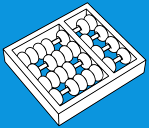
Cortes, conexidade, árvores e grafos bipartidos

MC558 - Projeto e Análise de Algoritmos II

02

08/24



Santiago Valdés Ravelo
https://ic.unicamp.br/~santiago/
ravelo@unicamp.br

UNICAMP

"Os grafos importantes são aqueles onde algumas coisas não estão conectadas a outras."

Eliezer Yudkowsky

Cortes e conexidade

Cortes

Seja $G = (\mathbf{V}, \mathbf{E})$ um grafo e seja $\mathbf{S} \subset \mathbf{V}$.

Cortes

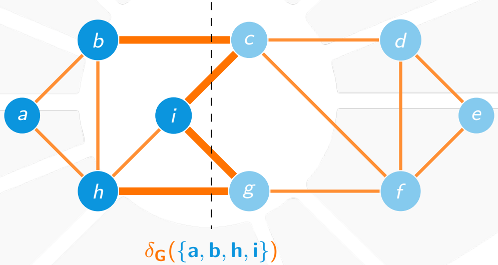
Seja $G = (\mathbf{V}, \mathbf{E})$ um grafo e seja $\mathbf{S} \subset \mathbf{V}$.

O **CORTE** de G induzido por $\mathbf{S}$ é o conjunto de arestas de G com um extremo em $\mathbf{S}$ e outro em $\mathbf{V} \setminus \mathbf{S}$ e o denotamos por $\delta_{\mathbf{G}}(\mathbf{S})$.

Cortes

Seja $G = (\mathbf{V}, \mathbf{E})$ um grafo e seja $\mathbf{S} \subset \mathbf{V}$.

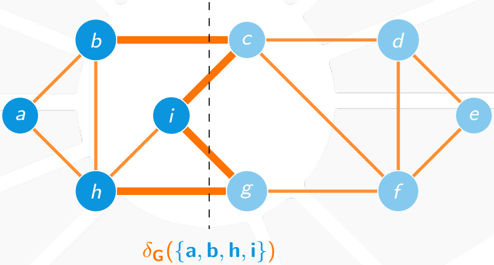
O **CORTE** de G induzido por $\mathbf{S}$ é o conjunto de arestas de G com um extremo em $\mathbf{S}$ e outro em $\mathbf{V} \setminus \mathbf{S}$ e o denotamos por $\delta_{\mathbf{G}}(\mathbf{S})$.



Cortes

Seja $G = (\mathbf{V}, \mathbf{E})$ um grafo e seja $\mathbf{S} \subset \mathbf{V}$.

O **CORTE** de G induzido por $\mathbf{S}$ é o conjunto de arestas de G com um extremo em $\mathbf{S}$ e outro em $\mathbf{V} \setminus \mathbf{S}$ e o denotamos por $\delta_{\mathbf{G}}(\mathbf{S})$.



Se $\mathbf{s} \in \mathbf{S}$ e $\mathbf{t} \in \mathbf{V} \setminus \mathbf{S}$, então dizemos que $\delta_{\mathbf{G}}(\mathbf{S})$ **SEPARA** $\mathbf{s}$ de $\mathbf{t}$.

Caminhos versus cortes

Lema

Seja G um grafo e sejam $\mathbf{s,t}$ *vértices distintos de G. Então, exatamente uma das seguintes afirmações é verdadeira:*

(a) *Existe um caminho de* $\mathbf{s}$ *a* $\mathbf{t}$ *em G, ou*

(b) *existe um corte* $\delta_{\mathbf{G}}(\mathbf{S})$ *que separa* $\mathbf{s}$ *de* $\mathbf{t}$ *tal que* $\delta_{\mathbf{G}}(\mathbf{S}) = \emptyset$.

Caminhos versus cortes. Demonstração

Suponha que **(a)** vale (em G existe um caminho de **s** a **t**):

Caminhos versus cortes. Demonstração

Suponha que **(a)** vale (em G existe um caminho de **s** a **t**):

- **(b)** não pode valer (em G não existe um corte $\delta_{\mathbf{G}}(\mathbf{S}) = \emptyset$ que separa **s** de **t**). Por quê?

