenhe o polígono *abcde* no plano projetivo orientado $\mathbb{T}^2$, onde os pontos têm as coordenadas indicadas abaixo. No aquém, use bolinhas cheias para pontos, e linhas contínuas para retas. No além, use bolinhas vazadas e linhas tracejadas.

$a = [+1, -2, -3]$
$b = [+1, +2, -3]$
$c = [\ \ 0, +1, +1]$
$d = [-1, -2, -3]$
$e = [-1, +2, -3]$

- [AHP-1] Seja $\mathcal{L}$ a reta com equação cartesiana $2X + 3Y + -6 = 0$. Determine as coordenadas homogêneas do ponto r onde a reta $\mathcal{L}$ encontra a reta $\mathcal{M}$ que passa pelos pontos $p = [+4, +3, +2]$ e $q = [+4, +2, +3]$.

- [AHQ-1] Seja C o círculo com centro no ponto $[2, 3, 4]$ e raio 3. Escreva a condição para que o ponto de coordenadas homogêneas $[w, x, y]$ esteja fora do círculo C.

- [AHZ-1] Para cada uma das seqüências a seguir, determine se a seqüência converge quando i tende para infinito, e, em caso afirmativo, qual é o ponto limite:
  (a) $p_i = [(-1)^i,\ 1,\ i]$
  (b) $p_i = [1/i,\ 1/(i + 1),\ 1/(i + 3)]$
  (c) $p_i = [i^3,\ i^4,\ i^2]$

- [AIF-1] Um programa representa pontos de $\mathbb{T}^2$ usando coordenadas homogêneas **inteiras** no intervalo $[-M .. +M]$, onde $M = 2^{15} - 1$. Se p e q são tais pontos, quantos bits serão estritamente necessários para armazenar cada um dos coeficientes da reta $p \vee q$, sem risco de *overflow*?

- [AJA-1] Dê fórmulas ou algoritmos para resolver cada um dos seguintes problemas. (Dica: considere algoritmos condicionais, pois nem sempre existe uma única fórmula que funciona em todos os casos.)
  (a) Dada a reta $r = \langle \mathcal{W}, \mathcal{X}, \mathcal{Y} \rangle$, determinar um ponto p tal que $p \diamond r = 0$.
  (b) Dada a reta $r = \langle \mathcal{W}, \mathcal{X}, \mathcal{Y} \rangle$, determinar um ponto p tal que $p \diamond r = -1$.
  (c) Dado o ponto $p = [w, x, y]$, determinar uma reta r tal que $p \diamond r = -1$.
  (d) Dada a reta $r = \langle \mathcal{W}, \mathcal{X}, \mathcal{Y} \rangle$ e o ponto $p = [w, x, y]$ tais que $p \diamond r = 0$, determinar uma reta s tal que $r \wedge s = p$.

- [AMA-1] Determine os coeficientes homogêneos da reta L que divide cada um dos segmentos pq e rs em duas partes iguais, onde

$$\begin{array}{rcl} p & = & [1, 2, 3] \\ q & = & [1, 6, 7] \\ r & = & [2, 15, 11] \\ s & = & [3, 8, 6] \end{array} \tag{1}$$

- [AMB-1] Dê uma fórmula **sem divisões ou raízes quadradas** para determinar se um ponto $p = [w_p, x_p, y_p]$ está mais próximo do ponto $q = [w_q, x_q, y_q]$ do que do ponto $r = [w_r, x_r, y_r]$.

- [AMC-1] Determine o valor de r (se existir) para que a intersecção das retas $L(r)$ e $M(r)$ esteja na reta $N(r)$, onde

$$L(r) = \langle 1,\ 3r,\ 0\rangle \qquad M(r) = \langle 1,\ 2-3r,\ 1\rangle \qquad N(r) = \langle 1,\ 1,\ 2r\rangle$$

- [AMD-1] Um programa representa retas de $\mathbb{T}^2$ usando coeficientes homogêneos **inteiras** no intervalo $[-M.. + M]$, onde $M = 2^{15} - 1$. Se R e S são tais retas, quantos bits serão estritamente necessários para armazenar cada um dos coordenadas homogêneas do ponto $R \wedge S$, sem risco de *overflow*?

- [AMM-1] Escreva uma função em C **sem divisões ou raízes quadradas** que determina se um ponto $p = [w, x, y]$ com $w > 0$ está dentro do círculo **no aquém** de raio r com centro na origem.

2.2 Orientação no plano

- [AAV-1] Determine a orientação $\Delta(p, q, r)$ dos triângulos

(a) $p = [1, 0, 0]$ $q = [1, 2, 3]$ $r = [0, 1, 0]$ $\Delta(p, q, r) = \boxed{}$

(b) $p = [1, 1, 0]$ $q = [1, 0, 1]$ $r = [-1, 1, 1]$ $\Delta(p, q, r) = \boxed{}$

(c) $p = [1, 1, 1]$ $q = [0, 1, 1]$ $r = [0, 1, -1]$ $\Delta(p, q, r) = \boxed{}$

- [ABF-1] Determine o valor de t para que os três pontos $p(t), q(t), r(t)$ sejam colineares, sabendo-se que

$$p(t) = (t, 0) \qquad q(t) = (2-3t, 1) \qquad r(t) = (1, 2t)$$

- [ABK-1] Determine o valor de t para que os três pontos $p(t), q(t), r(t)$ sejam colineares, sabendo-se que

$$p(t) = (t, 0) \qquad q(t) = (2-3t, 1) \qquad r(t) = (1, 2t)$$

- [ACX-1] Determine a orientação $\Delta(p, q, r)$ dos triângulos abaixo.

(a) $p = [+1,\ \ 0,\ \ 0]$ $q = [+1, +3, +1]$ $r = [\ \ 0, +1,\ \ 0]$ $\Delta = \boxed{}$

(b) $p = [+1, +1,\ \ 0]$ $q = [+1,\ \ 0, +3]$ $r = [-1, +1, +1]$ $\Delta = \boxed{}$

(c) $p = [+1, -1, -1]$ $q = [\ \ 0, +1, +1]$ $r = [\ \ 0, -1, +1]$ $\Delta = \boxed{}$

- [AFD-1] Considere três pontos móveis p_0, p_1, p_2 no plano, cada qual se deslocando em linha reta com velocidade uniforme. Ou seja, as coordenadas cartesianas de p_i, num instante t quaisquer, são $(X_i, Y_i) + t(X'_i, Y'_i)$, onde X_i, Y_i, X'_i e Y'_i são constantes. Mostre como calcular o instante t^* em que esses três pontos estarão alinhados. Quantas soluções diferentes podem existir?

- [AFW-1] Considere três pontos móveis p_0, p_1, p_2 no plano, cada qual se deslocando em linha reta com velocidade uniforme. Ou seja, as coordenadas cartesianas de p_i, num instante t quaisquer, são $(X_i, Y_i) + t(X'_i, Y'_i)$, onde X_i, Y_i, X'_i e Y'_i são constantes. Mostre como calcular o instante t^* em que esses três pontos estarão alinhados. Quantas soluções diferentes podem existir?

- [AGP-1] Considere três pontos móveis p_0, p_1, p_2 no plano, cada qual se deslocando em linha reta com velocidade uniforme. Ou seja, as coordenadas cartesianas de p_i, num instante t quaisquer, são $(X_i, Y_i) + t(X'_i, Y'_i)$, onde X_i, Y_i, X'_i e Y'_i são constantes. Mostre como calcular o instante t^* em que esses três pontos estarão alinhados. Quantas soluções diferentes podem existir?

- [AHW-1] Considere as definições na liguagems C abaixo:

  ```
  typedef struct ponto_t { double w, x, y; } ponto_t
  typedef struct linha_t { double W, X, Y; } linha_t
  ```

  Escreva uma função **na linguagem C, com todas as declarações de parâmetros, variáveis e funções auxiliares que forem necessárias**, que determina se uma seqüência de pontos dados $p[0], p[1], \ldots, p[n-1]$ é um polígono convexo.

- [ALA-1] Considere três planetas A, B, C girando em torno de uma estrela, no mesmo plano e no mesmo sentido, com órbitas circulares centradas na estrela. As órbitas tem raios R_A, R_A, R_C, e são percorridas em T_A, T_B, T_C dias, respectivamente. Suponha que no instante $t = 0$ os três planetas estão alinhados com a estrela, todos no mesmo lado dela.

  Escreva um programa na linguagem C que, dados esses parâmetros, e dois instantes t_0 e t_1 (em dias), tenta encontrar todos os dias entre t_0 e t_1 quando os três planetas estarão alinhados. (Dica: considere a orientação dos três planetas no plano de suas órbitas, e suponha que os três planetas estarão alinhados em algum momento do dia t se essa orientação mudar entre o instante t e o instante $t + 1$.)

- [AMO-1] Escreva uma função em C que, dados quatro pontos p, q, r, s do plano, determina se o quadrilátero com vértices $pqrs$ (nessa ordem) é convexo.

2.3 Segmentos, localização e recorte 2D

- [AAB-1] Um *trapezóide* é um quadrilátero $p_1p_2p_4p_3$ no plano $\mathbb{R}^2$, tal que $p_i = (X_i, Y_i)$ com $Y_1 = Y_2 > Y_3 = Y_4$, $X_1 \leq X_2$, $X_3 \leq X_4$.

  Complete os buracos no algoritmo (parcial) abaixo. O algoritmo deve cortar um trapezóide T dado por uma reta dada não-horizontal $m = \langle \mathcal{W}, \mathcal{X}, \mathcal{Y} \rangle$ em dois polígonos

P (no lado positivo de m) e N (no lado negativo), e decompor cada pedaço em zero ou mais trapezóides disjuntos, devolvendo o resultado nas listas $\mathcal{P}$ e $\mathcal{N}$.

1. Se $\mathcal{X} < 0$ então

   Faça $t \leftarrow$ **true**.

   senão,

   Faça $t \leftarrow$ **false**.

2. Para $i = 1..4$, calcule $s_i \leftarrow$.
3. Se $s_1 \geq 0$ e $s_3 \geq 0$ então

   senão, se $s_1 > 0$ e $s_4 \geq 0$ então

   senão, se $s_1 > 0$ e $s_4 < 0$ então

   senão, se ... [*outros casos*]
4. Se $t =$ **true**, troque P com N.
5. Pare.

- [AHY-1] Dê um algoritmo para decidir se dois triângulos $p_0p_1p_2$ e $q_0q_1q_2$ do plano $\mathbb{T}^2$ se tocam ou se interceptam, dadas as coordenadas homogêneas dos seis vértices. O algoritmo deve usar o predicado do item anterior, e pode usar quaisquer operações *não geométricas* (operações booleanas, comparações, atribuições, comandos **for** e **if**, contadores — qualquer coisa que não envolva contas com as coordenadas dos pontos)

- [AAQ-1] Suponha que estão disponíveis as funções de biblioteca

  1. Join(p, q) que, dadas as coordenadas homogêneas p e q de dois pontos de $\mathbb{T}^2$, devolve os coeficientes da reta $p \vee q$;
  2. Cmp(M, N) que, dados os coeficientes M e N de duas retas de $\mathbb{T}^2$, devolve $+1$ se $M = N$, -1 se $M = \neg N$, e 0 nos demais casos;

  Mostre como testar, usando apenas estes dois procedimentos, se um ponto dado r pertence ao segmento (aberto) de $\mathbb{T}^2$ que liga dois pontos dados p e q, distintos e não antipodais. Você pode usar também operações lógicas (`&&`, `||`, etc.) e comparações (`==`, `>`, etc.), mas nenhuma outra função ou operação artimética.

- [AAZ-1] Quantos triângulos de $\mathbb{T}^2$ existem cujos vértices pertencem ao conjunto $\{a, b, c, d, e\}$, onde

  $a = [+1, -1, -1]$ $b = [+1, +1, -1]$ $c = [+1, -1, +1]$ $d = [+1, +1, +1]$ $e = [-1, -1, -1]$

  Desenhe cada um desses triângulos no modelo plano de $\mathbb{T}^2$, usando as convenções gráficas vistas em classe.

- [ABE-1] Quantos triângulos existem no plano $\mathbb{T}^2$ cujos vértices têm coordenadas cartesianas $(-1, 0)$, $(0, -2)$, e $(2, 3)$? Desenhe esses triângulos no modelo plano, usando as convenções gráficas vistas em classe.

