Bases para Splines Polinomiais Não-Homogêneos C_k na Esfera

Anamaria Gomide e Jorge Stolfi

Relatório Técnico IC–97-10

Agosto de 1997

Bases para Splines Polinomiais Não-Homogêneos $\mathbf{C}_k$ na Esfera

Anamaria Gomide e Jorge Stolfi*

Abstract: We investigate the use of non-homogeneous spherical polynomials for the approximation of functions defined on the sphere $\mathbf{S}^2$. A *spherical polynomial* is the restriction to $\mathbf{S}^2$ of a polynomial in the three coordinates x, y, z of $\mathbf{R}^3$. Let $\mathcal{P}^d$ be the space of spherical polynomials with degree $\leq d$. We show that $\mathcal{P}^d$ is the direct sum of $\mathcal{H}^d$ and $\mathcal{H}^{d-1}$, where $\mathcal{H}^d$ denotes the space of *homogeneous* degree-d polynomials in x, y, z.

We also generalize this result to splines defined on a geodesic triangulation T of the sphere. Let $\mathcal{P}^d_k[T]$ denote the space of all functions f from $\mathbf{S}^2$ to $\mathbf{R}$ such that (1) the restriction of f to each triangle of T belongs to $\mathcal{P}^d$; and (2) the function f has order-k continuity across the edges of T. Analogously, let $\mathcal{H}^d_k[T]$ denote the subspace of $\mathcal{P}^d_k[T]$ consisting of those functions that are $\mathcal{H}^d$ within each triangle of T. We show that $\mathcal{P}^d_k[T] = \mathcal{H}^d_k[T] \oplus \mathcal{H}^{d-1}_k[T]$. Combined with results of Alfeld, Neamtu and Schumaker on bases of $\mathcal{H}^d_k[T]$ this decomposition provides on effective characterization of the bases of $\mathcal{P}^d_k[T]$.

There has been considerable interest recently in the use of the homogeneous spherical splines $\mathcal{H}^d_k[T]$ as approximations for functions defined on $\mathbf{S}^2$. We argue that the non-homogeneous splines $\mathcal{P}^d_k[T]$ would be a more natural choice for that purpose.

Keywords: Spherical splines, homogeneous splines, spline basis, approximation on the sphere.

*Instituto de Computação, Universidade Estadual de Campinas, 13081-970 Campinas SP. Pesquisa desenvolvida com suporte financeiro parcial do CNPq — Conselho Nacional de Desnvolvimento Científico e Tecnológico sob projeto 301016/92-5

Sumário: Investigamos o uso de polinômios esféricos não homogêneos para a aproximação de funções definidas na esfera $\mathbf{S}^2$. Um *polinômio esférico* é a restrição a $\mathbf{S}^2$ de um polinômio nas três coordenadas x, y, z de $\mathbf{R}^3$. Seja $\mathcal{P}^d$ o espaço de polinômios esféricos com grau $\leq d$. Mostramos que $\mathcal{P}^d$ é a soma direta de $\mathcal{H}^d$ e $\mathcal{H}^{d-1}$, onde $\mathcal{H}^d$ denota o espaço de polinômios *homogêneos* de grau d em x, y, z.

Estendemos também esse resultado aos *splines* definidos numa triangulação geodésica T sobre a esfera. Seja $\mathcal{P}^d_k[T]$ o espaço de todas as funções f de $\mathbf{S}^2$ em $\mathbf{R}$ tais que (1) a restrição de f a cada triângulo de T pertence a $\mathcal{P}^d$; e (2) a função f tem continuidade de ordem k através das arestas de T. Analogamente, seja $\mathcal{H}^d_k[T]$ o sub-espaço de $\mathcal{P}^d_k[T]$ que consiste das funções que são $\mathcal{H}^d$ em cada triângulo de T. Nós mostramos que $\mathcal{P}^d_k[T] = \mathcal{H}^d_k[T] \oplus \mathcal{H}^{d-1}_k[T]$. Combinada com os resultados de Alfeld, Neamtu and Schumaker sobre as bases de $\mathcal{H}^d_k[T]$, esta decomposição proporciona uma caracterização efetiva das bases de $\mathcal{P}^d_k[T]$.

Recentemente tem havido bastante interesse no uso dos *splines* homogêneos esféricos $\mathcal{H}^d_k[T]$ como aproximadores para funções definidas em $\mathbf{S}^2$. Argumentamos que os *splines* não homogêneos $\mathcal{P}^d_k[T]$ seriam uma escolha mais natural para esse fim.