Caminhos versus cortes. Demonstração

Suponha que **(a)** vale (em G existe um caminho de **s** a **t**):

- **(b)** não pode valer (em G não existe um corte $\delta_{\mathbf{G}}(\mathbf{S}) = \emptyset$ que separa **s** de **t**). Por quê?

Suponha que **(a)** não vale (em G não existe um caminho de **s** a **t**):

Caminhos versus cortes. Demonstração

Suponha que **(a)** vale (em G existe um caminho de **s** a **t**):

- **(b)** não pode valer (em G não existe um corte $\delta_{\mathbf{G}}(\mathbf{S}) = \emptyset$ que separa **s** de **t**). Por quê?

Suponha que **(a)** não vale (em G não existe um caminho de **s** a **t**):

- Seja **S** o conjunto dos vértices alcançáveis por **s** em G.

Caminhos versus cortes. Demonstração

Suponha que **(a)** vale (em G existe um caminho de $\mathbf{s}$ a $\mathbf{t}$):

- **(b)** não pode valer (em G não existe um corte $\delta_{\mathbf{G}}(\mathbf{S}) = \emptyset$ que separa $\mathbf{s}$ de $\mathbf{t}$). Por quê?

Suponha que **(a)** não vale (em G não existe um caminho de $\mathbf{s}$ a $\mathbf{t}$):

- Seja $\mathbf{S}$ o conjunto dos vértices alcançáveis por $\mathbf{s}$ em G.
- Temos que $\mathbf{t} \in \mathbf{V} \setminus \mathbf{S}$ e $\delta_{\mathbf{G}}(\mathbf{S}) = \emptyset$.

Conexidade

Dizemos que um grafo G é **CONEXO** se, para qualquer par de vértices **u** e **v** de G, existe um caminho de **u** a **v** em G.

Conexidade

Dizemos que um grafo G é **CONEXO** se, para qualquer par de vértices **u** e **v** de G, existe um caminho de **u** a **v** em G.

Caso contrário, dizemos que G é **DESCONEXO**.

Conexidade

Dizemos que um grafo G é **CONEXO** se, para qualquer par de vértices **u** e **v** de G, existe um caminho de **u** a **v** em G.

Caso contrário, dizemos que G é **DESCONEXO**.

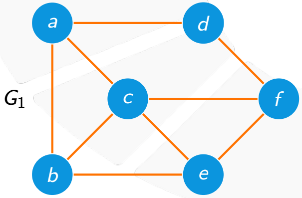
Podemos particionar o grafo em **COMPONENTES**, tal que dois vértices **u** e **v** estão na mesma componente se em G há um caminho de **u** a **v**.

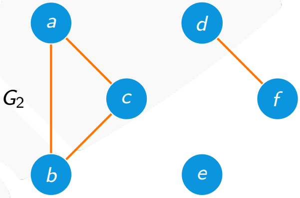
Conexidade

Dizemos que um grafo G é **CONEXO** se, para qualquer par de vértices **u** e **v** de G, existe um caminho de **u** a **v** em G.

Caso contrário, dizemos que G é **DESCONEXO**.

Podemos particionar o grafo em **COMPONENTES**, tal que dois vértices **u** e **v** estão na mesma componente se em G há um caminho de **u** a **v**.





Subgrafos geradores e induzidos

Subgrafo e subgrafo gerador

- Um **SUBGRAFO** $H = (\mathbf{V}', \mathbf{E}')$ de um grafo $G = (\mathbf{V}, \mathbf{E})$ é um grafo tal que $\mathbf{V}' \subseteq \mathbf{V}$ e $\mathbf{E}' \subseteq \mathbf{E}$.

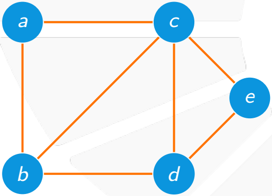
Subgrafo e subgrafo gerador

- Um **SUBGRAFO** $H = (\mathbf{V}', \mathbf{E}')$ de um grafo $G = (\mathbf{V}, \mathbf{E})$ é um grafo tal que $\mathbf{V}' \subseteq \mathbf{V}$ e $\mathbf{E}' \subseteq \mathbf{E}$.
- Se $\mathbf{V}' = \mathbf{V}$, então H é um **SUBGRAFO GERADOR** de G.

