MC909 – Computação Gráfica

© Jorge Stolfi

Primeiro Semestre de 1995

Notas de Aula – Fascículo 4

Geometria Projetiva Tridimensional

4.1 Coordenadas homogêneas no espaço

4.1.1 Pontos

No *espaço projetivo orientado* $\mathbb{T}^3$, os pontos são todas as quádruplas $[w, x, y, z]$ de números reais, exceto $[0, 0, 0, 0]$, sendo que $[w, x, y, z]$ e $[\alpha w, \alpha x, \alpha y, \alpha z]$ denotam o mesmo ponto para todo $\alpha > 0$.

O *modelo padrão de* $\mathbb{T}^3$ que vamos usar no resto do curso é análogo ao modelo plano de $\mathbb{T}^2$. Ele consiste de duas cópias do espaço cartesiano $\mathbb{R}^3$, o *aquém* e o *além*; mais uma cópia da esfera $\mathbb{S}^2$, cada vetor unitário da qual representa um *ponto infinito* de $\mathbb{T}^3$. Veja a figura 4.1.

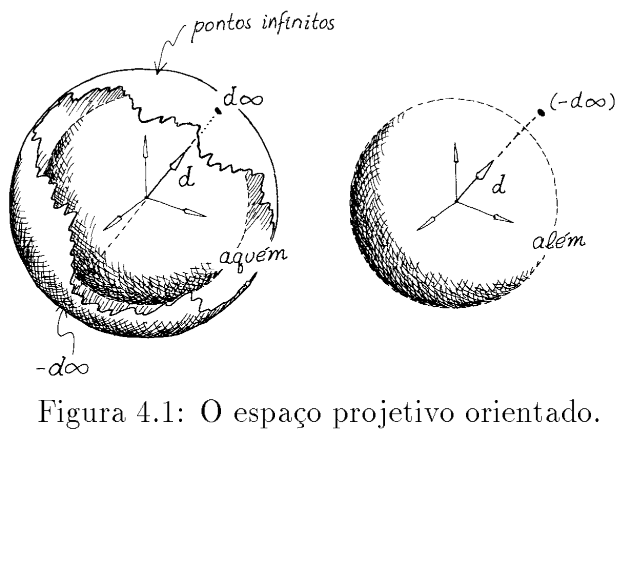

Figura 4.1: O espaço projetivo orientado.

Se $w > 0$, a quádrupla $[w, x, y, z]$ denota o ponto de coordenadas cartesianas $(x/w, y/w, z/w)$ do aquém; se $w < 0$, ela denota o mesmo ponto no além; se $w = 0$, ela denota o ponto infinito na direção do vetor (x, y, z).

Podemos pensar no aquém e no além como dois "universos paralelos" superpostos mas infinitamente distantes entre si. Mais precisamente, se $p = [w, x, y]$ é um ponto do aquém, podemos pensar no seu antípoda $\neg p = [-w, -x, -y]$ como um ponto "fantasma" que está na mesma posição de p, mas que só pode ser alcançado a partir deste por trajetórias que passam pelo infinito.

Como veremos a seguir, a maioria dos conceitos de geometria projetiva e das fórmulas homogêneas que conhecemos para o plano $\mathbb{T}^2$ pode ser estendida para o espaço tridimensional $\mathbb{T}^3$ (e, na verdade, n-dimensional) de maneira quase que mecânica.

Ex. 4.1: Traduza os seguintes pontos de coordenadas cartesianas para homogêneas:

(a) $(0, 0, 0)$ (b) $(1, 0, 0)$

(c) $(0, 1, 0)$ (d) $(5, 6, 2)$

Ex. 4.2: Traduza os seguintes pontos de coordenadas homogêneas para cartesianas:

(a) $[1, 0, 0, 0]$ (b) $[1, 1, 0, 0]$ (c) $[1, 0, 1, 0]$

(d) $[1, 2, 3, 4]$ (e) $[2, 5, 6, 8]$ (f) $[2, 0, 0, 0]$

Ex. 4.3: Escreva o ponto $(1/2, 3/5, 1/6)$ em coordenadas homogêneas *inteiras*.

Ex. 4.4: Dê as coordenadas homogêneas os pontos infinitos que, vistos do aquém, têm as direções dos três eixos cartesianos (X, Y, Z).