- [ABJ-1] Quantos triângulos existem no plano $\mathbb{T}^2$ cujos vértices têm coordenadas cartesianas $(1, 0)$, $(0, 2)$, e $(2, 3)$? Desenhe esses triângulos no modelo plano, usando as convenções gráficas vistas em classe.

- [ABT-1]

  (a) Mostre algebricamente que $\Delta(a, b, c) = \Delta(a, b, p)$ para todo ponto p no interior do triângulo abc.

  (b) Usando o resultado acima, mostre que $\Delta(a, b, c) = \Delta(p, b, c)$ para todo ponto p no triângulo abc.

- [ABU-1] O segmento de $\mathbb{T}^2$ que liga $[-2, 2, 1]$ a $[2, 2, 1]$ cruza Ω no ponto

  A ☐ $[0, 1, 0]$
  B ☐ $[0, 2, 1]$
  C ☐ $[0, -2, -1]$
  D ☐ $[1, 0, 0]$
  E ☐ $[0, 1, -2]$

- [ADQ-1] Descreva um algoritmo que, dados quatro pontos p, q, r, s de $\mathbb{T}^2$, determina se os segmentos pq e rs se cruzam.

  O algoritmo deve usar apenas o teste de orientação de três pontos $\Delta(a, b, c)$, e comandos condicionais. Ignore casos-limite, como p, q, r colineares, etc. Dica: pense nas posições possíveis dos pontos em relação a $p \vee q$ e $r \vee s$.

- [ABY-1] Um ponto p_4 está no interior de um triângulo não-degenerado $p_1p_2p_3$ se e somente se $\Delta(p_i, p_j, p_k) = \Delta(p_1, p_2, p_3)$ para as seguintes combinações de i, j, k

  A ☐ $1,2,4;\ 1,3,4;\ 2,3,4$ B ☐ $1,2,4;\ 1,4,3;\ 4,2,3$

  C ☐ $1,2,4;\ 2,3,4;\ 3,1,4$ D ☐ $4,1,2;\ 1,4,3;\ 3,2,4$

  E ☐ $4,3,2;\ 2,1,4;\ 1,4,3$

- [ACA-1] Escreva um algoritmo que, dadas as coordenadas homogêneas dos vértices $(p_1, \ldots p_n)$ de um polígono convexo de $\mathbb{T}^2$, e um ponto q, determina se q está no interior de P.

- [ACB-1] Qual dos pontos abaixo está dentro do triângulo com vértices $[-1,0,1]$, $[1,1,0]$, $[-1,1,1]$

  A ☐ $[-1,1,-1]$
  B ☐ $[1,0,0]$
  C ☐ $[-1,0,0]$
  D ☐ $[1,1,1]$
  E ☐ $[1,-1,0]$

- [ACE-1] Quantos triângulos distintos e não degenerados existem cujos vértices pertencem ao conjunto

  $$\{\ a = [1,0,0],\quad b = [2,1,0],\quad c = [1,0,-1],\quad d = [-1,0,0],\quad e = [-2,-1,0]\ \}$$

  A ☐ 2 B ☐ 4 C ☐ 7 D ☐ 8 E ☐ 10

- [ACM-1] Um ponto p_4 está no interior de um triângulo não-degenerado $p_1p_2p_3$ se e somente se $\Delta(p_i, p_j, p_k) = \Delta(p_1, p_2, p_3)$ para as seguintes combinações de i, j, k

  A ☐ $1,2,4;\ 1,3,4;\ 2,3,4$ B ☐ $1,2,4;\ 1,4,3;\ 4,2,3$

  C ☐ $1,2,4;\ 2,3,4;\ 3,1,4$ D ☐ $4,1,2;\ 1,4,3;\ 3,2,4$

  E ☐ $4,3,2;\ 2,1,4;\ 1,4,3$

- [ACO-1] Escreva um algoritmo que, dadas as coordenadas homogêneas dos vértices $(p_1, \ldots p_n)$ de um polígono convexo de $\mathbb{T}^2$, e um ponto q, determina se q está no interior de P.

- [ACQ-1] Descreva um algoritmo que, dados quatro pontos p, q, r, s de $\mathbb{T}^2$, determina se os segmentos pq e rs se cruzam.

  O algoritmo deve usar apenas o teste de orientação de três pontos $\Delta(a, b, c)$, e comandos condicionais. Ignore casos-limite, como p, q, r colineares, etc. Dica: pense nas posições possíveis dos pontos em relação a $p \vee q$ e $r \vee s$.

- [ADB-1] Quantos triângulos de $\mathbb{T}^2$ existem cujos vértices pertencem ao conjunto $\{a, b, c, d, e\}$, onde

$$\begin{aligned} a &= [+1, -1, -1] \\ b &= [+1, +1, -1] \\ c &= [+1, -1, +1] \\ d &= [+1, +1, +1] \\ e &= [-1, -1, -1] \end{aligned}$$

  Desenhe cada um desses triângulos no modelo plano de $\mathbb{T}^2$, usando as convenções gráficas vistas em classe.

- [ADK-1] (a) Mostre algebricamente que $\Delta(a, b, c) = \Delta(a, b, p)$ para todo ponto p no interior do triângulo abc.

  (b) Usando o resultado acima, mostre que $\Delta(a, b, c) = \Delta(p, b, c)$ para todo ponto p no triângulo abc.

- [ADS-1] Escreva um algoritmo para testar se dois triângulos com vértices p, q, r e a, b, c, respectivamente, se cruzam, usando as operações da geometria projetiva vistas em classe. (Dica: dois triângulos são disjuntos se e somente se existe uma reta que os separa e contém um se seus lados.)

- [ADY-1] Escreva um algoritmo que, dadas as coordenadas *homogêneas* dos vértices $(p_1, .. p_n)$ de um polígono convexo P de $\mathbb{T}^2$, e um ponto q de $\mathbb{T}^2$, determina se p está no interior de P.

- [AEY-1] (a) Mostre algebricamente que $\Delta(a, b, c) = \Delta(a, b, p)$ para todo ponto p no interior do triângulo abc.

  (b) Usando o resultado acima, mostre que $\Delta(a, b, c) = \Delta(p, b, c)$ para todo ponto p no triângulo abc.

- [AEZ-1] Em cada um dos casos abaixo, desenhe o triângulo $p_0\,p_1\,p_2$, indicando seu interior com a convenção usual (hachurado no aquém, pontilhado no além):

  (a) $p_0 = [1, 1, 0]$ $p_1 = [1, 0, 1]$ $p_2 = [-1, 1, 1]$.

  (b) $p_0 = [1, 1, 0]$ $p_1 = [0, 0, 1]$ $p_2 = [-1, 1, 0]$.

- [AFS-1] Em cada um dos casos abaixo, desenhe o triângulo $p_0\,p_1\,p_2$, indicando seu interior com a convenção usual (hachurado no aquém, pontilhado no além):

  (a) $p_0 = [1, 1, 0]$ $p_1 = [1, 0, 2]$ $p_2 = [-1, 1, 1]$.

  (b) $p_0 = [1, 1, 0]$ $p_1 = [0, 0, 1]$ $p_2 = [-1, 1, 0]$.

- [AGL-1] Em cada um dos casos abaixo, desenhe o triângulo $p_0\,p_1\,p_2$, indicando seu interior com a convenção usual (hachurado no aquém, pontilhado no além):

  (a) $p_0 = [1, 1, 0]$ $p_1 = [1, 0, 1]$ $p_2 = [-1, 1, 1]$.

  (b) $p_0 = [1, 1, 0]$ $p_1 = [0, 0, 1]$ $p_2 = [-1, 1, 0]$.

- [AII-1] Determine o ponto onde o segmento de $\mathbb{T}^2$ que liga $[-2, 2, 1]$ a $[2, 2, 1]$ cruza a reta Ω.

- [AHE-1] Sejam p, q, r três pontos do plano projetivo orietnado, e u um ponto no segmento pq. Mostre que $\Delta(u, q, r) = \Delta(p, q, r)$. (Dica: use as definições e as propriedades de determinantes.)

- [AHK-1] Escreva um algoritmo que determina se um ponto dado u está dentro de um quadrilátero convexo com vértices p, q, r, s dados, usando as operações da geometria projetiva orientada vistas em classe.

- [AHO-1] Um polígono no plano projetivo orientado $\mathbb{T}^2$ é definido pela lista $(v_0, v_1, \ldots, v_{n-1})$, circular e ordenada, de seus vértices. Diz-se que tal polígono é *convexo* se ele está todo no lado positivo de qualquer reta que passa por dois vértices consecutivos. Sejam p, q, r, s os vértices de um quadrilátero em $\mathbb{T}^2$.

  (a) Escreva um algoritmo para verificar se o quadrilátero (p, q, r, s) é convexo.

  (b) Supondo que o quadrilátero (p, q, r, s) é convexo, escreva um algoritmo para verificar se um ponto dado u está no interior do mesmo.

- [AKU-1] Em cada um dos casos abaixo, desenhe o triângulo pqr, segundo as convenções gráficas vistas em classe.

  (a) $p = [1, 0, 0]$ $q = [1, 2, 3]$ $r = [1, 1, 0]$.

  (b) $p = [1, 1, 0]$ $q = [2, 0, 2]$ $r = [0, 1, 1]$.

  (c) $p = [1, 1, 1]$ $q = [0, 1, 1]$ $r = [0, 1, -2]$.

- [ALB-1] Escreva uma função que, dados quatro pontos p, q, r, s do plano, determina se o segmento pq cruza o segmento rs.

- [ALD-1] Seja $(v_0, v_1, \ldots, v_{n-1})$ a lista dos vértices de um polígono P no plano $\mathbb{T}^2$, em ordem anti-horária. (a) Escreva uma função em C para verificar se o polígono P é convexo.

  (b) Supondo que o polígono P é convexo, escreva uma função em C para verificar se um ponto dado u está no interior do mesmo.

2.4 Transformações do plano

- [AAH-1] O círculo unitário $\mathbb{S}_1$ é o conjunto $\{\, (X, Y) \;:\; X^2 + Y^2 = 1 \,\}$. Para todo real a com $|a| < 1$, existe uma transformação projetiva do plano $\mathbb{T}^2$ que leva os pontos de $\mathbb{S}_1$ para pontos de $\mathbb{S}_1$, e leva a origem $(0, 0)$ para o ponto $(0, a)$. Determine a matriz dessa transformação.

(Dica: os efeitos da transformação devem ser simétricos em torno do eixo x, e portanto ela deve levar retas verticais para retas verticais.)

M = $\boxed{}$

- [AAY-1] Determine uma matriz 3×3 da transfomação de **similaridade** positiva F que mantém o ponto $p = [1, 2, 3]$ fixo, e leva a reta $r = \langle 1, 2, 3\rangle$ para $r' = \langle 1, 1, 0\rangle$. (Dicas: (1) Determine primeiro um ponto qualquer de r e sua imagem em r' sob F. (2) Uma similaridade preserva ângulos e proporções.)

- [ABB-1] Considere o hexágono H no aquém cujos vértices (em coordenadas cartesianas) são

$$\begin{array}{ccc} (+2, -1) & (+4, 0) & (+2, +1) \\ (-2, +1) & (-4, 0) & (-2, -1) \end{array}$$

  (a) Determine uma transformação afim de $\mathbb{T}^2$ que transforma H num hexágono regular.

  (b) Determine todas as 12 transformações afins de $\mathbb{T}^2$ que levam H para H.

- [ABC-1] Determine a matriz da transformação afim que leva

$$p = [1, 2, 3] \qquad q = [1, 4, 0] \qquad r = [1, 0, 4]$$

  para, respectivamente,

$$p' = [1, 2, 0] \qquad q' = [1, -1, 1] \qquad r' = [1, -1, -1]$$

- [ABG-1] Uma *simetria* de um conjunto de pontos P é uma isometria (movimento rígido) que leva P para P.

  Determine todas as 12 simetrias de um hexágono regular com centro no ponto $(1, 2)$ e com um lado paralelo ao eixo X. (Dica: o produto de duas simetrias é uma simetria.)

- [ABH-1] Determine a matriz da transformação afim que leva

$$p = [1, 2, 3] \qquad q = [1, 4, 0] \qquad r = [1, 0, 4]$$

  para, respectivamente,

$$p' = [1, 2, 0] \qquad q' = [1, -1, 1] \qquad r' = [1, -1, -1]$$

- [ABM-1] Uma *simetria* de um conjunto de pontos P é uma isometria (movimento rígido) que leva P para P.