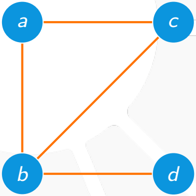
Subgrafo e subgrafo gerador

- Um **SUBGRAFO** $H = (\mathbf{V}', \mathbf{E}')$ de um grafo $G = (\mathbf{V}, \mathbf{E})$ é um grafo tal que $\mathbf{V}' \subseteq \mathbf{V}$ e $\mathbf{E}' \subseteq \mathbf{E}$.

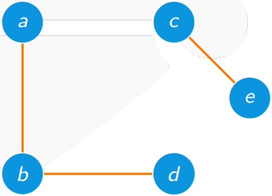
- Se $\mathbf{V}' = \mathbf{V}$, então H é um **SUBGRAFO GERADOR** de G.



G



Subgrafo de G



Subgrafo gerador de G

Grafos obtidos a partir de outros grafos

Considere um grafo $G = (\mathbf{V}, \mathbf{E})$, uma aresta $\mathbf{e}$ e um vértice $\mathbf{v}$:

Grafos obtidos a partir de outros grafos

Considere um grafo $G = (\mathbf{V}, \mathbf{E})$, uma aresta $\mathbf{e}$ e um vértice $\mathbf{v}$:

- $G - \mathbf{e}$ é o grafo obtido de G removendo-se $\mathbf{e}$:

$$G - \mathbf{e} = (\mathbf{V}, \mathbf{E} \setminus \{\mathbf{e}\})$$

Grafos obtidos a partir de outros grafos

Considere um grafo $G = (\mathbf{V}, \mathbf{E})$, uma aresta $\mathbf{e}$ e um vértice $\mathbf{v}$:

- $G - \mathbf{e}$ é o grafo obtido de G removendo-se $\mathbf{e}$:

$$G - \mathbf{e} = (\mathbf{V}, \mathbf{E} \setminus \{\mathbf{e}\})$$

- $G - \mathbf{v}$ é o grafo obtido de G removendo-se $\mathbf{v}$ e todas as arestas que incidem em $\mathbf{v}$:

$$G - \mathbf{v} = (\mathbf{V} \setminus \{\mathbf{v}\}, \mathbf{E} \setminus \delta(\{\mathbf{v}\}))$$

Subgrafo induzido

Considere um grafo $G = (\mathbf{V}, \mathbf{E})$ e um subconjunto de vértices $\mathbf{S}$:

Subgrafo induzido

Considere um grafo $G = (\mathbf{V}, \mathbf{E})$ e um subconjunto de vértices $\mathbf{S}$:

- O subgrafo de G **INDUZIDO** por $\mathbf{S}$, denotado por $G[\mathbf{S}]$, é o grafo formado por $\mathbf{S}$ e todas as arestas entre vértices $\mathbf{S}$:

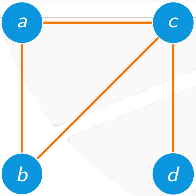
$$G[\mathbf{S}] = (\mathbf{S}, \{(\mathbf{u}, \mathbf{v}) \in \mathbf{E} : \mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbf{S}\})$$

Subgrafo induzido

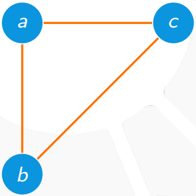
Considere um grafo $G = (\mathbf{V}, \mathbf{E})$ e um subconjunto de vértices $\mathbf{S}$:

- O subgrafo de G **INDUZIDO** por $\mathbf{S}$, denotado por $G[\mathbf{S}]$, é o grafo formado por $\mathbf{S}$ e todas as arestas entre vértices $\mathbf{S}$:

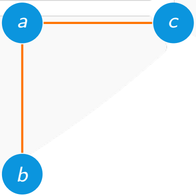
$$G[\mathbf{S}] = (\mathbf{S}, \{(\mathbf{u}, \mathbf{v}) \in \mathbf{E} : \mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbf{S}\})$$



G



Subgrafo induzido



Subgrafo não induzido

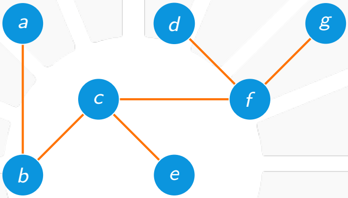
Árvores

Definição

Um grafo $G = (\mathbf{V}, \mathbf{E})$ é uma **ÁRVORE** se ele for conexo e não possuir ciclos.