Ex. 4.5: Escreva as coordenadas homogêneas do ponto infinito cuja direção (em relação à origem do aquém) faz ângulos $\theta_x, \theta_y, \theta_z$ com os eixos cartesianos.

Ex. 4.6: Se v é um vetor de $\mathbb{R}^3$, sua *elevação* é o ângulo entre v e o plano $Z = 0$; e seu *azimute* é o ângulo entre o eixo cartesiano X

e a projeção ortogonal de v nesse plano. Escreva as coordenadas homogêneas do ponto de $\mathbb{R}^3$ que, em relação à origem, está a distância r, azimute θ, e elevação ϕ.

Ex. 4.7: Determine as coordenadas homogêneas do ponto infinito cuja direção, relativa ao aquém, tem azimute θ e elevação ϕ.

Ex. 4.8: (a) Descreva a trajetória do ponto $p(t) = [1, t, t^2, t^3]$ quando o parâmetro t varia de $-\infty$ a $+\infty$. (b) Que ponto de $\mathbb{T}^3$ pode ser considerado o limite de $p(t)$ quando t tende para $+\infty$? E quando t tende para $-\infty$?

4.1.2 O modelo esférico de $\mathbb{T}^3$

O espaço $\mathbb{T}^3$ também pode ser representado por um modelo esférico: especificamente, pela esfera tridimensional unitária de $\mathbb{R}^4$,

$$\mathbb{S}^3 = \left\{ (w, x, y, z) \; : \; w^2 + x^2 + y^2 + z^2 = 1 \right\}$$

sendo que o ponto $[w, x, y, z]$ de $\mathbb{T}^3$ corresponde ao ponto

$$\frac{(w, x, y, z)}{\sqrt{w^2 + x^2 + y^2 + z^2}}$$

de $\mathbb{S}^3$. Infelizmente, a esfera $\mathbb{S}^3$ não é um objeto fácil de visualizar, e portanto este modelo não é tão útil quanto o modelo esférico de $\mathbb{T}^2$. Sem falar que a correspondência geométrica entre os modelos esférico e plano de $\mathbb{T}^3$ é dada por projeção central em $\mathbb{R}^4$. Quem consegue enxergar este modelo provavelmente não precisa dele...

4.1.3 Planos

Um plano (orientado) de $\mathbb{T}^3$ é definido por quatro coeficientes reais $\langle \mathcal{W}, \mathcal{X}, \mathcal{Y}, \mathcal{Z} \rangle$; sendo que um ponto $[w, x, y, z]$ está nesse plano se e somente se

$$\mathcal{W}w + \mathcal{X}x + \mathcal{Y}y + \mathcal{Z}z = 0 \tag{4.1}$$

Ex. 4.9: Qual é a equação cartesiana do plano com coeficientes homogêneos $\langle 2, 3, 5, 7 \rangle$?

Ex. 4.10: Quais são os coeficientes homogêneos do plano cuja equação cartesiana é $3X - 2Y + 5Z = 6$?

Ex. 4.11: Quais são os coeficientes homogêneos dos planos cartesianos principais (XY, XZ, e YZ)?

Ex. 4.12: Determine as coordenadas homogêneas dos pontos onde o plano $\langle 2, 3, 5, 7\rangle$ cruza os eixos cartesianos X, Y, e Z.

Ex. 4.13: Determine as condições algébricas sobre os coeficientes $\langle \mathcal{W}, \mathcal{X}, \mathcal{Y}, \mathcal{Z}\rangle$ que caracterizam:

(a) planos perpendiculares ao eixo cartesiano Z;

(b) planos paralelos ao eixo Z;

(c) planos que contém o eixo Z;

(d) planos que passam pela origem do aquém.

4.1.4 Os dois lados de um plano

Um plano $\pi = \langle \mathcal{W}, \mathcal{X}, \mathcal{Y}, \mathcal{Z}\rangle$ separa os demais pontos de $\mathbb{T}^3$ em dois conjuntos, os *lados* do plano (*positivo* e *negativo*), que podem ser distinguidos pelo sinal da fórmula (4.1), denotado por $\pi \diamond p$.