Palavras Chaves: Splines esféricos, splines homogêneos, base de splines, aproximação na esfera.

1 Introdução

Em muitas aplicações necessitamos modelar ou aproximar funções reais definidas sobre a esfera $\mathbf{S}^2$. Podemos citar como exemplo geofísica, metereologia, computação gráfica etc. Em tais aplicações é comum representar uma função na esfera em termos de coordenadas esféricas (ϕ, θ), longitude e latitude respectivamente. Estas funções podem ser polinômios em ϕ, θ, ou harmônicos esféricos até certa ordem.

Nestas representações alguns problemas são detectados: descontinuidade nos polos, as geodésicas são representadas por curvas complexas, a correspondência entre o domínio (ϕ, θ) e a esfera é não uniforme. Estes problemas dificultam a construção de malhas irregulares e adaptativas. Por estas razões tem havido recentemente interesse na modelagem de funções esféricas "in situ", isto é, vistas como funções das coordenadas cartesianas espaciais (x, y, z), restritas à esfera.

Alfeld, Neamtu e Schumaker [1, 2, 3] propuseram o uso de uma classe particular de funções, os *splines esféricos homogêneos* $\mathcal{H}_k^d[T]$, como espaço de aproximação de funções definidas em $\mathbf{S}^2$. Neste trabalho nós definimos uma classe alternativa, os *splines polinomiais esféricos* $\mathcal{P}_k^d[T]$. Nós mostramos que $\mathcal{P}_k^d[T] = \mathcal{H}_k^d[T] \oplus \mathcal{H}_k^{d-1}[T]$ e obtemos também uma caracterização das bases de $\mathcal{P}_k^d[T]$. Acreditamos que o espaço $\mathcal{P}_k^d[T]$ é uma escolha mais natural para aproximar funções definidas na esfera $\mathbf{S}^2$, já que $\mathcal{P}_k^r[T] \subseteq \mathcal{P}_k^d[T]$ quando $r \leq d$.

2 Espaços de polinômios no $\mathbf{R}^n$

Seja $\mathcal{P}^{d,n}$ o espaço dos polinômios em $\mathbf{R}^n$ de grau $\leq d$. Se um polinômio p pertence a $\mathcal{P}^{d,n}$ então p é da forma

$$p(x) = \sum_{0 \leq i_1 + i_2 + \ldots + i_n \leq d} c_{i_1 i_2 \ldots i_n} x_1^{i_1} x_2^{i_2} \ldots x_n^{i_n}$$

para todo $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbf{R}^n$, onde $c_{i_1 i_2 \ldots i_n}$ são coeficientes reais. (Todos os índices neste trabalho são inteiros positivos ou nulos). O conjunto $\mathcal{P}^{d,n}$ é um espaço vetorial e

$$\dim \mathcal{P}^{d,n} = \begin{pmatrix} d+n \\ n \end{pmatrix}$$

Diz-se que uma função f de $\mathbf{R}^n$ para $\mathbf{R}$ é *homogênea de grau* m se $f(ax) = a^m f(x)$, para todo $a \in \mathbf{R}$ e $x \in \mathbf{R}^n$. Seja $\mathcal{H}^{d,n}$ o sub-espaço de $\mathcal{P}^{d,n}$ que consiste dos polinômios de $\mathbf{R}^n$ para $\mathbf{R}$ que são homogêneos de grau d. Todo polinômio deste conjunto tem a forma

$$h(x) = \sum_{i_1 + i_2 + \ldots + i_n = d} c_{i_1 i_2 \ldots i_n} x_1^{i_1} x_2^{i_2} \ldots x_n^{i_n}$$

onde $c_{i_1 i_2 \ldots i_n}$ são coeficientes reais. Podemos concluir então que

$$\dim \mathcal{H}^{d,n} = \begin{pmatrix} d+n-1 \\ n-1 \end{pmatrix}$$

É fácil ver que, se $d \neq d'$, os espaços $\mathcal{H}^{d,n}$ e $\mathcal{H}^{d',n}$ são linearmente independentes, isto é, $\mathcal{H}^{d,n} \cap \mathcal{H}^{d',n} = \{0\}$.

