MC930 - Computação Gráfica
Lista de Exercícios 2

Na resolução destes exercícios, não é necessário efetuar as contas — basta dar fórmulas explícitas para o resultado.

1. Considere as equações paramétrica e implícita de um toro,

$$\{\ ((R + r\cos\theta)\cos\phi, (R + r\cos\theta)\sin\phi, r\sin\theta)\ :\ \theta, \phi \in [0\,..\,2\pi)\ \}$$

$$\left\{\ (x, y, z)\ :\ (x^2 + y^2 + z^2 + R^2 - r^2)^2 - 4R^2(x^2 + y^2) = 0\ \right\}$$

   e seja T a transformação de $\mathbb{R}^3$ que leva (x, y, z) para $(2x + 1, 3y + z, 2z)$.

   (a) Escreva a matriz 4×4 da transformada T, em coordenadas homogêneas.
   (b) Determine a formula e matriz homogênea da transformada inversa T^{-1}.
   (c) Determine as equações implícita e paramétrica do toro modificado pela transformação T.

2. Determine a transformação afim T do plano $\mathbb{R}^2$ que leva o triângulo canônico com vértices $a = (0, 0)$, $b = (1, 0)$, $c = (0, 1)$ para um triângulo equilátero $a'b'c'$ com centro em $(0, 0)$ e o vértice a' em $(1, 0)$.

3. Determine a transformação afim M do plano $\mathbb{R}^2$ que leva o triângulo canônico abc da questão anterior para si mesmo, com os vértices permutados ciclicamente em sentido anti-horário: $a \to b$, $b \to c$, $c \to a$.

4. Determine uma transformação afim $M(t)$, variável com o tempo, que poderia ser usada para obter a animação de um parafuso sendo parafusado num objeto fixo. Suponha que o eixo do parafuso é o eixo de coordenadas Z, e que a cada volta o parafuso desce uma distância d.

5. Considere um braço de robô formado por duas barras rígidas a e b, com comprimentos r_a e r_b, unidas por uma junta universal (o "cotovelo"). Suponha que a ponta de b oposta ao cotovelo está presa no robô por outra junta universal (o"ombro"), cuja posição o é fixa na origem, $o = (0, 0, 0)$.

   Por definição, a *posição canônica* de cada barra é colinear com o eixo X, com a ponta proximal (a mais próxima ao corpo) na origem, e a ponta distal (a mais próxima à mão) em X positivo. A *pose* de cada barra é a matriz 4×4 que leva a barra de sua posição canônica para sua posição corrente.

   (a) Sejam M_a e M_b as poses das barras a e b num determinado instante. Que condições algébricas devem satisfazer essas matrizes para que o braço esteja corretamente conectado (isto é, para que a barra b esteja de fato ligada no ombro, e a barra a esteja ligada à outra ponta de b)?

(b) Suponha que o braço está numa posicão arbitrária, descrita pelas poses M_a e M_b; e desejamos aplicar ao mesmo uma rotação R em torno de algum eixo r passando pelo ombro, mas sem mudar a posição de a relativamente a b (ou seja, como se o cotovelo fosse rígido). Determine as fórmulas para as novas poses M'_a e M'_b em termos das matrizes M_a, M_b, e S.

6. Sejam $t_1 = 1$, $t_2 = 4$.

(a) Determine a base cardinal para interpolação cúbica de Hermite no intervalo $[t_1, t_2]$. Isto é, determine polinômios P_1, P_2 e D_1, D_2, de grau menor ou igual a 3, tais que

$$\begin{array}{llll} P_1(t_1) = 1 & P_1(t_2) = 0 & P'_1(t_1) = 0 & P'_1(t_2) = 0 \\ P_2(t_1) = 0 & P_2(t_2) = 1 & P'_2(t_1) = 0 & P'_2(t_2) = 0 \\ D_1(t_1) = 0 & D_1(t_2) = 0 & D'_1(t_1) = 1 & D'_1(t_2) = 0 \\ D_2(t_1) = 0 & D_2(t_2) = 0 & D'_2(t_1) = 0 & D'_2(t_2) = 1 \end{array}$$

(b) Determine um polinômio cúbico $Q(t)$ tal que

$$Q_1(t_1) = +7 \quad Q_1(t_2) = +5 \quad Q'_1(t_1) = +2 \quad Q'_1(t_2) = -2$$

7. Seja K o arco da circunferência de raio 1 e centro na origem que está contido no primeiro quadrante.

(a) Descreva onde colocar os pontos de controle de modo a obter uma curva de Bézier que tem o mesmo início e término que o arco K, e mesmas retas tangentes nesses dois pontos. Quantos graus de liberdade restam nos pontos de controle depois de satisfazer essas restrições? Que efeito esses graus de liberdade têm sobre a curva?

(b) Determine onde colocar os pontos de controle de modo que, além de satisfazer as condições acima, a curva tenha seu ponto médio coincidente com o ponto médio do arco.

(c) Generalize a resposta para um arco de círculo que cobre θ radianos, do ponto $(1, 0)$ ao ponto $(\cos\theta, \sin\theta)$.

(d) Mostre onde colocar os pontos de controle de um retalho quadrangular de Bézier de modo a aproximar um quarto de cilindro de raio 1 e altura 1.