

1. 248295 Seja x um número real tal que $x + 1/x$ é inteiro. Prove por indução que, para todo natural n , $x^n + 1/x^n$ é um número inteiro.

2. 221329 Prove que todo número natural n pode ser escrito como soma ou diferença de zero ou mais potências *distintas* de 3. Por exemplo, $7 = 3^2 - 3^1 + 3^0$, $8 = 3^2 - 3^0$, $13 = 3^2 + 3^1 + 3^0$, $14 = 3^3 - 3^2 - 3^1 - 3^0$, etc.

3. 257337 Encontre o menor inteiro n_0 tal que $(\forall n \in \mathbb{N}) n \geq n_0 \rightarrow 1000 \cdot 2^n < 3^n$. Prove este fato por indução.

4. 195396 Seja A o conjunto de todas as cadeias de 3 letras minúsculas, e \mathcal{R} a relação sobre A talque $x\mathcal{R}y$ se e somente se as cadeias x e y diferem em exatamente uma posição. Por exemplo, $uva \mathcal{R} uma$ e $oox \mathcal{R} ooo$, mas $oox \not\mathcal{R} oxo$
 - a) Descreva a potência \mathcal{R}^2 (cuidado, não é simples).
 - b) Descreva a potência \mathcal{R}^3 .

5. 170553 Seja \mathcal{R} a relação sobre os inteiros positivos $\mathbb{P} = \mathbb{N} \setminus \{0\}$ tal que $x\mathcal{R}y$ se e somente se x é um fator **primo** de y .
 - a) Descreva a composição $\mathcal{R}^{-1} \circ \mathcal{R}$.
 - b) Descreva a composição $\mathcal{R} \circ \mathcal{R}^{-1}$.

6. 241727 Considere a relação \mathcal{R} sobre os inteiros positivos $\mathbb{P} = \mathbb{N} \setminus \{0\}$ tal que $x\mathcal{R}y$ se e somente se existe um fator primo de x que divide y . Essa relação é reflexiva? Simétrica? Transitiva? Justifique.

7. 225912 Seja x um número inteiro qualquer. Prove por indução em n que, para todo $n \in \mathbb{N}$, a potência x^n pode ser calculada com no máximo $\log_2(n + 1)$ multiplicações. (Note que $(x^k)^2 = x^{2k}$ e $x(x^k) = x^{k+1}$.)

8. 183955 Mostre que, para toda fórmula \mathcal{F} do cálculo de predicados, usando qualquer conjunto de variáveis lógicas, as contantes \mathbf{V} e \mathbf{F} , operadores lógicos \wedge , \vee , \neg , e parênteses, existe uma fórmula \mathcal{F}' , logicamente equivalente, que usa as mesmas variáveis e constantes mas apenas os operadores \rightarrow e \oplus e parênteses. Use indução completa sobre o número n de operadores lógicos da fórmula \mathcal{F} .