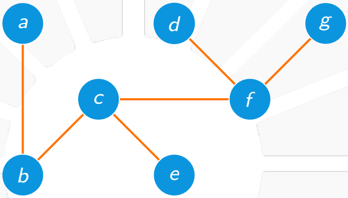
Definição

Um grafo $G = (\mathbf{V}, \mathbf{E})$ é uma **ÁRVORE** se ele for conexo e não possuir ciclos.



Definição

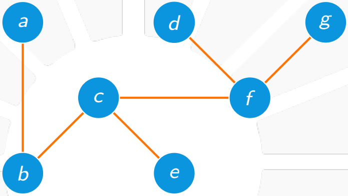
Um grafo $G = (\mathbf{V}, \mathbf{E})$ é uma **ÁRVORE** se ele for conexo e não possuir ciclos.



- Um grafo sem ciclos é chamado de **ACÍCLICO**.

Definição

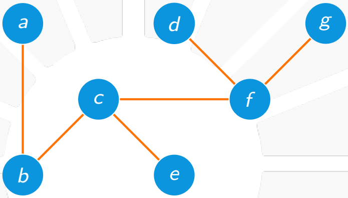
Um grafo $G = (\mathbf{V}, \mathbf{E})$ é uma **ÁRVORE** se ele for conexo e não possuir ciclos.



- Um grafo sem ciclos é chamado de **ACÍCLICO**.
- Uma **FOLHA** de uma árvore G é um vértice de grau 1.

Definição

Um grafo $G = (\mathbf{V}, \mathbf{E})$ é uma **ÁRVORE** se ele for conexo e não possuir ciclos.



- Um grafo sem ciclos é chamado de **ACÍCLICO**.
- Uma **FOLHA** de uma árvore G é um vértice de grau 1.
- Toda árvore com dois ou mais vértices tem pelo menos duas folhas. Por quê?

Caracterização de árvores

Teorema

As seguintes afirmações são equivalentes:

Caracterização de árvores

Teorema

As seguintes afirmações são equivalentes:

- *G é uma árvore.*

Caracterização de árvores

Teorema

As seguintes afirmações são equivalentes:

- *G é uma árvore.*
- *G é conexo e possui exatamente $|V| - 1$ arestas.*

Caracterização de árvores

Teorema

As seguintes afirmações são equivalentes:

- *G é uma árvore.*
- *G é conexo e possui exatamente* $|V| - 1$ *arestas.*
- *G é conexo e a remoção de qualquer aresta desconecta o grafo, i.e, ele é conexo minimal.*

Caracterização de árvores

Teorema

As seguintes afirmações são equivalentes:

- *G é uma árvore.*
- *G é conexo e possui exatamente $|V| - 1$ arestas.*
- *G é conexo e a remoção de qualquer aresta desconecta o grafo, i.e, ele é conexo minimal.*
- *Para todo par de vértices u, v de G, existe um único caminho de u a v em G.*

Caracterização de árvores

Teorema

As seguintes afirmações são equivalentes:

- *G é uma árvore.*
- *G é conexo e possui exatamente $|V| - 1$ arestas.*
- *G é conexo e a remoção de qualquer aresta desconecta o grafo, i.e, ele é conexo minimal.*
- *Para todo par de vértices u, v de G, existe um único caminho de u a v em G.*

Demonstre esse teorema como exercício.

Grafos bipartidos

Definição

Uma **BIPARTIÇÃO** de um conjunto V é um par (A, B) tal que:

Definição

Uma **BIPARTIÇÃO** de um conjunto V é um par (A, B) tal que:

- $A \cap B = \emptyset$ e

Definição

Uma **BIPARTIÇÃO** de um conjunto V é um par (A, B) tal que:

- $A \cap B = \emptyset$ e
- $A \cup B = V$.