Ex. 4.14: Calcule o valor das fórmulas abaixo:

(a) $\langle 2, 3, 5, 6\rangle \diamond [1, 1, -1, 0]$ (b) $\langle 2, 3, 5, 6\rangle \diamond [1, 1, 0, 0]$

(c) $\langle 2, 3, 5, 6\rangle \diamond [1, 1, 1, 1]$ (d) $\langle 1, 0, 0, 0\rangle \diamond [1, 0, 0, 0]$

(e) $\langle 1, 0, 0, 0\rangle \diamond [-1, 0, 0, 0]$ (f) $\langle a, b, c, d\rangle \diamond [a, b, c, d]$

Ex. 4.15: Qual o significado geométrico da condição $\mathcal{W} > 0$, para um plano $\langle \mathcal{W}, \mathcal{X}, \mathcal{Y}, \mathcal{Z}\rangle$?

Observe que o sinal $p \diamond \pi$ da fórmula (4.1) não se altera se multiplicarmos todos os coeficientes do plano pelo mesmo real $\alpha > 0$. Por outro lado, se multiplicarmos todos os coeficientes por -1, obteremos o *plano oposto* $\neg\pi$, que satisfaz $p \diamond (\neg\pi) = -(p \diamond \pi)$ para todo ponto p de $\mathbb{T}^3$.

Note que a quádrupla de coeficientes $\langle 0, 0, 0, 0\rangle$ não corresponde a nenhum plano, e portanto deve ser considerada inválida.

O plano $\Omega^2 = \langle 1, 0, 0, 0\rangle$, e seu oposto $\neg\Omega^2 = \langle -1, 0, 0, 0\rangle$, contêm todos os pontos infinitos (e apenas esses), e portanto são chamados de *planos no infinito* (a *esfera celeste* dos astrônomos). Em geral, a quádrupla $\langle \mathcal{W}, 0, 0, 0\rangle$ denota Ω^2 ou $\neg\Omega^2$, dependendo do sinal de $\mathcal{W}$.

Ex. 4.16: Quais são os lados positivo e negativo de Ω^2?

Os demais planos de $\mathbb{T}^3$ são ditos *ordinários*. Todo plano ordinário consiste de um plano euclidiano do aquém, sua imagem antípoda no além, e de todos os pontos infinitos com direções paralelas a esses planos.

Ex. 4.17: Descreva geometricamente os lados positivo e negativo de um plano ordinário.

Ex. 4.18: Determine três pontos infinitos, distintos e não antípodas entre si, no plano $\langle 2, 3, 5, 6\rangle$.

4.1.5 Retas no espaço

As retas de $\mathbb{T}^3$ podem ser divididas em dois tipos. Uma *reta no infinito* contêm todos (e apenas) os pontos infinitos em direções paralelas a um certo plano de $\mathbb{R}^3$. Uma *reta ordinária* consiste de uma reta cartesiana no aquém, da mesma reta no além, e dos pontos infinitos nas direções paralelas a essas retas. Veja a figura 4.2.

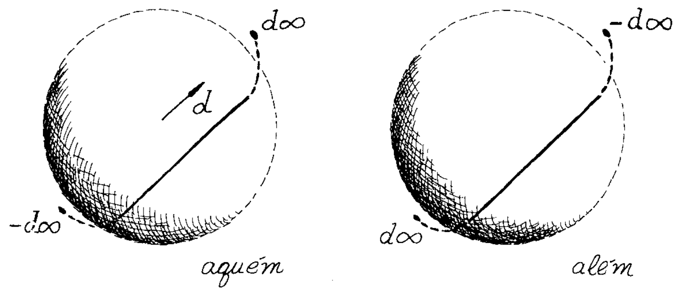

Figura 4.2: Uma linha reta no espaço projetivo orientado.

4.1.6 Incidência de pontos, retas, planos

As regras de incidência entre pontos, retas e planos de $\mathbb{T}^3$ são bastante regulares.

Em primeiro lugar, quaisquer dois planos não coincidentes (isto é, distintos e não opostos) se interceptam em exatamente duas retas opostas. Dualmente, por quaisquer dois pontos não coincidentes passam exatamente duas retas opostas.