3 Espaços de polinômios em $\mathbf{S}^2$

Se f é uma função definida no $\mathbf{R}^n$, e $X \subseteq \mathbf{R}^n$, denotamos por f/X a restrição de f ao conjunto X. Por extensão, definimos a restrição de um espaço de funções $\mathcal{F}$ ao conjunto X como sendo

$$\mathcal{F}/X = \{\ f/X : f \in \mathcal{F}\ \}$$

Vamos também utilizar a seguinte notação: se $f/X = g/X$, escrevemos $f \equiv g \pmod{X}$; ou apenas $f \equiv g$, quando X estiver implícito no contexto. É fácil ver que '$\equiv$' é uma relação de equivalência.

Estamos interessados no espaço $\mathcal{P}^{d,n}/\mathbf{S}^{n-1}$ que são as funções polinomiais de $\mathbf{R}^n$ restritas à esfera unitária $\mathbf{S}^{n-1} = \{\ x \in \mathbf{R}^n : |x| = 1\ \}$. Este espaço é formado, portanto, por polinômios de grau $\leq d$ módulo $\mathbf{S}^{n-1}$. Os elementos pertencentes a este conjunto são da forma:

$$p(x) = \sum_{0 \leq i_1+i_2+\ldots+i_n \leq d} c_{i_1 i_2 \ldots i_n} x_1^{i_1} x_2^{i_2} \ldots x_n^{i_n}$$

onde $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbf{S}^{n-1}$ e $c_{i_1 i_2 \ldots i_n} \in \mathbf{R}$.

Observe que polinômios que são distintos no $\mathbf{R}^n$ podem ser idênticos quando restritos à esfera $\mathbf{S}^{n-1}$. Portanto, $\mathcal{P}^{d,n}/\mathbf{S}^{n-1}$ tem dimensão menor que $\mathcal{P}^{d,n}$. O teorema abaixo é fundamental para a caracterização desse espaço:

Teorema 1 *Todo polinômio de $\mathcal{P}^{d,n}$, $n \geq 1$, é equivalente a um único polinômio de $\mathcal{H}^{d-1,n} \oplus \mathcal{H}^{d,n} \pmod{\mathbf{S}^{n-1}}$.*

Demonstração:

Existência:

Seja $p \in \mathcal{P}^{d,n}$. Então

$$p(x) = \sum_{0 \leq i_1+i_2+\ldots+i_n \leq d} c_{i_1 i_2 \ldots i_n} x_1^{i_1} x_2^{i_2} \ldots x_n^{i_n}$$

Vamos mostrar que os termos de p com grau $\leq d-2$ podem ser transformados em termos de grau d e $d-1$. Seja $c_{i_1 i_2 \ldots i_n} x_1^{i_1} x_2^{i_2} \ldots x_n^{i_n}$ um termo de p tal que $i_1 + i_2 + \ldots + i_n = k \leq d-2$. Como $x \in \mathbf{S}^{n-1}$ temos que $x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^n = 1$. Então,

$$c_{i_1 i_2 \ldots i_n} x_1^{i_1} x_2^{i_2} \ldots x_n^{i_n} = c_{i_1 i_2 \ldots i_n} x_1^{i_1} x_2^{i_2} \ldots x_n^{i_n}(x_1^2 + x_2^2 + \ldots x_n^2)$$

Desta maneira, um termo de grau $k \leq d-2$ pode ser substituído por n termos de grau $k+2 \leq d$, mantendo a equivalência do polinômio módulo $\mathbf{S}^{n-1}$. Repetindo este processo enquanto houver termos de grau $\leq d-2$ obtemos um polinômio com termos de grau d e $d-1$.

Portanto, existe um $q \in \mathcal{H}^{d-1,n} \oplus \mathcal{H}^{d,n}$ tal que $p \equiv q \pmod{\mathbf{S}^{n-1}}$.

Unicidade:

Suponhamos que existem $q_1, q_2 \in \mathcal{H}^{d-1,n} \oplus \mathcal{H}^{d,n}$ com $q_1 \equiv p$ e $q_2 \equiv p$. Como $\equiv$ é transitiva, devemos ter $q_1 \equiv q_2$, isto é

$$(q_1 - q_2)/\mathbf{S}^{n-1} = 0$$

Como $\mathbf{S}^{n-1}$ é uma variedade algébrica [5, 4], a equação mínima de $\mathbf{S}^{n-1}$ deve ser um fator de $q_1 - q_2$, isto é,

$$q_1 - q_2 = R(x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2 - 1)$$

onde R é algum polinômio em $\mathbf{R}^n$ de grau $n-2$. Como os graus dos termos do polinômio $x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2 - 1$ diferem de 2 e, por outro lado,

$$q_1 - q_2 \in \mathcal{H}^{d-1,n} \oplus \mathcal{H}^{d,n}$$

concluímos que $R = 0$. □

Corolário 1 *Se $p, q \in \mathcal{H}^{d-1,n} \oplus \mathcal{H}^{d,n}$ e $p \equiv q \pmod{\mathbf{S}^{n-1}}$, então $p = q$.*

