MC538 - Análise de Algoritmos II
MC548 - Projeto e Análise de Algoritmos II
Semestre 2003-1 - Turma A
Prova 2 - 13/maio/2003

Nome

RA	**Assinatura**

Notas

A prova é individual e sem consulta.
Não são permitidos computadores ou calculadoras.
Não separe as folhas deste caderno de prova.
Não é permitido o uso de outro rascunho além destas folhas.
Escreva seu nome completo, e assine a tinta.
Valem apenas as respostas nos espaços indicados.
Nas questões com m escolhas, $m-1$ erradas anulam uma certa.
Respostas em branco não contam nem descontam.

1. Digamos que um número é *simpático* se ele contém três algarismos consecutivos que formam uma progressão aritmética (como 345, 048, 741, 333, etc.); e é *antipático* caso contrário. Por exemplo, 3<u>642</u>17 e 35<u>222</u>4 são simpáticos, enquanto que 001100 e 34621 são antipáticos. Elabore um algoritmo para determinar todos os números antipáticos com n algarismos (n dado), usando a técnica de enumeração exaustiva (*backtracking*).

   (a) Descreva o conjunto de estados (soluções parciais).

   (b) Descreva o estado inicial.

   (c) Defina os estados "filhos" de um estado genérico.

   (d) Defina os estados-folha.

   (e) Defina um critério para "poda" de sub-árvores.

As duas questões seguintes referem-se à abordagem divide-e-limita (*branch and bound*) para resolver o problema do caixeiro viajante: encontrar, num grafo dado G de n vértices, o caminho fechado de custo total mínimo que passa por todos os vértices. Suponha que um estado é uma seqüência de vértices $v_1, v_2, \ldots, v_m$ que forma um caminho P (fechado ou não) em G.

2. Qual destas possibilidades serviria como limitante inferior, para fins do algoritmo:

   (a) ☐ A soma dos custos das arestas do caminho P.

   (b) ☐ O custo da aresta de menor custo no caminho P.

   (c) ☐ A soma dos custos das arestas do caminho P, mais $(n-m)c_{\min}$ onde $c_{\min}$ é a menor aresta que não incide em nenhum vértice de P.

   (d) ☐ O custo da solução mais barata encontrada até o momento.

   (e) ☐ A soma das n arestas de menor custo do grafo G.

3. Qual destas funções poderia ser um limitante superior, para fins do algoritmo:

   (a) ☐ A soma dos custos das arestas do caminho P, mais a soma dos custos das $(n-m)$ arestas mais caras que não são incidentes a nenhum dos vértices internos $v_2, \ldots, v_{m-1}$ de P.

   (b) ☐ O custo da solução mais barata encontrada até o momento.

   (c) ☐ O custo da solução mais cara encontrada até o momento.

   (d) ☐ A soma dos custos das arestas do caminho P.

   (e) ☐ A soma dos custos das arestas que não estão no caminho P.

4. Considere um algoritmo de busca local para o problema do caixeiro viajante, usando a heurística "troca-duas-arestas" vista em classe. Quais dos estados abaixo seriam vizinhos do estado $(1, 4, 3, 2, 5, 6, 1)$:

   (a) ☐ $(1, 5, 3, 2, 4, 6, 1)$.
   (b) ☐ $(1, 5, 2, 3, 4, 6, 1)$.
   (c) ☐ $(1, 3, 4, 5, 2, 6, 1)$.
   (d) ☐ $(1, 3, 2, 4, 5, 6, 1)$.
   (e) ☐ $(1, 5, 6, 2, 4, 3, 1)$.