  Determine todas as 12 simetrias de um hexágono regular com centro no ponto $(1,2)$ e com um lado paralelo ao eixo X. (Dica: o produto de duas simetrias é uma simetria.)

- [ABN-1] Determine a matriz da transformação afim que leva

  $$[1,2,3],\ [1,4,0],\ [1,0,4]$$

  para, respectivamente,

  $$[1,2,0],[1,-1,1],[1,-1,-1]$$

- [ABR-1] Encontre uma transformação projetiva que leve o quadrilátero *abcd* para o quadrilátero *abcd′*, onde

  $$a=[1,0,0] \quad b=[0,1,0] \quad c=[0,0,1] \quad d=[1,1,1] \quad d'=[w,x,y]$$

  onde $[w,x,y]$ é um ponto genérico de $\mathbb{T}^2$.

- [ABV-1] Seja $c=\cos 30°$, $s=\sin 30°$, $\bar{c}=-c$, $\bar{s}=-s$. A matriz que roda $\mathbb{T}^2$ de $30°$ em torno da origem é

  A ☐ $\begin{bmatrix} c & \bar{s} & 0 \\ s & c & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ B ☐ $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & c & \bar{s} \\ 0 & s & c \end{bmatrix}$

  C ☐ $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & c & s \\ 0 & \bar{s} & c \end{bmatrix}$ D ☐ $\begin{bmatrix} 1 & s & \bar{s} \\ \bar{s} & c & s \\ s & \bar{s} & c \end{bmatrix}$

  E ☐ $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & c & s \\ 0 & \bar{s} & c \end{bmatrix}$

- [ABZ-1] Considere o quadrilátero Q no aquém cujos vértices (em coordenadas cartesianas) são

  $$\begin{matrix} [1,0,0] & [1,1,0] \\ [1,3,2] & [1,0,1] \end{matrix}$$

  (a) Determine uma transformação afim de $\mathbb{T}^2$ que transforma Q num quadrado.

  (b) Determine todas as 8 transformações afins de $\mathbb{T}^2$ que levam Q para Q.

- [ACD-1] Seja $r = \sqrt{2}/2$, $\bar{r} = -r$, $\bar{4} = -4$. Qual das transformações projetivas abaixo preserva ângulos:

A ☐ $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$ B ☐ $\begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & \bar{4} \\ 0 & 4 & 3 \end{bmatrix}$

C ☐ $\begin{bmatrix} r & r & 0 \\ \bar{r} & r & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ D ☐ $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$

E ☐ $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & r & \bar{r} \\ 0 & \bar{r} & r \end{bmatrix}$

- [ACJ-1] Seja $c = \cos 30°$, $s = \sin 30°$, $\bar{c} = -c$, $\bar{s} = -s$. A matriz que roda $\mathbb{T}^2$ de 30° em torno da origem é

A ☐ $\begin{bmatrix} c & \bar{s} & 0 \\ s & c & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ B ☐ $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & c & \bar{s} \\ 0 & s & c \end{bmatrix}$

C ☐ $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & c & s \\ 0 & \bar{s} & c \end{bmatrix}$ D ☐ $\begin{bmatrix} 1 & s & \bar{s} \\ \bar{s} & c & s \\ s & \bar{s} & c \end{bmatrix}$

E ☐ $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & c & s \\ 0 & \bar{s} & c \end{bmatrix}$

- [ACN-1] Considere o quadrilátero Q no aquém cujos vértices (em coordenadas cartesianas) são

$$\begin{array}{cc} [1,0,0] & [1,1,0] \\ [1,3,2] & [1,0,1] \end{array}$$

  (a) Determine uma transformação afim de $\mathbb{T}^2$ que transforma Q num quadrado.

  (b) Determine todas as 8 transformações afins de $\mathbb{T}^2$ que levam Q para Q.

- [ADA-1] Determine uma matriz 3×3 da transfomação de **similaridade** positiva F que mantém o ponto $p = [1, 2, 3]$ fixo, e leva a reta $r = \langle 1, 2, 3\rangle$ para $r' = \langle 1, 1, 0\rangle$. (Dicas: (1) Determine primeiro um ponto qualquer de r e sua imagem em r' sob F. (2) Uma similaridade preserva ângulos e proporções.)

- [ADD-1] Determine a matriz da transformação afim que leva

$$p = [1, 2, 3] \qquad q = [1, 4, 0] \qquad r = [1, 0, 4]$$

para, respectivamente,

$$p' = [1, 2, 0] \qquad q' = [1, -1, 1] \qquad r' = [1, -1, -1]$$

- [ADE-1] Considere o hexágono H no aquém cujos vértices (em coordenadas cartesianas) são

$$\begin{array}{ccc} (+2,-1) & (+4,0) & (+2,+1) \\ (-2,+1) & (-4,0) & (-2,-1) \end{array}$$

  (a) Determine uma transformação afim de $\mathbb{T}^2$ que transforma H num hexágono regular.

  (b) Determine todas as 12 transformações afins de $\mathbb{T}^2$ que levam H para H.

- [ADI-1] Encontre uma transformação projetiva que leve o quadrilátero $abcd$ para o quadrilátero $abcd'$, onde

$$a = [1,0,0] \quad b = [0,1,0] \quad c = [0,0,1] \quad d = [1,1,1] \quad d' = [w,x,y]$$

  onde $[w,x,y]$ é um ponto genérico de $\mathbb{T}^2$.

- [ADV-1] Determine a matriz da transformação afim que leva

$$p = [1,0,1] \qquad q = [0,1,1] \qquad r = [0,0,1]$$

  para, respectivamente,

$$p' = [2,3,1] \qquad q' = [1,5,1] \qquad r' = [1,1,2]$$

- [ADX-1] Considere o quadrilátero convexo Q no aquém cujos vértices (em coordenadas cartesianas) são

$$p = (0,1) \qquad q = (2,3) \qquad r = (0,0) \qquad s = (1,0)$$

  (a) Determine uma transformação afim de $\mathbb{T}^2$ que transforma Q num quadrado.

  (b) Determine todas as 8 transformações afins de $\mathbb{T}^2$ que levam Q para Q.

- [AEW-1] Encontre uma transformação projetiva que leve o quadrilátero $abcd$ para o quadrilátero $abcd'$, onde

$$a = [1,0,0] \quad b = [0,1,0] \quad c = [0,0,1] \quad d = [1,1,1] \quad d' = [w,x,y]$$

  onde $[w,x,y]$ é um ponto genérico de $\mathbb{T}^2$.

- [AFI-1] Dê a matriz de transformaçào projetiva do plano $\mathbb{T}^2$ que, no aquém, efetua uma rotação de 45 graus anti-horários em torno do ponto $[3,4,2]$.

- [AHI-1] Seja M a transformação projetiva definida pela matriz

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & -2 \end{bmatrix}$$

  (a) Determine a imagem do ponto $p = [1,3,4]$ sob M.

  (b) Determine a imagem da reta $R = \langle 1,2,3 \rangle$ sob M.

- [AHU-1] Escreva a matriz projetiva de $\mathbb{T}^2$ que transforma o quadrado $(\pm 1, \pm 1)$ no retângulo $[2 \_ 6] \times [3 \_ 5]$, mantendo a posição relativa (esquerda-direita e alto-baixo) dos quatro lados.

- [AJB-1] Considere o paralelogramo P no aquém cujos vértices, em coordenadas cartesianas e ordem anti-horária, são $a = (+2, -1)$, $b = (+4, 0)$, $c = (+3, +1)$, e $d = (+1, 0)$.

  (a) Determine uma transformação afim de $\mathbb{T}^2$ que transforma P em um quadrado de lado 1.

  (b) Determine todas as 8 transformações afins de $\mathbb{T}^2$ que levam P para P.

- [AJC-1] Seja $c = \cos 30°$, $s = \sin 30°$, $\bar{c} = -c$, $\bar{s} = -s$. A matriz que roda $\mathbb{T}^2$ de $30°$ em torno da origem é

  A ☐ $\begin{bmatrix} c & \bar{s} & 0 \\ s & c & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ B ☐ $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & c & \bar{s} \\ 0 & s & c \end{bmatrix}$

  C ☐ $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & c & s \\ 0 & \bar{s} & c \end{bmatrix}$ D ☐ $\begin{bmatrix} 1 & s & \bar{s} \\ \bar{s} & c & s \\ s & \bar{s} & c \end{bmatrix}$

  E ☐ $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \bar{c} & s \\ 0 & s & c \end{bmatrix}$ F ☐ $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & c & s \\ 0 & s & \bar{c} \end{bmatrix}$

- [AKA-1] Considere o hexágono H no aquém cujos vértices (em coordenadas cartesianas) são

$$\begin{matrix} (+2,-1) & (+4,0) & (+2,+1) \\ (-2,+1) & (-4,0) & (-2,-1) \end{matrix}$$

  (a) Determine uma transformação afim de $\mathbb{T}^2$ que transforma H num hexágono regular.

  (b) Determine todas as 12 transformações afins de $\mathbb{T}^2$ que levam H para H.

- [AKD-1]

  (a) Escreva a matriz projetiva de $\mathbb{T}^2$ que transforma o quadrado $(\pm 1, \pm 1)$ no retângulo $[2 \_ 6] \times [3 \_ 5]$, mantendo a posição relativa (esquerda-direita e alto-baixo) dos quatro lados.

  (b) Encontre uma matriz de rotação R de $\mathbb{T}^3$ que leva a direção $(0, 0, 1)$ do $\mathbb{R}^3$ para a direção do vetor $(1, 1, 1)$. (Nota: a solução não é única.)

3 Geometria tridimensional

3.1 Pontos e planos

- [ABD-1] Considere os 8 pontos do $\mathbb{R}^3$ com coordenadas cartesianas

  $$v_i = (\cos(i\theta),\, \sin(i\theta), \sin(2i\theta)) \quad i = 0, 1, \ldots, 7$$

  onde $\theta = 2\pi/8 = \pi/4$.

  (a) Determine as coordenadas homogêneas desses 8 pontos.

  (b) Desenhe esquematicamente o (único) poliedro convexo do $\mathbb{R}^3$ com esses 8 vértices.

  (c) Escolha uma face deste poliedro e determine os coeficientes homogêneos do plano que contém essa face.

- [ABI-1] Uma maneira de construir um icosaedro regular é construir o menor poliedro convexo que envolve os três retângulos

  $$A = (\pm 1, \pm\phi, 0) \qquad B = (0, \pm 1, \pm\phi) \qquad C = (\pm\phi, 0, \pm 1)$$

  onde ϕ é a "razão de ouro" $(1 + \sqrt{5})/2 = 1.618\ldots$.

  Escolha uma face deste icosaedro e determine os coeficientes do plano que contém essa face. (Dica: desenhe primeiro os três retângulos no espaço $\mathbb{R}^3$, e determine visualmente as faces do poliedro.)

- [ABO-1] Uma maneira de construir um icosaedro regular é construir o menor poliedro convexo que envolve os três retângulos

  $$A = (\pm 1, \pm\phi, 0) \qquad B = (0, \pm 1, \pm\phi) \qquad C = (\pm\phi, 0, \pm 1)$$

  onde ϕ é a "razão de ouro" $(1 + \sqrt{5})/2$.

  Escolha uma face deste icosaedro e determine os coeficientes do plano que contém essa face. (Dica: desenhe primeiro os três retângulos no espaço $\mathbb{R}^3$.)

- [ACT-1] Considere os 12 pontos do $\mathbb{R}^3$ com coordenadas cartesianas

  $$(0, \pm 1, \pm 2) \quad (\pm 1, \pm 2, 0) \quad (\pm 2, 0, \pm 1)$$

  (a) Desenhe esquematicamente o (único) poliedro convexo do $\mathbb{R}^3$ com esses 12 vértices.

  (b) Escolha uma face deste poliedro e determine os coeficientes homogêneos do plano que a contém. (Mostre as contas.)

- [ACU-1] Dê uma fórmula **sem divisões** para determinar se o ponto $p = [w, x, y, z]$ do aquém de $\mathbb{T}^3$ está dentro da esfera de raio r com centro na origem.

- [ADN-1] Dê uma fórmula **sem divisões e sem raízes quadradas** para determinar se o ponto $p = [w, x, y, z]$ de $\mathbb{T}^3$ está dentro da esfera de raio r com centro no ponto $(2, 3, 4)$ do aquém.