Portanto, podemos concluir que

$$\mathcal{H}^{d-1,n}/\mathbf{S}^{n-1} \cap \mathcal{H}^{d,n}/\mathbf{S}^{n-1} = \{0\}$$

e, por conseguinte,

$$\mathcal{P}^{d,n}/\mathbf{S}^{n-1} = (\mathcal{H}^{d-1,n} \oplus \mathcal{H}^{d,n})/\mathbf{S}^{n-1} = \mathcal{H}^{d-1,n}/\mathbf{S}^{n-1} \oplus \mathcal{H}^{d,n}/\mathbf{S}^{n-1}$$

Logo,

$$\dim((\mathcal{H}^{d-1,n} \oplus \mathcal{H}^{d,n})/\mathbf{S}^{n-1}) = \dim(\mathcal{H}^{d-1,n} \oplus \mathcal{H}^{d,n}) = \binom{d+n-1}{n}$$

4 Funções polinomiais por partes em $\mathbf{S}^2$

Vamos agora estender o teorema 1 a funções polinomiais por partes definidas sobre a esfera $\mathbf{S}^2$. Seja T uma decomposição de $\mathbf{R}^3$ em triedros $T_1, T_2, \ldots, T_n$, com interior não vazio e com vértices na origem. Observe que o conjunto $T_i \cap \mathbf{S}^2$, para $1 \le i \le n$, é um triângulo esférico. Portanto, T determina sobre $\mathbf{S}^2$ uma triangulação, que denotaremos por $T/\mathbf{S}^2$.

Para tal triangulação T, definimos os seguintes espaços de funções de $\mathbf{R}^3$ para $\mathbf{R}$:

$$\begin{aligned} \mathcal{P}^d[T] &= \{\, p : (\forall i)\ p/T_i \in \mathcal{P}^{d,3}/T_i \,\} \\ \mathcal{H}^d[T] &= \{\, h : (\forall i)\ h/T_i \in \mathcal{H}^{d,3}/T_i \,\} \end{aligned}$$

Pelo teorema 1, concluímos imediatamente que

$$\mathcal{P}^d[T]/\mathbf{S}^2 = \mathcal{H}^{d-1}[T]/\mathbf{S}^2 + \mathcal{H}^d[T]/\mathbf{S}^2$$

Mais ainda, podemos mostrar o seguinte:

Teorema 2 *Se* $p, q \in \mathcal{H}^{d-1}[T] + \mathcal{H}^{d}[T]$, *então* $p \equiv q \pmod{\mathbf{S}^2}$ *sse* $p = q$.

Demonstração:

Sejam p, $q \in \mathcal{H}^{d-1}[T] + \mathcal{H}^{d}[T]$. Para todo $i \in \{1 \ldots n\}$, sejam $p_i, q_i \in \mathcal{H}^{d-1,3} + \mathcal{H}^{d,3}$ tais que $p/T_i = p_i/T_i$ e $q/T_i = q_i/T_i$. Então, como $p \equiv q$, temos também que

$$p_i/(\mathbf{S}_2 \cap T_i) = q_i/(\mathbf{S}^2 \cap T_i)$$

e, portanto,

$$(p_i - q_i)/(\mathbf{S}^2 \cap T_i) = 0$$

Como $T_i \cap \mathbf{S}^2$ é um subconjunto de $\mathbf{S}^2$ com dimensão 2, e $\mathbf{S}^2$ é uma variedade irredutível de $\mathbf{R}^3$, concluímos que $(p_i - q_i)/\mathbf{S}^2 = 0$. Pelo corolário 1,

$$p_i - q_i = 0$$

Como esta igualdade vale para todo triedro T_i, concluímos que $p = q$. $\square$

Deste teorema seguem:

Corolário 2

$$\mathcal{H}^{d-1}[T]/\mathbf{S}^2 \cap \mathcal{H}^{d}[T]/\mathbf{S}^2 = \{0\}/\mathbf{S}^2$$

Corolário 3

$$\mathcal{P}^{d}[T]/\mathbf{S}^2 = \mathcal{H}^{d-1}[T]/\mathbf{S}^2 \oplus \mathcal{H}^{d}[T]/\mathbf{S}^2$$

5 Restrições de continuidade

Finalmente, vamos estender estes resultados a funções polinomiais por partes, sujeitas a restrições de continuidade nas fronteiras entre as partes.