Além disso, toda reta que não está contida num plano intercepta esse plano em dois pontos antípodas. Dados uma reta e um ponto fora da mesma, existem exatamente dois planos opostos que contém a ambos.

Finalmente, por quaisquer três pontos que não pertencem à mesma reta, passam exatamente dois planos opostos; e quaisquer três planos que não contenham uma reta comum têm exatamente dois pontos antípodas em comum.

Ex. 4.19: Descreva geometricamente:

(a) a intersecção de um plano ordinário com o plano Ω^2;

(b) a intersecção de uma reta ordinária com o plano Ω^2;

(c) a intersecção de dois planos ordinários;

(d) a intersecção de um plano ordinário com uma reta ordinária.

4.1.7 Orientação de quatro pontos

Dados quatro pontos $p_0, .. p_3$ de $\mathbb{T}^3$, onde $p_i = [w_i, x_i, y_i, z_i]$, definimos a *orientação* dos mesmos como sendo

$$\Delta(p_0, p_1, p_2, p_3) = \operatorname{sgn} \begin{vmatrix} w_0 & x_0 & y_0 & z_0 \\ w_1 & x_1 & y_1 & z_1 \\ w_2 & x_2 & y_2 & z_2 \\ w_3 & x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix} = 0 \tag{4.2}$$

Prova-se que os quatro pontos são coplanares se e somente se este determinante é zero.

Ex. 4.20: Determine a orientação relativa dos quatro pontos

$$[1,0,0,0] \quad [0,1,0,0] \quad [0,0,1,0] \quad [0,0,0,1]$$

Ex. 4.21: Prove que a função $\Delta(p_0, p_1, p_2, p_3)$, definida por (4.2), é zero se e somente se os quatro pontos pertencem a um mesmo plano.

Intuitivamente, para pontos no aquém, a fórmula (4.2) diz se a trajetória $p_0 \to p_1 \to p_2 \to p_3$ é uma hélice "direita" (como a da maioria dos parafusos) ou "esquerda"; isto é, se o triângulo $p_0 \to p_1 \to p_2$ roda no sentido anti-horário quando visto de p_3. Veja a figura 4.3. (Esta interpretação supõe que os eixos de $\mathbb{R}^3$ estão representados na posição costumeira, com o sentido de X para Y anti-horário quando visto de Z positivo.)

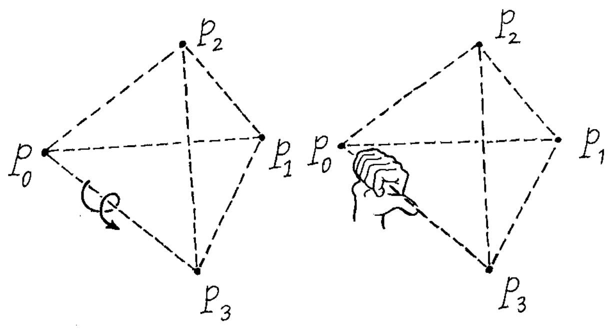

Figura 4.3: Orientação positiva de quatro pontos no espaço.

Ex. 4.22: (a) Mostre que a orientação de quatro pontos no espaço se inverte se trocarmos quaisquer dois pontos entre si. Assim, por exemplo,

$$\Delta(p_0, p_1, p_2, p_3) = -\,\Delta(p_0, p_3, p_2, p_1)$$

(b) Usando o resultado do item (a), mostre que uma permutação circular dos pontos também inverte sua orientação; isto é,

$$\Delta(p_0, p_1, p_2, p_3) = -\,\Delta(p_3, p_0, p_1, p_2)$$

Ex. 4.23: O que acontece com o valor de $\Delta(p_0, p_1, p_2, p_3)$ se trocarmos um dos pontos pelo seu antípoda? E se trocarmos todos os quatro pontos pelos seus antípodas?