5. Considere a abordagem da busca local para resolver o problema da soma de subconjunto: dados n inteiros $v_1, v_2, \ldots, v_n$, e um inteiro S, encontrar um subconjunto X de $N = \{1, 2, \ldots, n\}$ tal que $\sum_{i \in X} v_i = S$. Suponha que um estado da busca é um subconjunto X qualquer de $\{1, 2, \ldots, n\}$, representado por um vetor binário $x_1, \ldots, x_n$, onde $x_i = 1$ se e somente se $i \in X$. Se for usada uma única heurística para gerar os vizinhos de um estado, qual das seguintes alternativas seria a mais promissora:

   (a) ☐ Escolher um $i \in N$ tal que $x_i = 0$, e fazer $x_i \leftarrow 1$.
   (b) ☐ Escolher $i, j \in N$ com $x_i = 0$ e $x_j = 1$, e fazer $x_i \leftarrow 1$, $x_j \leftarrow 0$.
   (c) ☐ Escolher qualquer $i \in N$ e inverter o valor de x_i.
   (d) ☐ Permutar ciclicamente o vetor x (isto é, fazer $t \leftarrow x_1$, $x_i \leftarrow x_i{+}1$ para $i = 1, .. n - 1$, e $x_n \leftarrow t$.
   (e) ☐ Escolher quaisquer $i, j \in N$ e inverter o valor de x_i e x_j.

6. Considere o problema da mochila binária: dados inteiros $V_{\min}$ e $T_{\max}$, e n itens com valores $v_1, v_2, \ldots, v_n$ e tamanhos (pesos) $t_1, t_2, \ldots, t_n$, encontrar um subconjunto X de $N = \{1, 2, \ldots, n\}$ tal que $\sum_{i \in X} v_i \geq V_{\min}$ e $\sum_{i \in X} t_i \leq T_{\max}$. Na heurística construtiva "gulosa" para este problema, vista em classe, os itens são considerados:

   (a) ☐ Em ordem decrescente da razão t_i/v_i.
   (b) ☐ Em ordem crescente da razão t_i/v_i.
   (c) ☐ Em ordem crescente da diferença $v_i - t_i$.
   (d) ☐ Em ordem crescente de tamanho t_i.
   (e) ☐ Em ordem crescente de valor v_i.

7. No problema de empacotamento de arquivos em volumes, deseja-se copiar n arquivos de tamanhos $t_1, t_2, \ldots, t_n$ para m volumes, cada um com capacidade L. A função objetivo, a ser maximizada, é o **número** de arquivos gravados. Considere o algoritmo visto em classe, para 2 volumes, e generalize-o para um número arbitrário m de volumes. Se Z_* é o valor da solução ótima, então o algoritmo generalizado A consegue uma aproximação Z_A tal que:

   (a) ☐ $|Z_* - Z_A| \leq 1$.
   (b) ☐ $|Z_* - Z_A| \leq \lfloor m/2 \rfloor$.
   (c) ☐ $|Z_* - Z_A| \leq m - 1$.
   (d) ☐ $Z_*/Z_A \leq 2$.
   (e) ☐ $Z_*/Z_A \leq 2 - 1/m$.

8. É dado um cadastro com n pessoas, que inclui as eventuais relações de parentesco entre elas, e deseja-se escolher m dessas pessoas que sejam todas parentes entre si. Considere uma formulação desse problema usando programação linear inteira, com variáveis binárias $x_1, x_2, \ldots, x_n$ para indicar se cada pessoa é escolhida ou não. Suponha montada uma matriz binária P tal que $P_{i,j} = 1$ se e somente se i é parente de j. Quais das seguintes desigualdades poderiam ser parte da formulação:

   (a) ☐ $x_i + x_j \leq 1 + P_{i,j}$ para todo i, j com $1 \leq i < j \leq n$.
   (b) ☐ $x_i + x_j \geq 1 + P_{i,j}$ para todo i, j com $1 \leq i < j \leq n$.
   (c) ☐ $\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=i+1}^{n} x_i x_j P_{i,j} \geq m(m-1)/2$.
   (d) ☐ $x_i + x_j \geq 1$ para todo i, j com $1 \leq i < j \leq n$ e $P_{i,j} = 1$.
   (e) ☐ $x_i x_j \leq 0$ para todo i, j com $1 \leq i < j \leq n$ e $P_{i,j} = 0$.