

INSTITUTO DE COMPUTAÇÃO - UNICAMP
Graduação
MC358-B Fundamentos Matemáticos da Computação
2022 - Semestre 2 - Jorge Stolfi
Exame Final - 2022-12-19

Nome legível

RA	Assinatura
----	------------

Item														TOT
Nota														

- A prova é individual e sem consulta.
Não são permitidos computadores ou calculadoras.
Desligue e guarde celulares, toca-músicas e outros dispositivos.
Não separe as folhas deste caderno de prova.
Não é permitido o uso de outro rascunho além destas folhas.
Escreva seu nome completo, e assine a tinta.
O resto da prova pode ser feito todo a lápis.
Valem apenas as respostas nos espaços indicados.
Não é necessário efetuar cálculos puramente numéricos.
Após distribuída a prova:
- quem sair da sala não poderá retornar.
 - depois que alguém sair, ninguém mais poderá entrar.

1. Sejam \mathbb{N} o conjunto dos naturais, e R o predicado tal que $R(m, n) \leftrightarrow "m + 2 \neq n"$. Em cada um dos itens abaixo, a frase em português deveria ser uma tradução fiel da fórmula simbólica. Identifique os erros de lógica **e de português** na frase, e escreva uma versão correta da mesma. Feito isso, diga se a frase é verdadeira ou falsa (não precisa justificar).

(a) $(\exists m \in \mathbb{N})(\forall n \in \mathbb{N}) R(m, n)$.

Existe pelo menos um natural m em que $m + 2 \neq n$, para um natural n qualquer.

resposta

V ou **F**?

(b) $(\forall m \in \mathbb{N})(\exists n \in \mathbb{N}) R(m, n)$.

Existe um n natural em que $m + 2 \neq n$, para cada natural m .

resposta

V ou **F**?

(c) $(\forall n \in \mathbb{N})(\exists m \in \mathbb{N}) R(m, n)$.

Existe pelo menos um m natural tal que um em todo n satisfaz $m + 2 \neq n$.

resposta

V ou **F**?

2. Suponha definidos

- H conjunto de todos os humanos,
- P conjunto de todos os pilantras ($P \subseteq H$),
- S predicado tal que $(\forall x, y \in H) S(x, y) \leftrightarrow$ “ x gosta de y ”.

Escreva as afirmações abaixo **usando notação simbólica apenas**:

(a) Quem é pilantra gosta de alguém que é pilantra.

resposta

(b) Quem é pilantra gosta de quem não é pilantra.

resposta

(c) Quem é pilantra não gosta de quem é pilantra.

resposta

(d) Quem é pilantra gosta de no máximo um pilantra.

resposta

(e) Quem é pilantra gosta de apenas um pilantra.

resposta

3. Prove, por indução, que todo inteiro maior ou igual a 12 é a soma de números primos maiores ou iguais a 5. Por exemplo, $12 = 5 + 7$, $17 = 17$, e $21 = 5 + 5 + 11$.

resposta

4. Os números de Fibonacci F_0, F_1, F_2, \dots são definidos pelas seguintes regras: $F_0 = 0$, $F_1 = 1$, e $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$ para todo número natural n maior ou igual a 2. Prove, por indução completa, que $(\forall n \in \mathbb{N}) F_n < (13/8)^n$.

resposta

5. Seja \mathcal{R} uma relação de A para B , \mathcal{S} uma relação de B para C , e \mathcal{T} uma relação de A para C . Em cada item abaixo, escreva uma fórmula da lógica de predicados (**sem palavras, usando apenas variáveis e símbolos, com todos os quantificadores necessários**), que expresse a afirmação dada.

(a) “A relação \mathcal{R} é antissimétrica.”

resposta

(b) “A relação \mathcal{R} é transitiva.”

resposta

(c) “ $\mathcal{T} = \mathcal{S} \circ \mathcal{R}$ ” (ou seja “ $\mathcal{T} = \mathcal{R}\mathcal{S}$ ”).

resposta

6. Suponha que X e Y são conjuntos, e $F \subseteq X \times Y$. Em cada item abaixo, escreva uma fórmula do cálculo de predicados que é verdadeira se e somente se F é.

(a) uma função de X para Y .

resposta

(b) uma função injetora de X para Y .

resposta

(c) uma permutação de X .

resposta

7. Seja \mathbb{P} o conjunto dos inteiros positivos, $\mathbb{P} = \mathbb{N} \setminus \{0\}$. Seja \mathcal{D} a relação sobre \mathbb{P} tal que

$$(\forall a, b \in \mathbb{P}) a \mathcal{D} b \leftrightarrow ((\forall k \in \mathbb{N}) 3^k | a \leftrightarrow 3^k | b)$$

Por exemplo $12 \mathcal{D} 30$, $28 \mathcal{D} 16$ e $18 \mathcal{D} 36$, mas $10 \not\mathcal{D} 12$ e $9 \not\mathcal{D} 39$.

A relação \mathcal{D} é de equivalência?

Em caso afirmativo, descreva as classes de equivalência de \mathcal{D} . Em caso negativo, mostre qual propriedade é violada.

resposta

8. Seja $A = 1..15$, e \mathcal{P} a relação sobre A tal que $x \mathcal{P} y$ se e somente se x é ímpar e y é par, ou ambos são ímpares e $x \mid y$, ou ambos são pares e $y \mid x$. Suponha provado que \mathcal{P} é uma relação de ordem sobre A .

(a) A relação \mathcal{P} é uma relação de ordem total? Justifique.

resposta

(b) Desenhe o diagrama de Hasse de \mathcal{P} .

resposta

(c) Determine os elementos mínimos, minimais, máximos, e maximais de \mathcal{P} .

resposta

9. Dizemos que o tamanho de uma imagem é (m, n) se ela tem m linhas, cada uma com n pixels. Seja A uma imagem de tamanho (m, n) , e sejam s, t dois inteiros positivos dados.

(a) Mostre como obter o tamanho (p, q) da maior imagem que cabe em A , tal que $p/q = s/t$. Por exemplo se $(m, n) = (22, 15)$, $s = 3$, e $t = 4$, então $(p, q) = (9, 12)$.

resposta

(b) Supondo determinados p, q do item (a), calcule o número k de sub-imagens desse tamanho que cabem em A sem sobreposição. No exemplo acima, $k = 2$ pois cabem 2 sub-imagens, uma acima da outra.

resposta

Importante: As respostas podem usar apenas as operações aritméticas $+$, $-$, \times e $/$ (esta última sendo divisão **real**, ou seja $7/2 = 3.5$), as funções piso e teto, e as funções $\max(x, y)$ e $\min(x, y)$. Podem usar variáveis e atribuições, mas não podem usar comandos de repetição.

10. Seja $H_n = \sum_{k=1}^n 1/k$. Usando apenas manipulação de somatórias, sem usar indução, prove que

$$\sum_{s=1}^{n-1} H_s = nH_n - n$$

Dica: mude a ordem das somatórias.

resposta