- [AFA-1] Calcule os coeficientes do plano que passa pelos três pontos $p_0 = [1, 2, 3, 4]$, $p_1 = [1, 1, 1, 1]$, $p_2 = [1, 3, 2, 4]$.
- [AFC-1] Determine as condições sobre os coeficientes de dois planos $\pi_1 = \langle \mathcal{W}_1, \mathcal{X}_1, \mathcal{Y}_1, \mathcal{Z}_1 \rangle$ e $\pi_2 = \langle \mathcal{W}_2, \mathcal{X}_2, \mathcal{Y}_2, \mathcal{Z}_2 \rangle$ que equivalem a dizer que os planos são
  (a) finitos e paralelos entre si.
  (b) finitos e perpendiculares entre si.
- [AFT-1] Calcule os coeficientes do plano que passa pelos três pontos $p_0 = [1, 2, 3, 4]$, $p_1 = [1, 1, 1, 1]$, $p_2 = [1, 3, 2, 4]$.
- [AFV-1] Determine as condições sobre os coeficientes de dois planos $\pi_1 = \langle \mathcal{W}_1, \mathcal{X}_1, \mathcal{Y}_1, \mathcal{Z}_1 \rangle$ e $\pi_2 = \langle \mathcal{W}_2, \mathcal{X}_2, \mathcal{Y}_2, \mathcal{Z}_2 \rangle$ que equivalem a dizer que os planos:
  (a) são finitos e paralelos entre si
  (b) são finitos e perpendiculares entre si
  (c) são finitos, paralelos ao eixo Z e perpendiculares entre si
- [AGB-1] Determine os coeficientes homogêneos do plano de $\mathbb{T}^3$ que é paralelo aos vetores cartesianos $(1, 2, 3)$ e $(3, 2, 1)$, e passa pelo ponto $(1, 2, 4)$.
- [AGM-1] Calcule os coeficientes do plano que passa pelos três pontos $p_0 = [1, 2, 3, 4]$, $p_1 = [1, 1, 1, 1]$, $p_2 = [1, 3, 2, 4]$.
- [AGO-1] Determine as condições sobre os coeficientes de dois planos $\pi_1 = \langle \mathcal{W}_1, \mathcal{X}_1, \mathcal{Y}_1, \mathcal{Z}_1 \rangle$ e $\pi_2 = \langle \mathcal{W}_2, \mathcal{X}_2, \mathcal{Y}_2, \mathcal{Z}_2 \rangle$ que equivalem a dizer que os planos são
  (a) finitos e paralelos entre si.
  (b) finitos e perpendiculares entre si.
- [AHR-1] Determine os coeficientes homogêneos de um plano P de $\mathbb{T}^3$ que é perpendicular ao vetor cartesiano $(+1, +2, -3)$ que passa pelo ponto com coordenadas homogêneas $[2, 3, 5, 3]$.
- [AHS-1] Determine os coeficientes homogêneos de um plano P de $\mathbb{T}^3$ que passa pelos pontos $[2, 0, 1, 0]$, $[2, 3, 0, 0]$, e $[1, 0, 0, 3]$.
- [AHT-1] Determine os coeficientes homogêneos de um ponto p de $\mathbb{T}^3$ onde a reta R com equações cartesianas $X = Y = 2Z$ cruza o plano $\langle 2, 3, 4, 5 \rangle$.
- [AKB-1] Considere os 8 pontos do $\mathbb{R}^3$ com coordenadas cartesianas
  $$v_i = (\cos(i\theta),\ \sin(i\theta), \sin(2i\theta)) \quad i = 0, 1, \ldots, 7$$
  onde $\theta = 2\pi/8 = \pi/4$.
  (a) Determine as coordenadas homogêneas desses 8 pontos.
  (b) Desenhe esquematicamente o (único) poliedro convexo do $\mathbb{R}^3$ com esses 8 vértices.
  (c) Escolha uma face deste poliedro e determine os coeficientes homogêneos do plano que contém essa face.

- [APA-1] Considere o segmento no $\mathbb{T}^3$ com extremos $a = [1, 1, 0, 1]$ e $b = [5, 9, 3, 2]$

  (a) Determine o comprimento do segmento ab.

  (b) Determine os coeficientes homogêneos do plano perpendicular ao segmento ab que o divide em dois segmentos iguais.

- [APB-1] Suponha que p e q são pontos dados do aquém de $\mathbb{T}^3$ representados pelas suas coordenadas homogêneas, e r e s são números reais positivos dados. Dê uma fórmula **sem divisões e sem raízes quadradas** para determinar se a esfera S com centro p e raio r está dentro da esfera R de centro q e raio s.

- [APC-1] Determine os coeficientes do plano de $\mathbb{T}^3$ que passa pelo ponto cartesiano (X, Y, Z) dado, é paralelo ao eixo cartesiano X, e faz um ângulo θ dado com o eixo Y.

3.2 Orientação no espaço

3.3 Segmentos, localização e recorte 3D

- [AAC-1] Escreva um algoritmo para calcular as partes visíveis de uma cena formada por polígonos planos, usando os seguintes recursos:

  1. Uma representação da cena na forma de uma árvore BSP (partição binária do espaço);
  2. Um procedimento $\mathit{Trans}(P, M)$ que aplica uma transformação de perspectiva M a um polígono P de $\mathbb{T}^3$;
  3. Um procedimento $\mathit{Poda}(P, V)$ que calcula a intersecção de um polígono P de $\mathbb{T}^3$ com um paralelepípedo V alinhado com os eixos;
  4. Um procedimento $\mathit{Proj}(P)$ que projeta o polígono P de $\mathbb{T}^3$ sobre o plano $Z = 0$;
  5. Um procedimento $\mathit{Lev}(P, \pi)$ que, dado um polígono P no plano $Z = 0$, e um plano π de $\mathbb{T}^3$, devolve um polígono P' no plano π tal que $\mathit{Proj}(P') = P$;
  6. Procedimentos $\mathit{Uni}(P, Q)$, $\mathit{Dif}(P, Q)$, e $\mathit{Int}(P, Q)$, que, dados dois polígonos no plano $\mathbb{T}^2$, devolvem respectivamente os polígonos $P \cup Q$, $P \setminus Q$, e $P \cap Q$;

  O algoritmo deve ser escrito na forma de um procedimento recursivo $\mathit{Visib}(A, V, o, R)$, que recebe como dados

  1. Uma sub-árvore A da árvore BSP da cena;
  2. O paralelepípedo da imagem V, no sistema SI;
  3. As coordenadas do observador o, no sistema SC;
  4. Um polígono-janela R no plano $Z = 0$;

  O procedimento deve devolver como resultados

1. Uma lista S das partes dos polígonos de A que são visíveis a partir de o e cuja projeção no plano da imagem cai dentro do polígono R;
2. Um polígono K que é a união das projeções de todos os polígonos em S.

- [AAO-1] Escreva um algoritmo para calcular as partes visíveis de uma cena formada por polígonos planos, usando as seguintes funções de biblioteca:

 1. $\mathit{Trans}(P, \mathsf{M})$ que aplica a transformação de perspectiva com matriz M a um polígono P de $\mathbb{T}^3$, e devolve o polígono resultante;
 2. $\mathit{Poda}(P, V)$ que devolve a intersecção de um polígono P de $\mathbb{T}^3$ com um paralelepípedo V alinhado com os eixos;
 3. $\mathit{Corta}(P, \pi)$ que corta um polígono P no espaço $\mathbb{T}^3$ por um plano orientado π, e devolve os dois pedaços P^+, P^- de P, respectivamente no lado positivo e negativo de π.
 4. $\mathit{Proj}(P)$ que devolve a projeção do polígono P de $\mathbb{T}^3$ sobre o plano $Z = 0$;
 5. $\mathit{Lev}(P, \pi)$ que, dado um polígono P no plano $Z = 0$, e um plano π de $\mathbb{T}^3$, devolve um polígono P' no plano π tal que $\mathit{Proj}(P') = P$;
 6. $\mathit{Uni}(P, Q)$, $\mathit{Dif}(P, Q)$, e $\mathit{Int}(P, Q)$, que, dados dois polígonos no plano $\mathbb{T}^2$, devolvem respectivamente os polígonos $P \cup Q$, $P \setminus Q$, e $P \cap Q$;

 O algoritmo deve ser escrito na forma de um procedimento $\mathit{Visib}(L, V, o, R, M)$, que recebe como dados

 1. A lista L dos polígonos da cena;
 2. O paralelepípedo da imagem V, no sistema SI;
 3. As coordenadas do observador o, no sistema SC;
 4. Um polígono-janela R no plano $Z = 0$;
 5. A matriz M da transformaçào de perspectiva.

 O procedimento deve devolver como resultado uma lista S das partes dos polígonos de A que são visíveis a partir de o.

- [AAW-1] Sejam

$$
\begin{aligned}
C &= \text{ o cubo com vértices } [1, \pm 1, \pm 1, \pm 1], \\
H &= \text{ o semi-espaço positivo do plano } \pi = \langle 5, -2, -3, -5 \rangle, \\
R &= \text{ o poliedro } C \cap H.
\end{aligned}
$$

 (a) O poliedro R é convexo? (Jusifique a resposta.)

 (b) Determine os vértices de R.

- [ABX-1] Qual é o número máximo de lados do polígono que é a intersecção de um quadrilátero plano convexo do $\mathbb{T}^3$ com um tetraedro?

  A ☐ 6 B ☐ 7 C ☐ 8 D ☐ 9 E ☐ 10

- [ACH-1] (a) Escreva um algoritmo que, dadas as coordenadas homogêneas de dois pontos p e q de $\mathbb{T}^3$, e um plano π, determina a parte do segmento pq que está no lado positivo de π.

  (b) Seja C o cubo cujos vértices têm coordenadas cartesianas $(\pm 1, \pm 1, \pm 1)$, e sejam τ, σ dois planos paralelos. Escreva um algoritmo que determina todos os vértices da fatia de C que está contida entre os dois planos.

- [ACL-1] Qual é o número máximo de lados de um polígono que é intersecção de um quadrilátero plano convexo do $\mathbb{T}^3$ com um tetraedro?

  A ☐ 6 B ☐ 7 C ☐ 8 D ☐ 9 E ☐ 10

- [ACS-1] Seja C o cubo com vértices $[2, \pm 3, \pm 3, \pm 3]$. Sejam $p = [4, 1, 2, 0]$ e $q = [3, 2, 7, 1]$.

  (a) Escreva os coeficientes dos planos das faces de C

  (b) Determine a parte do segmento pq que está dentro de C, usando o algoritmo visto em classe. (Mostre as contas.)

- [ACY-1] Sejam

  $$\begin{aligned} C = &\ \text{o cubo com vértices } [1, \pm 1, \pm 1, \pm 1], \\ H = &\ \text{o semi-espaço positivo do plano } \pi = \langle 5, -2, -3, -5 \rangle, \\ R = &\ \text{o poliedro } C \cap H. \end{aligned}$$

  (a) O poliedro R é convexo? (Justifique a resposta.)

  (b) Determine os vértices de R.

- [ADF-1] Considere os 8 pontos do $\mathbb{R}^3$ com coordenadas cartesianas

  $$v_i = (\cos(i\theta), \sin(i\theta), \cos(2i\theta)) \quad i = 0, 1, \ldots, 7$$

  onde $\theta = 2\pi/8 = \pi/4$.

  (a) Determine as coordenadas homogêneas desses 8 pontos.

  (b) Desenhe esquematicamente o (único) poliedro convexo do $\mathbb{R}^3$ com esses 8 vértices.

  (c) Escolha uma face deste poliedro e determine os coeficientes homogêneos do plano que contém essa face.

- [ADM-1] Seja C o cubo com vértices $[3, \pm 2, \pm 2, \pm 2]$. Sejam $p = [4, 1, 2, 0]$ e $q = [3, 2, 5, 1]$.

  (a) Escreva os coeficientes dos planos das faces de C

  (b) Determine a parte do segmento pq que está dentro de C, usando o algoritmo visto em classe. (Mostre as contas.)

- [ADO-1] Dê fórmulas para calcular cada um dos elementos geométricos abaixo.

  Sua resposta pode usar apenas as operações geométricas básicas de $\mathbb{T}^3$ ($\vee$, $\wedge$, $\diamond$, Δ, $\neg$), e/ou operações algébricas comuns sobre as coordenadas homogêneas $p.w$, $p.x$, $p.y$ de qualquer ponto p, ou os coeficientes homogêneos $\pi.\mathcal{W}$, $\pi.\mathcal{X}$, $\pi.\mathcal{Y}$ de qualquer plano π. Em todos os itens, suponha que os pontos dados estão no aquém.