Para uma decomposição T de $\mathbf{R}^3$ em triedros não degenerados, como na seção 4, definimos os espaços:

$$\begin{aligned}
\mathcal{P}^{d}_{k}[T] &= \{\, p : p \in \mathcal{P}^{d}[T] \ \wedge\ p/\mathbf{S}^2 \in \mathbf{C}_k(\mathbf{S}^2) \,\} \\
\mathcal{H}^{d}_{k}[T] &= \{\, h : h \in \mathcal{H}^{d}[T] \ \wedge\ h/\mathbf{S}^2 \in \mathbf{C}_k(\mathbf{S}^2) \,\}
\end{aligned}$$

onde $\mathbf{C}_k(\mathbf{S}^2)$ é o espaço de funções de classe $\mathbf{C}_k$ (contínuas e diferenciáveis k vezes) na esfera.

Vamos considerar primeiro o espaço $\mathcal{P}_1^d[T]/\mathbf{S}^2$. O teorema a seguir fornece uma caracterização deste espaço.

Teorema 3

$$\mathcal{P}_1^d[T]/\mathbf{S}^2 = \mathcal{H}_1^{d-1}[T]/\mathbf{S}^2 \oplus \mathcal{H}_1^d[T]/\mathbf{S}^2$$

Ou seja, a imposição de continuidade $\mathbf{C}_1(\mathbf{S}^2)$ sobre $\mathcal{P}_1^d[T]$ equivale a imposições independentes de continuidade $\mathbf{C}_1(\mathbf{S}^2)$ sobre os sub-espaços $\mathcal{H}_1^{d-1}[T]$ e $\mathcal{H}_1^d[T]$.

Demonstração:

($\supseteq$): Trivial.

($\subseteq$): Sejam $p \in \mathcal{P}_1^d[T]/\mathbf{S}^2$, T_i e T_j triedros adjacentes de T, p_i e p_j funções de $\mathcal{P}^{d,3}$ tais que $p/T_i = p_i/T_i$ e $p/T_j = p_j/T_j$. Pelo corolário 3,

$$p = h^d + h^{d-1}$$

com $h^d \in \mathcal{H}^d[T]/\mathbf{S}^2$ e $h^{d-1} \in \mathcal{H}^{d-1}[T]/\mathbf{S}^2$. (Note que "$d$" é índice e não expoente.) Uma vez que $p/T_i = p_i/T_i$, p_i pode ser escrito como

$$p_i = h_i^d + h_i^{d-1}$$

onde $h_i^d/T_i \in \mathcal{H}^{d,3}/T_i$ e $h_i^{d-1}/T_i \in \mathcal{H}^{d-1,3}/T_i$. Analogamente,

$$p_j = h_j^d + h_j^{d-1}$$

onde $h_j^{d-1}/T_j \in \mathcal{H}^{d-1,3}/T_j$ e $h_j^d/T_j \in \mathcal{H}^{d,3}/T_j$.

Seja w o arco comum aos triângulos esféricos $T_i \cap \mathbf{S}^2$ e $T_j \cap \mathbf{S}^2$, e seja c o círculo que contém o arco w. Uma vez que $p \in \mathbf{C}_0(\mathbf{S}^2)$, temos $p/w = p_i/w = p_j/w$, e portanto $(p_i - p_j)/w = 0$. Como w é um subconjunto de c de dimensão 1, e c é uma variedade irredutível, concluímos que $(p_i - p_j)/c = 0$.