4.1.8 Concorrência de quatro planos

Dualmente, dados quatro planos $\pi_i = \langle \mathcal{W}_i, \mathcal{X}_i, \mathcal{Y}_i, \mathcal{Z}_i \rangle$ $(i = 0\,..\,4)$, a condição para que eles sejam concorrentes — tenham um ponto em comum — é que o determinante

$$\begin{vmatrix} \mathcal{W}_0 & \mathcal{X}_0 & \mathcal{Y}_0 & \mathcal{Z}_0 \\ \mathcal{W}_1 & \mathcal{X}_1 & \mathcal{Y}_1 & \mathcal{Z}_1 \\ \mathcal{W}_2 & \mathcal{X}_2 & \mathcal{Y}_2 & \mathcal{Z}_2 \\ \mathcal{W}_3 & \mathcal{X}_3 & \mathcal{Y}_3 & \mathcal{Z}_3 \end{vmatrix} \tag{4.3}$$

seja nulo.

A interpretação geométrica do sinal deste determinante fica como um exercício para o leitor interessado `8-)`.

4.1.9 Orientações interna e externa de um plano

A *orientação externa* (ou *transversal*) de um plano é simplesmente a distinção entre seu lado positivo e negativo.

A partir da orientação externa de uma plano π, podemos definir sua *orientação interna* (ou *superficial*), que significa definir o sentido positivo de rotação sobre π, em torno de cada ponto do mesmo. Formalmente, se s é qualquer ponto no lado positivo de π, e p, q, r são três pontos de π tais que $\Delta(p, q, r, s) = +1$, então a orientação positiva, então o sentido positivo de rotação em π em torno do ponto p é o sentido em que o segmento pu gira quando u vai de q para r.

No caso de π ser um plano ordinário, podemos visualizar sua orientação externa como uma seta afixada a um ponto finito qualquer do plano, perpendicular a este, e dirigida do lado negativo para o positivo. A orientação interna de π pode ser vista como uma seta circular desenhada sobre o plano, em torno de um ponto qualquer do mesmo.

Neste caso, é importante notar que as setas que indicam a orientação interna de π no aquém são opostas às do além; e o mesmo vale para as setas de orientação externa. Veja a figura 4.4.

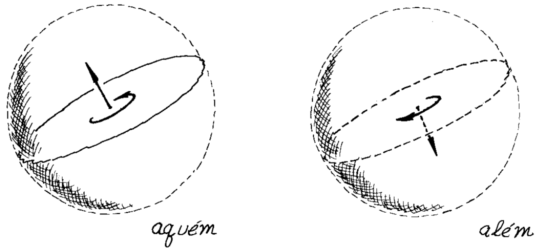

Figura 4.4: Orientações de um plano, no aquém e no além.

Ex. 4.24: Supondo que $\pi = \langle \mathcal{W}, \mathcal{X}, \mathcal{Y}, \mathcal{Z} \rangle$ seja um plano ordinário de $\mathbb{T}^3$, determine as coordenadas cartesianas de seu *vetor normal* — o vetor unitário de $\mathbb{R}^3$ que é perpendicular à parte finita de π, orientado no sentido do lado negativo para o lado positivo de π no aquém.

Ex. 4.25: Desenhe a posição do plano $\langle 3, 2, 1, 1 \rangle$ em relação aos eixos cartesianos do aquém. Indique a orientação interna e externa do mesmo.

Ex. 4.26: Dê os coeficientes homogêneos dos 6 planos que definem as faces do cubo $[-1 \,\_\, +1]^3$ de $\mathbb{R}^3$, orientados de forma a deixar o cubo no lado *negativo*. Indique a orientação interna dos mesmos.

4.1.10 Plano definido por três pontos

Por três pontos não-colineares p_0, p_1, p_2 de $\mathbb{T}^3$ passam exatamente dois planos, coincidentes e opostos. A partir da fórmula (4.3), deduz-se facilmente que um desses planos é $p_0 \vee p_1 \vee p_2 = \langle \mathcal{W}, \mathcal{X}, \mathcal{Y}, \mathcal{Z} \rangle$, onde

$$\begin{aligned}
\mathcal{W} &= +\begin{vmatrix} x_0 & y_0 & z_0 \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix} & \mathcal{X} &= -\begin{vmatrix} w_0 & y_0 & z_0 \\ w_1 & y_1 & z_1 \\ w_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix} \\
\mathcal{Y} &= +\begin{vmatrix} w_0 & x_0 & z_0 \\ w_1 & x_1 & z_1 \\ w_2 & x_2 & z_2 \end{vmatrix} & \mathcal{Z} &= -\begin{vmatrix} w_0 & x_0 & y_0 \\ w_1 & x_1 & y_1 \\ w_2 & x_2 & y_2 \end{vmatrix}
\end{aligned} \tag{4.4}$$

Segue imediatamente que o plano $\pi = p_0 \vee p_1 \vee p_2$, calculado pela fórmula acima, está orientado de tal maneira que $\pi \diamond p_3 = \Delta(p_0, p_1, p_2, p_3)$, para todo ponto p_3 de $\mathbb{T}^3$.