  (a) O ponto médio $\mathrm{smed}(p, q)$ do segmento pq.

  (b) Um ponto no infinito $\mathrm{sinf}(p, q)$, numa direção perpendicular à do segmento pq.

  (c) A reta mediatriz $\mathrm{sper}(p, q)$ perpendicular ao segmento pq.

  (d) o centro $\mathrm{tcen}(p, q, r)$ do círculo que passa pelos três pontos pqr.

- [ADR-1] Considere os 12 pontos do $\mathbb{R}^3$ com coordenadas cartesianas

  $$(0, \pm 3, \pm 2) \quad (\pm 3, \pm 2, 0) \quad (\pm 2, 0, \pm 3)$$

  (a) Desenhe esquematicamente o (único) poliedro convexo do $\mathbb{R}^3$ com esses 12 vértices.

  (b) Escolha uma face deste poliedro e determine os coeficientes homogêneos do plano que a contém. (Mostre as contas.)

- [ADU-1] Na questão abaixo, pede-se um procedimento em C ou Pascal. Suponha definidos os seguintes tipos e procedimentos auxiliares:

```
/* C */                             { Pascal }
#include <math.h>
typedef double[4][4] matrix;        type matrix = array[0..3,0..3] of real;
typedef double[4] point;            type point = array[0..3] of real;
typedef double[3] vector;           type vector = array[0..2] of real;
/* Produto escalar: */              { Produto escalar: }
float dot(vector u, vector v);      function dot(u, v: vector): real;
/* Produto vetorial: */             { Produto vetorial: }
vector cross(vector u, vector v);   procedure cross(u, v: vector; var w: vector);
/* Vetor unitário: */               { Vetor unitário: }
vector dir(vector v);               procedure dir(v: vector; var w: vector);
/* Diferença de vetores: */         { Diferença de vetores: }
vector sub(vector u, vector v);     procedure sub(u, v: vector; var w: vector);
/* Produto de matrizes: */          { Produto de matrizes: }
matrix mul(matrix A, matrix B);     procedure mul(A, B: matrix; var C: matrix);
```

  (a) Escreva um procedimento C ou Pascal que, dados as coordenadas homogêneas dos vértices de um polígono convexo P no espaço $\mathbb{T}^3$, e um plano α, devolve os vértices da parte de P que está no lado positivo do plano α.

(b) Supondo resolvido o ítem (a), escreva um procedimento que, dado um polígono convexo P, devolve a parte de P que está dentro do cubo com lados paralelos aos eixos, centro na origem, e lado 2.

- [ADW-1] Considere o menor poliedro convexo P que contém estes 12 pontos:

$$A = [\pm 1, \pm 2, 0, 1] \qquad B = [0, \pm 1, \pm 2, 1] \qquad C = [\pm 2, 0, \pm 1, 1]$$

(a) Desenhe (aproximadamente) o poliedro P.

(b) Determine os coeficientes dos planos das faces de P.

(c) Determine os vértices e planos das faces do poliedro P^*, dual de P.

(d) Desenhe (aproximadamente) o poliedro P^*.

(e) Determine a intersecção de P com o semi-espaço positivo π^+ do plano $\pi = \langle 1, 2, 3, 1\rangle$. (Dica: determine primeiro quais vértices de P estão em π^+.)

- [AFE-1] Sejam

$C =$ o interior do cubo com vértices $[1, \pm 1, \pm 1, \pm 1]$,

$H =$ o semi-espaço positivo do plano $\pi = \langle 8, -2, -3, -4\rangle$,

$R =$ o poliedro $C \cap H$.

Determine os vértices de R.

- [AFN-1] Descreva um algoritmo para recortar um poliedro convexo P por um plano π, devolvendo a parte Q contida no lado positivo de π. Suponha que o poliedro P é descrito pelos seus vértices e arestas, e que basta calcular os vértices do poliedro Q.

Mais precisamente, suponha que são dados (a) os coeficientes $\langle \mathcal{W}, \mathcal{X}, \mathcal{Y}, \mathcal{Z}\rangle$ do plano π; (b) os vértices $v[0,..n-1]$ de P, em coordenadas homogêneas, sendo que cada $v[i]$ é um registro com campos w, x, y, z; e (c) dois vetores de inteiros $r[0,..m-1]$ e $s[0,..m-1]$, tais que $(v[r[0]], v[s[0]]), (v[r[1]], v[s[1]]), \ldots (v[r[m-1]], v[s[m-1]])$ são as arestas de P. Seu algoritmo deve devolver o número k de vértices de Q, e um vetor $w[0,..k-1]$ contendo os vértices de Q. Para facilitar, é permitido incluir o mesmo vértice de Q mais de uma vez na lista w.

- [AFX-1] Sejam

$C =$ o interior do cubo com vértices $[1, \pm 1, \pm 1, \pm 1]$,

$H =$ o semi-espaço positivo do plano $\pi = \langle 8, -2, -5, -4\rangle$,

$R =$ o poliedro $C \cap H$.

Determine os vértices de R.

- [AGH-1] Descreva um algoritmo para recortar um poliedro convexo P por um plano π, devolvendo a parte Q contida no lado positivo de π. Suponha que o poliedro P é descrito pelos seus vértices e arestas, e que basta calcular os vértices do poliedro Q.

  Mais precisamente, suponha que são dados (a) os coeficientes $\langle \mathcal{W}, \mathcal{X}, \mathcal{Y}, \mathcal{Z} \rangle$ do plano π; (b) os vértices $v[0, .. n-1]$ de P, em coordenadas homogêneas, sendo que cada $v[i]$ é um registro com campos w, x, y, z; e (c) dois vetores de inteiros $r[0, .. m-1]$ e $s[0, .. m-1]$, tais que $(v[r[0]], v[s[0]]), (v[r[1]], v[s[1]]), \ldots (v[r[m-1]], v[s[m-1]])$ são as arestas de P. Seu algoritmo deve devolver o número k de vértices de Q, e um vetor $w[0, .. k-1]$ contendo os vértices de Q. Para facilitar, é permitido incluir o mesmo vértice de Q mais de uma vez na lista w.

- [AGQ-1] Sejam

$$\begin{aligned} C &= \text{ o interior do cubo com vértices } [1, \pm 1, \pm 1, \pm 1], \\ H &= \text{ o semi-espaço positivo do plano } \pi = \langle 8, -2, -3, -4 \rangle, \\ R &= \text{ o poliedro } C \cap H. \end{aligned}$$

  Determine os vértices de R.

- [AJD-1] Sejam

$$\begin{aligned} C &= \text{ o cubo com vértices } [1, \pm 1, \pm 1, \pm 1], \\ H &= \text{ o semi-espaço positivo do plano } \pi = \langle 5, -2, -3, -5 \rangle, \\ R &= \text{ o poliedro } C \cap H. \end{aligned}$$

  Determine os vértices de R.

3.4 Transformações do espaço

- [ADZ-1]

  (a) Encontre uma matriz de rotação R que leva a direção $(0, 0, 1)$ do $\mathbb{R}^3$ para a direção do vetor $(1, 1, 1)$. (Nota: a solução não é única.)

  (b) Escreva a equação implícita, em coordenadas homogêneas, para um toro cujo centro está em $(1, 2, 3)$, cujo eixo de rotação é paralelo ao vetor $(1, 1, 1)$, que tem raio interno 1 e raio externo 3.

- [AEC-1] (a) Determine a matriz 4×4 da transformação afim do $\mathbb{R}^3$ que leva o tetraedro canônico $abcd$ para o tetraedro $a'b'c'd'$, onde

$$a = (0, 0, 0) \quad b = (1, 0, 0) \quad c = (0, 1, 0) \quad d = (0, 0, 1)$$

$$a' = (3, 0, 0) \quad b' = (-1, 2, 0) \quad c' = (-1, -2, 0) \quad d' = (0, 0, 4)$$

  mantendo a ordem dos vértices ($a \to a'$, $b \to b'$, etc.).

  (b) Determine a matriz 4×4 da transformação afim do $\mathbb{R}^3$ que leva o tetraedro $a'b'c'd'$ para si próprio, permutando os vértices conforme segue:
  $a' \to b'$, $b' \to c'$, $c' \to d'$, e $d' \to a'$.

- [AED-1] Determine a matriz 4×4 da rotação de 60 graus em torno do eixo que passa pelos pontos $(1, 0, 0)$ e $(2, 1, 0)$.

- [AEH-1] Seja A o modelo geométrico de um sapato esquerdo, com o centro do salto na origem $(0, 0, 0)$, o bico na posição $(1, 0, 0)$, e perna na direção $(0, 0, 1)$.

  (a) Determine a matriz 4×4 que transforma o sapato A num sapato B, com a mesma forma, cujo salto está no ponto $p = (2, 3, 4)$, cujo bico aponta na direção do vetor $v = (+1, -1, +\sqrt{2})$, e cujo tamanho é $k = 3$ vezes o tamanho de A.

  (b) Determine a matriz 4×4 que leva o sapato A para o sapato C, igual ao sapato B exceto que rodado de $\theta = 45$ graus em torno do eixo que passa pelo centro do salto de B e é paralelo ao eixo Z.

  (c) Determine a matriz 4×4 que leva o sapato A para o sapato D, igual ao sapato B exceto que rodado de $\theta = 60$ graus em torno do eixo da perna de B.

- [AEM-1] Seja A o modelo geométrico de uma luva esquerda, com o centro do pulso na origem $(0, 0, 0)$, a ponta do dedo médio em $(1, 0, 0)$, e palma na direção $(0, 0, 1)$. (a) Determine a matriz 4×4 que transforma a luva A numa luva B, com a mesma forma, com a ponta do dedo médio no ponto $p = (2, 3, 5)$, com o braço apontando na direção paralela ao vetor $v = (+1, -1, +\sqrt{2})$, e cujo tamanho é $k = 3$ vezes o tamanho de A.

  (b) Determine a matriz 4×4 que leva a luva A para a luva C, igual à luva B exceto que rodada de $\theta = 45$ graus em torno do eixo que passa pela ponta do dedo médio de B e é paralela ao eixo Z.

  (c) Determine a matriz 4×4 que leva a luva A para a luva D, igual à luva B exceto que rodada de $\theta = 60$ graus em torno do eixo do braço de B.

- [AEN-1] (a) Determine a matriz 4×4 da transformação afim do $\mathbb{R}^3$ que leva o tetraedro canônico $abcd$ para o tetraedro $a'b'c'd'$, onde

$$a = (0, 0, 0) \quad b = (1, 0, 0) \quad c = (0, 1, 0) \quad d = (0, 0, 1)$$

$$a' = (3, 0, 0) \quad b' = (-1, 2, 0) \quad c' = (-1, -2, 0) \quad d' = (0, 0, 4)$$

  mantendo a ordem dos vértices ($a \to a'$, $b \to b'$, etc.).

  (b) Determine a matriz 4×4 da transformação afim do $\mathbb{R}^3$ que leva o tetraedro $a'b'c'd'$ para si próprio, permutando os vértices conforme segue:
  $a' \to b'$, $b' \to c'$, $c' \to d'$, e $d' \to a'$.

- [AER-1] Seja A o modelo geométrico de uma luva esquerdo, com o centro do pulso na origem $(0, 0, 0)$, a ponta do dedo médio em $(1, 0, 0)$, e palma na direção $(0, 0, 1)$. (a) Determine a matriz 4×4 que transforma a luva A numa luva B, com a mesma forma, com a ponta do dedo médio no ponto $p = (2, 3, 5)$, com o braço apontando na direção paralela ao vetor $v = (+1, -1, +\sqrt{2})$, e cujo tamanho é $k = 3$ vezes o tamanho de A.

  (b) Determine a matriz 4×4 que leva a luva A para a luva C, igual à luva B exceto que rodada de $\theta = 45$ graus em torno do eixo que passa pela ponta do dedo médio de B e é paralela ao eixo Z.

(c) Determine a matriz 4×4 que leva a luva A para a luva D, igual à luva B exceto que rodada de $\theta = 60$ graus em torno do eixo do braço de B.