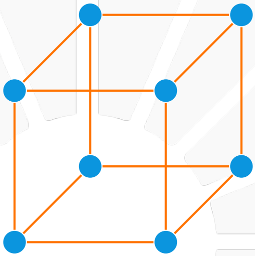
Definição

Uma **BIPARTIÇÃO** de um conjunto V é um par (A, B) tal que:

- $A \cap B = \emptyset$ e
- $A \cup B = V$.

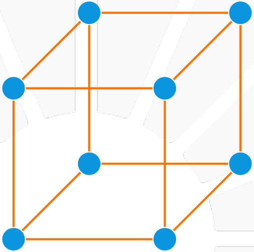
Um grafo $G = (\mathbf{V}, \mathbf{E})$ é **BIPARTIDO** se existe uma partição $(\mathbf{A}, \mathbf{B})$ de $\mathbf{V}$ tal que toda aresta de G tem um extremo em $\mathbf{A}$ e outro em $\mathbf{B}$.

Exemplo



Esse grafo é bipartido?

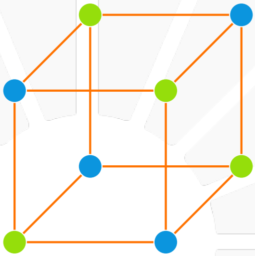
Exemplo



Esse grafo é bipartido?

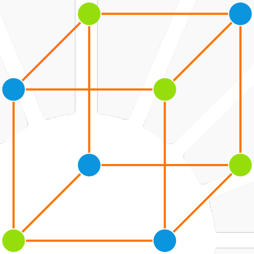
Podemos indicar cada parte com uma cor: **azul** ou **verde**.

Exemplo



É bipartido!

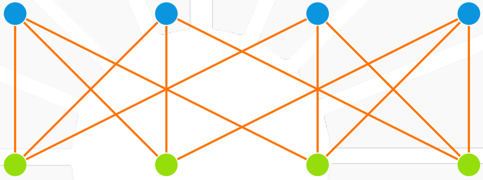
Exemplo



É bipartido!

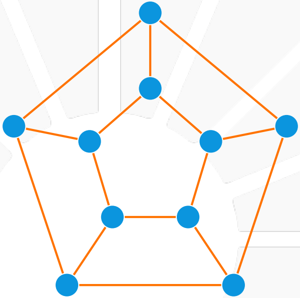
Um grafo $G = (\mathbf{V}, \mathbf{E})$ é bipartido se for possível colorir os vértices de G com **DUAS CORES** de modo que vértices adjacentes tenham cores distintas.

Exemplo



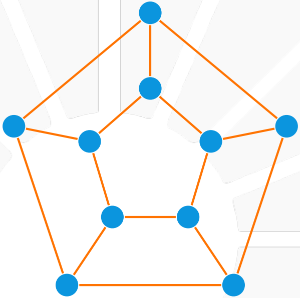
Isto pode ser visto melhor com outro desenho.

Exemplo



Este grafo **NÃO** é bipartido.

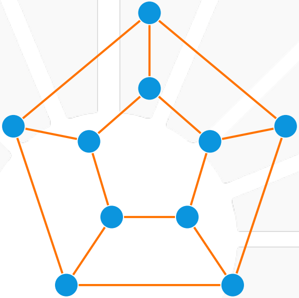
Exemplo



Este grafo **NÃO** é bipartido.

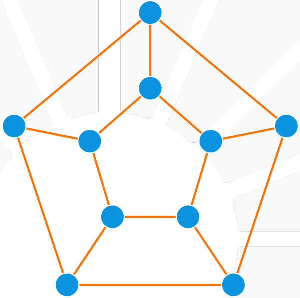
Podemos apresentar uma justificativa simples?

Condição necessária para um grafo ser bipartido



Um grafo bipartido não pode conter ciclos de comprimento ímpar!

Condição necessária para um grafo ser bipartido



Um grafo bipartido não pode conter ciclos de comprimento ímpar!

Essa é uma condição suficiente? basta não ter ciclos ímpares?

Condição necessária e suficiente

Teorema

Seja G um grafo. Então G é bipartido se e somente se G não possuir um ciclo ímpar.

