

1. 171734 Quais das seguintes propriedades de piso e teto são verdadeiras para quaisquer  $x, y$  reais e quaisquer  $m, n$  inteiros:
  - a)  $\lfloor x + y \rfloor = \lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor$
  - b)  $\lfloor x + n \rfloor = \lfloor x \rfloor + \lfloor n \rfloor$
  - c)  $\lfloor mx \rfloor = m \lfloor x \rfloor$
  - d)  $\lfloor x + 0.0001 \rfloor = \lfloor x \rfloor$
  - e)  $\lfloor x + 0.5 \rfloor \in \{\lfloor x \rfloor, \lceil x \rceil\}$
  - f)  $n = \lfloor n/3 \rfloor + \lceil 2n/3 \rceil$
  
2. 171929 Um cadastro de alunos é impresso em três colunas, com 50 nomes por coluna, em volumes de 60 páginas; exceto que a última coluna da última página está sempre em branco. Os alunos, as colunas, as páginas, e os volumes são numerados a partir de 1. Mostre como usar as funções piso e teto para determinar, dado o número do aluno,
  - a) o número  $c$  da coluna do aluno, dado que está na página 1 do volume 1;
  - b) o número  $c$  da coluna e o número  $p$  da página, dado que está no volume 1;
  - c) o número  $c$  da coluna, o número  $p$  da página, e o número  $v$  do volume.
  
3. 172209 Seja  $x$  um número inteiro qualquer. Prove por indução em  $n$  que, para todo  $n \in \mathbb{N}$ , a potência  $x^n$  pode ser calculada com no máximo  $\log_2(n + 1)$  multiplicações. (Note que  $(x^k)^2 = x^{2k}$  e  $x(x^k) = x^{k+1}$ .)
  
4. 224956 Para todo  $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ , seja  $f(n)$  o número de palavras (sequências de letras) de comprimento  $n$  que não tem duas letras consecutivas iguais. prove, por indução em  $n$ , que  $f(n) = 26 \cdot 25^{n-1}$
  
5. 222642 Seja  $A$  o intervalo inteiro 1..5, e sejam,  $\mathcal{R}$  e  $\mathcal{S}$  duas relações de  $A$  para  $A$ , representadas pelas matrizes booleanas  $M$  e  $N$ , respectivamente, com rótulos de linhas e colunas na ordem numérica. Seja  $B$  o produto das duas matrizes com a lógica booleana, com elementos  $\mathbf{V}$  e  $\mathbf{F}$ ; e seja  $P$  o produto calculado como em álgebra linear, cujos elementos são inteiros.
  - a) Dê um exemplo em que  $P$  tem uma entrada com valor 3.
  - b) O que o valor  $P_{ij}$  significa? Qual é a conexão entre  $B$  e  $P$ ?

6. **PULADO** Quais das seguintes fórmulas são verdadeiras para todo real  $x$  e todo real positivo  $d$ :
- a)  $\sin(\lfloor x \rfloor \pi) = 0$
  - b)  $\sin(x \bmod \pi) = \sin(x)$
  - c)  $\sin(\pi(x \bmod 2)) = \sin(\pi x)$
  - e)  $(x \bmod 1)^2 \leq (x \bmod 1)$
7. **222333** Seja  $\mathcal{R}$  a relação sobre  $\mathbb{N} \setminus \{0\}$  tal que  $x\mathcal{R}y$  se e somente se o menor algarismo de  $x$  é menor que o menor algarismo de  $y$ . Por exemplo  $57839 \mathcal{R} 5487$ . Esta relação é
- a) Uma relação de ordem?
  - b) Uma relação de ordem estrita?
  - c) Uma relação de ordem total?
  - e) Uma relação de ordem estrita total?
8. **216414** Prove por indução que todo inteiro  $x$  no intervalo  $0..3^n - 1$  pode ser escrito em base 3 com  $n$  algarismos 0, 1, ou 2.