- [AES-1] (a) Determine a matriz 4×4 da transformação afim do $\mathbb{R}^3$ que leva o tetraedro canônico $abcd$ para o tetraedro $a'b'c'd'$, onde

$$a = (0,0,0) \quad b = (1,0,0) \quad c = (0,1,0) \quad d = (0,0,1)$$

$$a' = (3,0,0) \quad b' = (-1,2,0) \quad c' = (-1,-2,0) \quad d' = (0,0,4)$$

mantendo a ordem dos vértices ($a \to a'$, $b \to b'$, etc.).

(b) Determine a matriz 4×4 da transformação afim do $\mathbb{R}^3$ que leva o tetraedro $a'b'c'd'$ para si próprio, permutando os vértices conforme segue:
$a' \to b'$, $b' \to c'$, $c' \to d'$, e $d' \to a'$.

- [AFG-1] Escreva as matrizes das transformações projetivas que correspondem às seguintes operações no espaço $\mathbb{T}^3$:

(a) Rotação de $+45°$ em torno do eixo Z.

(b) Rotação de 120 graus em torno do vetor $(1, 1, 1)$.

(c) Translação que traz o ponto $(3, 5, 4)$ para a origem.

(d) Translação e mudança de escala que leva o cubo $[0\_1] \times [0\_1] \times [0\_1]$ para o paralelepípedo $[1\_6] \times [2\_5] \times [3\_4]$.

- [AFJ-1] Dê a matriz de transformaçào projetiva do espaço $\mathbb{T}^3$ que, no aquém, efetua uma rotação de 30 graus em torno do vetor cartesiano $(1, 1, 0)$, no sentido da regra da mão direita.

- [AFK-1] Determine a imagem do plano $\langle -6, 2, 3\rangle$ pela transformação projetiva cuja matriz é

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & -3 & -4 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

- [AFL-1] Um braço de robô consiste de duas hastes articuladas: o antebraço A, com 50 cm de comprimento, e o braço propriamente dito B, com 40 cm. Cada uma dessas partes foi modelada separadamente por um cilindro, com a extremidade proximal (mais próxima ao corpo) na origem, e com a extremidade distal (mais afastada do corpo) sobre o eixo X. O torso do robô é um cilindro centrado no eixo Z, com o ombro na posição $(0, 20, 40)$.

(a) Dê a matriz de transformação necessária para posicionar o antebraço A de forma a afixá-lo no braço B. A articulação do cotovelo permite que A rode de um ângulo variável α no plano $Y = 0$.

(b) Dê a matriz de transformação necessária para afixar o braço B no ombro do robô. A articulação do ombro possui dois graus de liberdade apenas: o braço B pode rodar por um ângulo β em torno de um eixo paralelo ao eixo Y, e por um ângulo τ em torno do seu próprio eixo.

(c) Mostre como calcular a posição da ponta distal do antebraço (pulso), depois da montagem, em função dos parâmetros α, β e τ.

- [AFZ-1] Escreva as matrizes das transformações projetivas que correspondem às seguintes operações no espaço $\mathbb{T}^3$:

  (a) Rotação de $+45°$ em torno do eixo Z.

  (b) Rotação de 120 graus em torno do vetor $(1, 1, 1)$.

  (c) Translação que traz o ponto $(3, 5, 4)$ para a origem.

  (d) Translação e mudança de escala que leva o cubo $[0\_1] \times [0\_1] \times [0\_1]$ para o paralelepípedo $[1\_6] \times [2\_5] \times [3\_4]$.

  (e) Rotação de 60 graus em torno da reta que passa pelo ponto cartesiano $(1, 2, 3)$ e é paralela ao vetor $(1, 1, 0)$.

- [AGC-1] Dê a matriz de transformaçào projetiva do plano $\mathbb{T}^2$ que, no aquém, efetua uma rotação de 30 graus anti-horários em torno do ponto $[2, 3, 4]$.

- [AGD-1] Dê a matriz de transformaçào projetiva do espaço $\mathbb{T}^3$ que, no aquém, efetua uma rotação de 30 graus em torno do vetor cartesiano $(1, 1, 0)$, no sentido da regra da mão direita.

- [AGE-1] Determine a imagem do plano $\langle -6, 2, 3\rangle$ pela transformação projetiva cuja matriz é

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & -3 & -4 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

- [AGF-1] Um braço de robô consiste de duas hastes articuladas: o antebraço A, com 50 cm de comprimento, e o braço propriamente dito B, com 40 cm. Cada uma dessas partes foi modelada separadamente por um cilindro, com a extremidade proximal (mais próxima ao corpo) na origem, e com a extremidade distal (mais afastada do corpo) sobre o eixo X. O torso do robô é um cilindro centrado no eixo Z, com o ombro na posição $(0, 20, 40)$.

  (a) Dê a matriz de transformação necessária para posicionar o antebraço A de forma a afixá-lo no braço B. A articulação do cotovelo permite que A rode de um ângulo variável α no plano $Y = 0$.

  (b) Dê a matriz de transformação necessária para afixar o braço B no ombro do robô. A articulação do ombro possui dois graus de liberdade apenas: o braço B pode rodar por um ângulo β em torno de um eixo paralelo ao eixo Y, e por um ângulo τ em torno do seu próprio eixo.

  (c) Mostre como calcular a posição da ponta distal do antebraço (pulso), depois da montagem, em função dos parâmetros α, β e τ.

- [AGS-1] Escreva as matrizes das transformações projetivas que correspondem às seguintes operações no espaço $\mathbb{T}^3$:

  (a) Rotação de $+45°$ em torno do eixo Z.

  (b) Rotação de 120 graus em torno do vetor $(1, 1, 1)$.

  (c) Translação que traz o ponto $(3, 5, 4)$ para a origem.

  (d) Translação e mudança de escala que leva o cubo [0_1] $\times$ [0_1] $\times$ [0_1] para o paralelepípedo [1_6] $\times$ [2_5] $\times$ [3_4].

- [AHH-1] Seja A a esfera de raio 1 centrada na origem. Seja B o elipsóide com raios principais 1,3,4 centrado no ponto (1,2,3) e inclinado 45° na direção do eixo X. Determine a matriz de uma transformação projetiva que transforma o objeto A no objeto B.

- [AHL-1] Escreva um modelo hierárquico articulado de braço de caranguejo, na forma de uma macro POV-Ray. O modelo deve ter pelo menos quatro partes (cotovelo, pulso, articulação da pinça) com três articulações (braço, antebraço, garra maior), cada qual com pelo menos um grau de liberdade. Desenhe um esboço do modelo, mostrando os graus de liberdade.

- [AHV-1] Escreva a matriz projetiva de $\mathbb{T}^3$ que leva os pontos $[0, 1, 0, 0]$, $[0, 0, 1, 0]$, $[0, 0, 0, 1]$ para os pontos $[0, 2, 3, 0]$, $[0, 3, -2, 0]$, $[0, 0, 0, -1]$, e a origem para $[1, 2, 3, 4]$, preservando as distâncias entre pontos.

- [AJF-1] Escreva as matrizes das transformações projetivas que correspondem às seguintes operações no espaço $\mathbb{T}^3$:

  (a) Rotação de $+45°$ em torno do eixo Z.

  (c) Translação que traz o ponto $(3, 5, 4)$ para a origem.

  (d) Translação e mudança de escala que leva o cubo [0_1] $\times$ [0_1] $\times$ [0_1] para o paralelepípedo [1_6] $\times$ [2_5] $\times$ [3_4].

- [AKE-1] Seja A o modelo geométrico de uma luva **esquerda**, com o centro do pulso na origem $(0, 0, 0)$, a ponta do dedo médio em $(1, 0, 0)$, e palma na direção $(0, 0, 1)$. (a) Determine a matriz 4×4 que transforma a luva A numa luva **direita** B, com a mesma forma, com a ponta do dedo médio no ponto $p = (2, 3, 5)$, com o braço apontando na direção paralela ao vetor $v = (+1, -1, +\sqrt{2})$, e cujo tamanho é $k = 3$ vezes o tamanho de A.

  (b) Determine a matriz 4×4 que leva a luva A para a luva C, igual à luva B exceto que rodada de $\theta = 45$ graus em torno do eixo que passa pela ponta do dedo médio de B e é paralela ao eixo Z.

  (c) Determine a matriz 4×4 que leva a luva A para a luva D, igual à luva B exceto que rodada de $\theta = 60$ graus em torno do eixo do braço de B.

4 Modelagem geométrica

4.1 Modelos paramétricos

- [AEA-1] Escreva a descrição paramétrica de uma *helicóide* — a superfície gerada por uma reta que cruza perpendicularmente o eixo Z, que se desloca na direção desse eixo com velocidade uniforme v, e ao mesmo tempo gira em torno desse eixo com velocidade angular uniforme α.

- [AEF-1] Escreva a descrição paramétrica da superfície de uma *espiral de caderno* gerada por um círculo que gira em torno do eixo Z com velocidade angular uniforme ω e ao mesmo tempo se desloca na direção $+Z$ com velocidade linear uniforme v. Suponha que o círculo tem raio r, está sempre situado num plano que contém o eixo Z, e seu centro fica sempre a distância R do eixo Z.

- [AEK-1] Escreva a descrição paramétrica da superfície de uma *fita de Möbius*. A fita é gerada por um segmento de reta de comprimento $2L$ cujo centro c descreve uma circunferência no plano XY de raio R com centro na origem. A todo instante o segmento está num plano que passa pelo eixo Z; o segmento gira nesse plano, em torno do seu centro c, completando $1/2$ volta no tempo em que c completa uma volta inteira.

- [AEP-1] Escreva a descrição paramétrica da superfície de uma *fita de Möbius*. A fita é gerada por um segmento de reta de comprimento $2L$ cujo centro c descreve uma circunferência no plano XY de raio R com centro na origem. A todo instante o segmento está num plano que passa pelo eixo Z; o segmento gira nesse plano, em torno do seu centro c, completando $1/2$ volta no tempo em que c completa uma volta inteira.

4.2 Modelos implícitos

- [AEB-1] Determine uma equação implícita para a superfície

$$\{\,(\cos\theta\cos\phi, \cos\theta\sin\phi, 3\sin\theta)\ :\ \theta \in [-\pi/2..+\pi/2], \phi \in [0..2\pi]\,\}$$

- [AEI-1] (a) Sejam $f(x)$, $g(x)$, e h três funções contínuas e suaves de $\mathbb{R}$ para $\mathbb{R}$, sendo que h é uma função crescente tal que $h(x) = 0$ para $x < -1$ e $h(x) = 1$ para $x > +1$. Mostre como combinar algebricamente essas funções de modo a obter uma função *contínua e suave* $r : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ tal que $r(x) = f(x)$ para $x < -1$, $r(x) = g(x)$ para $x > +1$, e $r(x)$ tem valor intermediário entre $f(x)$ e $g(x)$ para $-1 \leq x \leq +1$.

  (b) Sejam $f(p) = 0$ e $g(p) = 0$ as equações implícitas de dois objetos geométricos F e G, de tamanho bem maior que 1, mais ou menos centrados na origem. Usando a função h to item (a), mostre como obter a equação implícita de um objeto que é igual a F para $z < a$, igual a G para $z > b$, e emenda suavemente os dois objetos para $a \leq z \leq b$

- [AFO-1] Seja E a elipse no plano $\mathbb{T}^2$ cujo centro é a origem, cujos eixos principais são os eixos cartesianos X e Y, e que mede 10 unidades na direção X, e 2 unidades na direção Y.

  (a) Dê uma equação implícita para E, em coordenadas cartesianas.

  (b) Escreva essa equação em coordenadas homogênas.

  (c) Encontre uma transformação (não projetiva, naturalmente) do plano $\mathbb{T}^2$ que deforma a elipse E numa curva em formato de bumerangue, com o centro no mesmo lugar e as duas pontas entortadas na direção +Y. Dica: use polinômios de segundo grau em termos das coordenadas cartesianas.

  (d) Determine uma equação implícita para a curva deformada.

- [AGI-1] Seja E a elipse no plano $\mathbb{T}^2$ cujo centro é a origem, cujos eixos principais são os eixos cartesianos X e Y, e que mede 10 unidades na direção X, e 2 unidades na direção Y.

  (a) Dê uma equação implícita para E, em coordenadas cartesianas.

  (b) Escreva essa equação em coordenadas homogênas.

  (c) Encontre uma transformação (não projetiva, naturalmente) do plano $\mathbb{T}^2$ que deforma a elipse E numa curva em formato de bumerangue, com o centro no mesmo lugar e as duas pontas entortadas na direção +Y. Dica: use polinômios de segundo grau em termos das coordenadas cartesianas.