Ex. 4.27: Usando as fórmulas (4.4), calcule os coeficientes do plano que passa pelos três pontos $p_0 = [1, 2, 3, 4]$, $p_1 = [1, 1, 1, 1]$, $p_2 = [1, 3, 2, 4]$.

Ex. 4.28: Dê uma regra geométrica para determinar a orientação externa do plano $p_0 \vee p_1 \vee p_2$, definido pelas fórmulas (4.4), quando p_1, p_2, e p_3 são pontos do aquém.

Ex. 4.29: Seja K o cubo $[-1 \_ +1]^3$ de $\mathbb{R}^3$. Os vértices de K que tem um número ímpar de coordenadas negativas definem um tetraedro regular. Usando as fórmulas (4.4), determine os planos das faces desse tetraedro.

Ex. 4.30: Seja S o icosaedro regular cujos vértices tem coordenadas cartesianas $(\pm 1, \pm\phi, 0)$, $(0, \pm 1, \pm\phi)$, e $(\pm\phi, 0, \pm 1)$. (a) Determine o valor da constante ϕ, para que o icosaedro seja realmente regular. (b) Determine os coeficientes dos planos das faces de S.

4.1.11 Ponto definido por três planos

Dualmente, três planos que não contém uma reta comum tem exatamente dois pontos antipodais em comum. As coordenadas destes pontos podem ser obtidas por uma fórmula semelhante (na verdade, dual) à fórmula de $p_0 \vee p_1 \vee p_2$ acima. Especificamente, o ponto de encontro dos planos π_0, π_1, e π_2, onde $\pi_i = \langle \mathcal{W}_i, \mathcal{X}_i, \mathcal{Y}_i, \mathcal{Z}_i \rangle$, é $\pi_0 \wedge \pi_1 \wedge \pi_2 = [w, x, y, z]$, onde

$$
\begin{aligned}
w &= +\begin{vmatrix} \mathcal{X}_0 & \mathcal{Y}_0 & \mathcal{Z}_0 \\ \mathcal{X}_1 & \mathcal{Y}_1 & \mathcal{Z}_1 \\ \mathcal{X}_2 & \mathcal{Y}_2 & \mathcal{Z}_2 \end{vmatrix} & \qquad x &= -\begin{vmatrix} \mathcal{W}_0 & \mathcal{Y}_0 & \mathcal{Z}_0 \\ \mathcal{W}_1 & \mathcal{Y}_1 & \mathcal{Z}_1 \\ \mathcal{W}_2 & \mathcal{Y}_2 & \mathcal{Z}_2 \end{vmatrix} \\
y &= +\begin{vmatrix} \mathcal{W}_0 & \mathcal{X}_0 & \mathcal{Z}_0 \\ \mathcal{W}_1 & \mathcal{X}_1 & \mathcal{Z}_1 \\ \mathcal{W}_2 & \mathcal{X}_2 & \mathcal{Z}_2 \end{vmatrix} & \qquad z &= -\begin{vmatrix} \mathcal{W}_0 & \mathcal{X}_0 & \mathcal{Y}_0 \\ \mathcal{W}_1 & \mathcal{X}_1 & \mathcal{Y}_1 \\ \mathcal{W}_2 & \mathcal{X}_2 & \mathcal{Y}_2 \end{vmatrix}
\end{aligned}
\tag{4.5}
$$

Ex. 4.31: Usando as fórmulas (4.5), calcule os coeficientes do ponto de intersecção dos três planos $\pi_0 = \langle 1, 2, 3, 4 \rangle$, $\pi_1 = \langle 1, 1, 1, 1 \rangle$, $\pi_2 = \langle 1, 3, 2, 4 \rangle$.