Podemos, sem perda de generalidade, supor que c é o círculo $x^2 + y^2 = 1$ contido no plano π de equação $z = 0$. Uma vez que $(p_i - p_j)/\pi \in \mathcal{P}^{d,2}$ e $(p_i - p_j)/c = 0$, podemos, pelo corolário 2, concluir que

$$\begin{aligned}(h_i^d - h_j^d)/c &= 0\\ (h_i^{d-1} - h_j^{d-1})/c &= 0\end{aligned}$$

Portanto,

$$\begin{aligned}h_i^d/c &= h_j^d/c\\ h_i^{d-1}/c &= h_j^{d-1}/c\end{aligned}$$

Como $p \in \mathbf{C}_1(\mathbf{S}^2)$, então

$$\frac{\partial p}{\partial z}/w = \frac{\partial p_i}{\partial z}/w = \frac{\partial p_j}{\partial z}/w$$

Portanto,

$$\frac{\partial(p_i - p_j)}{\partial z} / w = 0$$

Pela irredutibilidade de c, concluímos que

$$\frac{\partial(p_i - p_j)}{\partial z} / c = 0$$

Uma vez que

$$\frac{\partial(p_i - p_j)}{\partial z} / \pi \in \mathcal{P}^{d-1,2}$$

podemos usar o corolário 2 para concluir que

$$\begin{aligned} \frac{\partial(h_i^d - h_j^d)}{\partial z} / c &= 0 \\ \frac{\partial(h_i^{d-1} - h_j^{d-1})}{\partial z} / c &= 0 \end{aligned}$$

Logo,

$$\begin{aligned} \frac{\partial h_i^d}{\partial z} / c &= \frac{\partial h_j^d}{\partial z} / c \\ \frac{\partial h_i^{d-1}}{\partial z} / c &= \frac{\partial h_j^{d-1}}{\partial z} / c \end{aligned}$$

Ou seja, $h^d \in \mathcal{H}_1^d[T]$ e $h^{d-1} \in \mathcal{H}_1^{d-1}[T]$ □

Podemos generalizar este resultado para funções polinomiais por partes com continuidade $k > 1$, observando que a derivada parcial de ordem r de uma função de $\mathcal{P}_k^d[T]$ (ou $\mathcal{H}_k^d[T]$), é uma função de $\mathcal{P}_{k-r}^{d-r}[T]$ (ou $\mathcal{H}_{k-r}^{d-r}[T]$). Concluímos portanto

Teorema 4

$$\mathcal{P}_k^d[T]/\mathbf{S}^2 = \mathcal{H}_k^{d-1}[T]/\mathbf{S}^2 \oplus \mathcal{H}_k^d[T]/\mathbf{S}^2$$

6 Conclusão

Os resultados acima mostram que $\mathcal{P}_k^d[T]/\mathbf{S}^2$, o espaço de funções polinomiais por partes restritas à esfera com continuidade de ordem k, é a soma direta dos espaços $\mathcal{H}_k^d[T]$ e $\mathcal{H}_k^{d-1}[T]$, restritos a $\mathbf{S}^2$.

Alfeld, Neamtu e Schumaker [1, 2, 3] conseguiram uma caracterização das bases de $\mathcal{H}_k^d[T]$, em termos dos polinômios de Bernstein-Bézier. Combinando este resultado com o teorema 4, é possivel obter uma caracterização efetiva das bases de $\mathcal{P}_k^d[T]/\mathbf{S}^2$.

Acreditamos que o espaço $\mathcal{P}_k^d[T]/\mathbf{S}^2$ é melhor do que $\mathcal{H}_k^d[T]/\mathbf{S}^2$ para fins de aproximação de funções sobre a esfera. Em particular, $\mathcal{P}_k^d[T]$ inclui as funções que são constantes sobre $\mathbf{S}^2$, para todo d; enquanto $\mathcal{H}_k^d[T]$ só contem tais funções quando d é par.

Referências

[1] Peter Alfeld, Marian Neamtu, and Larry L. Schumaker. Bernstein-Bézier polynomials on circle, spheres, and sphere-like surfaces. *Computer Aided Geometric Design Journal*, 13:333–349, 1996.

[2] Peter Alfeld, Marian Neamtu, and Larry L. Schumaker. Dimension and local bases of homogeneous spline spaces. *SIAM Journal of Mathematical Analysis*, 27(5):1482–1501, September 1996.

[3] Peter Alfeld, Marian Neamtu, and Larry L. Schumaker. Fitting scattered data on sphere-like surfaces using spherical splines. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 73:5–43, 1996.

[4] W. Fulton. *Algebraic Curves: An Introduction to Algebraic Geometry.* W. A. Benjamin, 1969.

[5] E. Kunz. *Introduction to Commutative Algebra and Algebraic Geometry.* Birkhauser, 1993.