  (d) Determine uma equação implícita para a curva deformada.

- [AGJ-1]

  (a) Dê uma equação implícita para o cone infinito C de $\mathbb{T}^3$ cujo vértice é a origem, cujo eixo é o eixo Z, e cujos lados formam um ângulo de 45 graus com esse eixo.

  (b) Escreva essa equação em coordenadas homogênas.

  (c) Encontre uma transformação (não projetiva, naturalmente)do espaço $\mathbb{T}^2$ que entorta o cone C mantendo o vértice no mesmo lugar mas curvando as duas pontas do eixo Z na direção +Y. Dica: use polinômios de segundo grau em termos das coordenadas cartesianas.

  (d) Determine uma equação implícita para a superfície deformada.

4.3 Curvas e retalhos de Bézier

- [AAF-1] Dê a fórmula para o ponto genérico $p(t)$ numa curva de Bézier de 3º grau, em função dos pontos de controle p_{000}, p_{001}, p_{011}, p_{111}.

- [AEG-1] (a) Determine as coordenadas dos pontos de controle de uma curva de Bézier simétrica que liga suavemente (sem cantos) a semireta $r = \{ (x, -1) \ : \ x \leq -1 \}$ com a semireta $s = \{ (x, +1) \ : \ x \geq +1 \}$. (Estas condições deixam um grau de liberdade para a curva, portanto a sua resposta deve depender de um parâmetro arbitrário h.)

(b) Calcule as coordenadas dos pontos de controle da primeira metade da curva de Bézier do item anterior. (A resposta também deve dependeer do parâmetro h.)

(c) Determine o valor do parâmetro h de modo que a direção da curva no seu ponto médio seja paralela ao vetor $(0, 1)$. (Justifique sucintamente a resposta.)

- [AEL-1] (a) Determine as coordenadas dos pontos de controle de uma curva de Bézier simétrica $c(t)$ que aproxima uma semi-circunferência de raio 1 com centro na origem, contida no semiplano $x \geq 0$. A curva deve ser tangente ao círculo em $c(0)$ e $c(1)$. (Estas condições deixam um grau de liberdade para a curva, portanto a sua resposta deve depender de um parâmetro arbitrário h).

  (b) Calcule as coordenadas dos pontos de controle do primeiro 1/4 da curva anterior, de $c(0)$ a $c(1/4)$. (A resposta também deve dependeer do parâmetro h.)

  (c) Determine o valor do parâmetro h de modo que os pontos $c(1/4)$ e $c(1/2)$ estejam em lados opostos do círculo, a igual distância do mesmo. (Justifique sucintamente a resposta.)

- [AEQ-1] (a) Determine as coordenadas dos pontos de controle de uma curva de Bézier simétrica $c(t)$ que aproxima uma semi-circunferência de raio 1 com centro na origem, contida no semiplano $x \geq 0$. A curva deve ser tangente ao círculo em $c(0)$ e $c(1)$. (Estas condições deixam um grau de liberdade para a curva, portanto a sua resposta deve depender de um parâmetro arbitrário h).

  (b) Calcule as coordenadas dos pontos de controle do primeiro 1/4 da curva anterior, de $c(0)$ a $c(1/4)$. (A resposta também deve dependeer do parâmetro h.)

  (c) Determine o valor do parâmetro h de modo que os pontos $c(1/4)$ e $c(1/2)$ estejam em lados opostos do círculo, a igual distância do mesmo. (Justifique sucintamente a resposta.)

- [AHJ-1] Considere os pontos

$$
\begin{array}{llll}
a = (0,4) & b = (1,4) & c = (2,\alpha) & d = (\beta,2) \\
p = (3,\gamma) & q = (\delta,0) & r = (6,0) & s = (7,1)
\end{array}
$$

  Determine os valores dos parâmetros α, β, γ e δ para que os dois arcos de Bézier definidos respectivamente pelos pontos a, b, c, d e p, q, r, s se juntem de modo a formar uma única curva, sem quebras nem cantos.

5 Rendering

5.1 Perspectiva

- [AAA-1] A Grande Pirâmide de Lilliput tem por ápice o ponto $(0, 0, 2)$ e por base o quadrilátero $(\pm 1, \pm 1, 0)$. (Todas as coordenadas são em metros, com norte na direção $+Y$, leste na direção $+X$.)

  Deseja-se produzir uma imagem da Grande Pirâmide. A imagem será pendurada numa parede vertical, para ser vista por uma pessoa de 1,50m de estatura a 2m de distância da parede. A imagem deve mostrar a pirâmide tal como se ela estivesse no chão atrás da parede, com o centro da base a 5m dos pés do observador, e com a fachada norte voltada de frente para este último.

  (a) Calcule o parâmetro d e as coordenadas SC dos pontos o e f e dos vetores r, s, t que definem a transformação de perpectiva.

  $o = \boxed{}$

  $f = \boxed{}$

  $d = \boxed{}$

  $r = \boxed{}$

  $s = \boxed{}$

  $t = \boxed{}$

  (b) Escreva a matriz de perspectiva M correspondente a estes dados.

  $\mathsf{M} = \boxed{}$

  Diz a lenda que, quando a Lua cheia eclipsar o Sol, Saturno e Marte estiverem na constelação da Ursa Maior, e o Corinthians ganhar o Campeonato, a Grande Pirâmide se levantará sobre seus alicerces, rodará 180° em torno do eixo leste-oeste, e ficará flutuando nos ares, de cabeça para baixo, com o ápice a 2m do solo, girando lentamente sobre seu eixo vertical.

  (c) Supondo o observador e a imagem nas mesmas posições, calcule a nova matriz de perspectiva M', para o momento em que a Pirâmide, depois de levitada e invertida, tiver girado 30° no setido anti-horário em torno do eixo Z **da própria pirâmide**.

$\mathsf{M}' = \boxed{}$

- [AAN-1] A Construtora Realidade Virtual S/A (CREVISA) deseja produzir um filme publicitário de seu mais recente empreendimento, a Torre Não-Inclinada de Pisa (apartamentos à venda no local).

  O filme deverá ser exibido numa sala de cinema especial, de 30m de altura. A tela vai do chão ao teto, e está inclinada 45° na direção da audiência. As imagens devem ter a perspectiva correta para um otário, digo, um cliente em potencial sentado a 30m do pé da tela, com os olhos a 1,50m do chão.

  No arquivo de dados que contém a descrição da Torre, todas as coordenadas são medidas em metros, a partir de um ponto de referência no centro do piso térreo, com o eixo $+X$ na direção leste, e $+Y$ na direção norte.

  (a) A cena inicial do filme deve mostrar o edifício como se a tela fosse uma janela panorâmica, e o edifício estivesse construído atrás da mesma, com o ponto de referência no chão a 60m do pé da tela, bem em frente ao cliente, e com a fachada norte voltada para o mesmo. Calcule o parâmetro d e as coordenadas SC dos pontos o e f e dos vetores r, s, t que definem a transformação de perpectiva.

  $o = \boxed{}$

  $f = \boxed{}$

  $d = \boxed{}$

  $r = \boxed{}$

  $s = \boxed{}$

  $t = \boxed{}$

  (b) Escreva a matriz de perspectiva M correspondente a estes dados.

  $\mathsf{M} = \boxed{}$

Para encerrar o filme, a CREVISA quer uma cena dramática que simbolize a sofisticação, classicalidade e extemporaneidade do projeto arquitetônico. Especificamente, eles querem mostrar o prédio se inclinando lentamente em direção a platéia, contra um céu de pôr-do-sol com gaivotas, e acompanhado pela *ouverture* do 'Zaratustra", até que o prédio fique a de 11.7° da vertical, que é a inclinação característica da Torre de Pisa original. (Talvez não seja esse o número, mas quem é que vai perceber a diferença?).

(c) Supondo que o cliente não tenha saído no meio do filme, e ainda esteja acordado e sentado no mesmo lugar do item (a), calcule a nova matriz de perspectiva M' para o quadro final desta cena,

$$\mathsf{M}' = \boxed{}$$

- [ADT-1] Na questão abaixo, pede-se um procedimento em C ou Pascal. Suponha definidos os seguintes tipos e procedimentos auxiliares:

```
/* C */
#include <math.h>
typedef double[4][4] matrix;
typedef double[4] point;
typedef double[3] vector;
/* Produto escalar: */
float dot(vector u, vector v);
/* Produto vetorial: */
vector cross(vector u, vector v);
/* Vetor unitário: */
vector dir(vector v);
/* Diferença de vetores: */
vector sub(vector u, vector v);
/* Produto de matrizes: */
matrix mul(matrix A, matrix B);
```

```
{ Pascal }

type matrix = array[0..3,0..3] of real;
type point = array[0..3] of real;
type vector = array[0..2] of real;
{ Produto escalar: }
function dot(u, v: vector): real;
{ Produto vetorial: }
procedure cross(u, v: vector; var w: vector);
{ Vetor unitário: }
procedure dir(v: vector; var w: vector);
{ Diferença de vetores: }
procedure sub(u, v: vector; var w: vector);
{ Produto de matrizes: }
procedure mul(A, B: matrix; var C: matrix);
```

Imagine um fotógrafo tirando uma fotografia de um avião. O fotógrafo está no alto de uma torre de altura h. O avião está voando com seu centro de gravidade a uma distância D da **base** da torre, com azimute (ângulo com o Norte) θ, e elevação (ângulo com o plano horizontal) ϕ. O fotógrafo aponta a câmara diretamente para o avião, mantendo naturalmente o eixo horizontal da câmara paralelo ao chão. O avião está horizontal, com o nariz apontando a um ângulo ξ em relação ao Norte.

Deseja-se reproduzir na tela do computador a imagem do avião que o fotógrafo obteria na situação acima, a partir de um modelo geométrico do avião. O modelo está descrito em metros, relativamente a um sistema de coordenadas positivo fixo no centro de gravidade do avião, com eixo X ao longo da fuselagem, eixo Y transversal, e Z vertical. A tela está a 50cm do usuário.

(a) Calcule as coordenadas do fotógrafo relativas ao sistema de coordenadas do avião.

(b) Escreva um procedimento em C ou Pascal que, dados h, D, θ, ϕ, e ξ, devolve a matriz de projeção perspectiva 4×4 que transforma coordenadas do modelo em coordenadas na imagem, conforme as convenções vistas no curso.

- [AFM-1] Considere um display panorâmico formado por três telas dispostas em torno do usuário, como indicado na figura. Determine a matriz da projeção perpsectiva necessária para produzir uma imagem realista da cena *na tela da esquerda*, cujos cantos têm coordenadas $(5, -3, -2)$, $(5, -3, +2)$, $(13, -11, -2)$ e $(13, -11, +2)$. Suponha que o observador estará situado no eixo X, a 6 metros do centro da tela do meio.

- [AFQ-1] Calcule a matriz de perspectiva para uma cena, supondo que a câmera está em $(30, 20, 20)$, olhando para $(0, 0, 10)$ (coordenadas em metros). Suponha que o usuário estará 50 cm na frente do centro da tela.

- [AGG-1] Considere um display panorâmico formado por três telas dispostas em torno do usuário, como indicado na figura. Determine a matriz da projeção perpsectiva necessária para produzir uma imagem realista da cena *na tela da esquerda*, cujos cantos têm coordenadas $(5, -3, -2)$, $(5, -3, +2)$, $(13, -11, -2)$ e $(13, -11, +2)$. Suponha que o observador estará situado no eixo X, a 6 metros do centro da tela do meio.

5.2 Visibilidade

- [AAD-1] Qual o principal defeito do algoritmo de Roberts?

- [ACG-1] Sejam a, b, c os vértices de um triângulo T no espaço, e p a posição de uma fonte de luz que não é coplanar com T. Escreva um algoritmo para testar se um ponto q do espaço está na sombra de T, dadas as coordenadas homogêneas de todos esses pontos.

5.3 Cores e luz

- [AAR-1] Uma determinada tela colorida tem componentes R, G, e B com brilho 0.30, 0.60, e 0.10, respectivamente. Dê as coordenadas RGB de três cores com saturação maxima que, se pintadas nessa tela, teriam brilho 0.50.

$c_1 = \boxed{}$

$c_2 = \boxed{}$

$c_3 = \boxed{}$

- [AAS-1] Dê a fórmula para calcular o brilho aparente de um ponto p de uma superfície branca perfeitamente fosca (i.e., um difusor Lambertiano) com normal $\vec{n}$, iluminada por uma fonte de luz branca na direção $\vec{f}$ (relativa a p), e com o observador na direção $\vec{v}$ (idem).

  A intensidade da fonte é tal que, se a superfície fosse vista e iluminada perpendicularmente, seu brilho aparente seria 1. Suponha que a fonte e o observador estão do mesmo lado da superfície.

6 POV-Ray

6.1 Cenas complexas

- [AFH-1] Dê os comandos POV-Ray necessários para construir o seguinte objeto (excluindo os eixos de coordenadas):

  Missing figure items/AFH/figs/test1.eps

- [AFP-1] Descreva os comandos de POV-Ray necessários para produzir a imagem abaixo (menos os eixos). É obrigatorio o uso de comandos condicionais e de repetição, para evitar a duplicação excessiva de código. As dimensões devem ser consistentes entre si, mas não precisam ser exatamente iguais à da figura.

  Missing figure QAFP/test1.eps

- [AFR-1] Dê os comandos POV-Ray necessários para construir um modelo grosseiro da molécula de DNA, consistindo de duas espirais envolvendo um eixo comum, formadas por esferas igualmente espaçadas, com cilindros ligando esferas correspondentes. Uma das espeirais deve ter uma esfera faltando.

- [AGA-1] Dê os comandos POV-Ray necessários para construir o seguinte objeto (excluindo os eixos de coordenadas):

  Missing figure test1.eps

- [AGK-1] Descreva os comandos de POV-Ray necessários para produzir a imagem abaixo (menos os eixos). É obrigatorio o uso de comandos condicionais e de repetição, para evitar a duplicação excessiva de código. As dimensões devem ser consistentes entre si, mas não precisam ser exatamente iguais à da figura.

  Missing figure test1.eps

  (Resposta na próxima folha.)

- [AGT-1] Dê os comandos POV-Ray necessários para construir o seguinte objeto (excluindo os eixos de coordenadas):

  Missing figure QAGT/test1.eps

- [AHB-1] Mostre como descrever o objeto abaixo (excluindo os eixos de coordenadas) em POV-Ray, usando comandos iterativos e condicionais:

  Missing figure QAHB/test1.eps

- [AHC-1] Descreva o objeto abaixo (excluindo os eixos de coordenadas) na linguagem do POV-Ray, usando operações booleanas e comandos iterativos. Não é preciso especificar as texturas, as luzes, e a câmera. As dimensões não precisam ser exatamente iguais às da figura.

  Missing figure items/AHC/figs/test1a.eps

- [AHM-1] Descreva o objeto abaixo (excluindo os eixos de coordenadas) na linguagem do POV-Ray, usando operações booleanas e comandos iterativos e condicionais. **O objeto é feito de vidro transparente azulado**. Não é preciso especificar as luzes e a câmera, e as dimensões não precisam ser exatamente iguais às da figura.

  Missing figure QAHM/test1a.eps

- [AHX-1] Escreva um **modelo hierárquico articulado** do objeto abaixo (excluindo os eixos de coordenadas) na linguagem do POV-Ray, usando macros. As juntas têm os graus de liberdade indicados pelas setas, que devem ser parâmetros do modelo. Não é preciso especificar as luzes e a câmera, e as dimensões não precisam ser exatamente iguais às da figura.

  Missing figure test1a.eps

- [ALC-1]

  Escreva um **modelo hierárquico articulado** de um braço de robô, consistindo de dois segmentos rígidos articulados entre si, terminado por uma mão. A mão deve ter um polegar e mais três dedos, cada qual com pelo menos dois segmentos (falanges).

- [AME-1] Escreva uma macro recursiva em POV-Ray que produza o seguinte objeto (com dimensões aproximadas):

  Missing figure items/AME/figs/test1.eps

- [AMN-1]

  Escreva os comandos POV-Ray necessários para modelar a forma abaixo. A superfície não deve ter vincos ou quinas, e nos pontos marcados **H** e **V** a superfície deve ser horizontal e vertical, respectivamente. Suponha fornecida uma macro
  `retalho(P11,P12,P13,P14,P21,...,P44)`
  como a usada no laboratório.

- [ANQ-1] Dê os comandos POV-Ray necessários para construir a fita abaixo (menos os eixos de coordenadas), usando dois retalhos de Bézier unidos sem quinas ou vincos. As dimensões não precisam ser exatas, mas a fita deve começar e terminar horizontalmente. Pode supor disponível a macro `retalho` usada nos laboratórios.

  Missing figure items/ANQ/figs/test1.eps

- [AJE-1] Escreva, na liguagem POV-ray:

  (a) Uma macro `caixa` que produz um modelo de um cubo oco, incialmente com lado externo 5 cm e lado interno 4 cm, centrado na origem. As faces perpendiculares ao eixo X devem ter $N \times N$ furos redondos, onde N é um parâmetro da macro.

  (b) Um quadro genérico de uma animação desse cubo. No decorrer da animação, o tamanho do cubo na direção X deve esticar e encolher senoidalmente, entre 90% e de 110% do tamanho original, mantendo as outras dimensões constantes. Ao mesmo tempo, o cubo deve girar em torno do eixo X. Suponha que o tempo do quadro é dado pela variável `clock` que varia de 0 (iníco da animação) até 1 (fim da animação). Os movimentos devem ser ajustados de modo que o estado final seja igual ao inicial.

- [AKF-1] Descreva o objeto abaixo (excluindo os eixos de coordenadas) na linguagem do POV-Ray, usando operações booleanas e comandos iterativos. Não é preciso especificar as luzes, e a câmera. Suponha que há duas texturas `txA` e `txB` já definidas, respectivamente clara e escura. As dimensões não precisam ser exatamente iguais às da figura.

  Missing figure items/AKF/figs/test1a.eps

- [AKO-1] Escreva os comandos POV-ray necessários para produzir o quadro genérico da animação descrita a seguir. A cena é um cubo oco de lado externo 5 e lado interno 3, que estica e encolhe senoidalmente de 10% com período T segundos na direção X, e encolhe nas outras duas direções de modo a manter seu volume constante, ao mesmo tempo que gira em torno de seu eixo Z com velocidade angular ω constante, e seu centro desloca com velocidade uniforme v na direão do vetor $(1, 1, 0)$. Não é necessário especificar a camera ou luzes. Suponha que o tempo é dado pela variável `clock`.

- [AKP-1]

  Escreva os comandos POV-ray necessários para produzir o quadro genérico da animação descrita a seguir.

  Missing figure items/AKP/figs/kick.eps

  A cena é uma perna de jogador de futebol, representada por três peças rígidas articuladas entre si — coxa (com 45 cm de comprimento), canela (45 cm) e pé (25 cm). A extremidade de cima da coxa (que estaria presa no quadril) está fixa na origem do sistema de coordenadas. A coxa pode girar em volta do quadril; a canela pode girar em volta do joelho; e o pé pode girar em volta do tornozelo. Todos estes movimentos estão restritos ao plano X, Z. A animação começa e termina com a coxa e a canela esticadas na vertical, e o pé horizontal. Durante a animação, a perna dobra um pouco, gira para trás, dá um chute para a frente numa bola de futebol imaginária, e então gira um pouco para trás e estica de novo.

  A perna deve ser descrita na forma de um modelo hierárquico articulado. Suponha que o tempo é dado pela variável `clock` (0.0 no início da animação e 1.0 no final). Especifique claramente a variação dos parâmetros do modelo em função do tempo. Não é necessário especificar a camera ou luzes.

6.2 Comandos específicos

- [AEJ-1] Indique os comandos POV-ray necessários para descrever:

  (a) um cilindro de borracha de comprimento 6 e raio 2, que gira com velocidade uniforme w em torno de seu eixo, e ao mesmo tempo estica e encolhe senoidalmente de 10% com período T segundos. Suponha que o tempo é dado pela variável `time`.

  (b) uma tábua de comprimento m centímetros de comprimento, n centímetros de largura, e 0.2 centímetros de espessura (sendo m e n parâmetros inteiros), com mn furos de raio 0.3cm, espaçados de 1 centímetro nas duas direções.

- [AEE-1] Indique os comandos POV-ray necessários para descrever:

  (a) Uma meia-esfera oca de raio interno 2 e raio externo 3.

  (b) Um cubo de lado 2, atravessado por um cilindro de comprimento 4 e raio 0.5, cujo eixo passa pelo centro de em duas faces opostas.

(c) Duas cópias de um objeto `sapato`, uma delas a imagem espelhada da outra, separadas por $d = 6$ unidades na direção Y, e rodadas de $\theta = 5$ graus em torno a seu eixo vertical, em sentidos opostos.

- [AEO-1] Indique os comandos POV-ray necessários para descrever:

  (a) um cubo oco de lado externo 5 e lado interno 3, que estica e encolhe senoidalmente de 10% com período T segundos na direção X, e encolhe nas outras duas direções de modo a manter seu volume constante, ao mesmo tempo que seu centro se move com velocidade uniforme v na direão do vetor $(1, 1, 0)$. Suponha que o tempo é dado pela variável `time`.

  (b) um cilindro oco de m centímetros de altura, $2\pi n$ centímetros de raio, e 0.4 centímetro de espessura (sendo m e n parâmetros inteiros variáveis), com mn furos de raio 0.3cm, espaçados de 1 centímetro nas duas direções.

- [AET-1] Indique os comandos POV-ray necessários para descrever:

  (a) um cubo oco de lado externo 5 e lado interno 3, que estica e encolhe senoidalmente de 10% com período T segundos na direção X, e encolhe nas outras duas direções de modo a manter seu volume constante, ao mesmo tempo que seu centro se move com velocidade uniforme v na direão do vetor $(1, 1, 0)$. Suponha que o tempo é dado pela variável `time`.

  (b) um cilindro oco de m centímetros de altura, $2\pi n$ centímetros de raio, e 0.4 centímetro de espessura (sendo m e n parâmetros inteiros variáveis), com mn furos de raio 0.3cm, espaçados de 1 centímetro nas duas direções.

- [AGU-1] Mostre como especificar, na linguagem do POV-Ray, uma esfera de raio 3, com seu ponto mais baixo situado diretamente acima da origem, a 4 unidades da mesma. Suponha o eixo z vertical, apontando para cima.

- [AGV-1] Mostre como especificar, na linguagem do POV-Ray, um cilindro de raio 2 e comprimento 5, com seu centro situado 3 unidades acima da origem. Suponha o eixo z vertical, apontando para cima.

- [AGW-1] Mostre como especificar, na linguagem do POV-Ray, uma caixa de dimensões $L_X = 2$, $L_Y = 4$, $L_Z = 6$, com lados paralelos aos eixos de coordenadas, com centro situado 5 unidades acima da origem. Suponha o eixo z vertical, apontando para cima.

- [AGX-1] Supondo definido um objeto `coisa`, mostre como especificar, em POV-Ray, uma cópia do mesmo, deslocada de 4 unidades para cima.

- [AGY-1] Supondo definido um objeto `coisa`, mostre como especificar, em POV-Ray, uma cópia do mesmo, rodada de 30 graus em torno do eixo x.

- [AGZ-1] Supondo definido um objeto `coisa`, mostre como especificar, em POV-Ray, uma cópia do mesmo, ampliada por fator 3 na direção x, combinada de uma redução por fator 0.5 nos outros dois eixos.

- [AHA-1] Supondo definido um objeto `coisa`, mostre como especificar, em POV-Ray, uma cópia do mesmo, rodada de 45 graus em torno da reta que passa pelo ponto $(3, 4, 5)$ e é paralela ao eixo z.

- [AKG-1] Escreva as macros POV-ray que descrevem:

  (a) Uma meia-esfera oca de raio interno 2 e raio externo 3.

  (b) Um cubo de lado 2, atravessado por um cilindro de comprimento 4 e raio 0.5, cujo eixo passa pelo centro de em duas faces opostas.

(c) Duas cópias de um objeto `sapato`, uma delas a imagem espelhada da outra, separadas por $d = 6$ unidades na direção Y, e rodadas de $\theta = 5$ graus em torno a seu eixo vertical, em sentidos opostos.

(d) Um arranjo de n por n objetos (onde n é um parâmetro), igualmente espaçados, onde o objeto na i-ésima fileira e j-ésima coluna é uma bola se i é divisível por j, e um cubo caso contrário.

7 A classificar