Condição necessária e suficiente

Teorema

Seja G um grafo. Então G é bipartido se e somente se G não possuir um ciclo ímpar.

Demonstração:

Condição necessária e suficiente

Teorema

Seja G um grafo. Então G é bipartido se e somente se G não possuir um ciclo ímpar.

Demonstração:

- Já vimos que se G tem um ciclo ímpar, ele não é bipartido.

Condição necessária e suficiente

Teorema

Seja G um grafo. Então G é bipartido se e somente se G não possuir um ciclo ímpar.

Demonstração:

- Já vimos que se G tem um ciclo ímpar, ele não é bipartido.
- Assim, resta demonstrar a recíproca.

Condição necessária e suficiente

Teorema

Seja G um grafo. Então G é bipartido se e somente se G não possuir um ciclo ímpar.

Demonstração:

- Já vimos que se G tem um ciclo ímpar, ele não é bipartido.
- Assim, resta demonstrar a recíproca.
- Podemos supor que G é conexo. Por quê?

Condição necessária e suficiente

Teorema

Seja G um grafo. Então G é bipartido se e somente se G não possuir um ciclo ímpar.

Demonstração:

- Já vimos que se G tem um ciclo ímpar, ele não é bipartido.
- Assim, resta demonstrar a recíproca.
- Podemos supor que G é conexo. Por quê?
- Antes de continuar a prova, vejamos outros resultados...

Árvore geradora

Propriedade

Fato (1)

Todo grafo conexo contém uma árvore geradora.

Propriedade

Fato (1)

Todo grafo conexo contém uma árvore geradora.

Provar o fato a partir do seguinte resultado (exercício):

Propriedade

Fato (1)

Todo grafo conexo contém uma árvore geradora.

Provar o fato a partir do seguinte resultado (exercício):

Lema

Seja G um grafo conexo e seja C um ciclo de G. Se **e** *é uma aresta de C então $G -$* **e** *é conexo.*

Propriedade

Fato (1)

Todo grafo conexo contém uma árvore geradora.

Provar o fato a partir do seguinte resultado (exercício):

Lema

Seja G um grafo conexo e seja C um ciclo de G. Se **e** *é uma aresta de C então $G -$* **e** *é conexo.*

A recíproca também vale:

Propriedade

Fato (1)

Todo grafo conexo contém uma árvore geradora.

Provar o fato a partir do seguinte resultado (exercício):

Lema

*Seja G um grafo conexo e seja C um ciclo de G. Se **e** é uma aresta de C então $G - $ **e** é conexo.*

A recíproca também vale:

Lema

*Seja G um grafo conexo e seja **e** uma aresta de G. Se $G - $ **e** é conexo então **e** pertence a algum ciclo de G.*

Árvores e grafos bipartidos

Fato (2)

Toda árvore $T = (\boldsymbol{V}, \boldsymbol{E})$ *é um grafo bipartido.*

Árvores e grafos bipartidos

Fato (2)

Toda árvore $T = (\boldsymbol{V}, \boldsymbol{E})$ *é um grafo bipartido.*

É possível provar por indução em $|\mathbf{V}|$. Demonstre como exercício.

Árvore geradora

Fato (3)

Seja $T = (\boldsymbol{V}, \mathbf{E}')$ *uma árvore geradora de um grafo* $G = (\boldsymbol{V}, \boldsymbol{E})$*. Então para toda aresta* $\boldsymbol{e} \in \boldsymbol{E} \setminus \mathbf{E}'$ *existe um único ciclo em* $T + \boldsymbol{e} = (\boldsymbol{V}, \mathbf{E}' \cup \{\mathbf{e}\})$.

Árvore geradora

Fato (3)

Seja $T = (\boldsymbol{V}, \mathbf{E}')$ *uma árvore geradora de um grafo* $G = (\boldsymbol{V}, \boldsymbol{E})$. *Então para toda aresta* $\boldsymbol{e} \in \boldsymbol{E} \setminus \mathbf{E}'$ *existe um único ciclo em* $T + \boldsymbol{e} = (\boldsymbol{V}, \mathbf{E}' \cup \{\mathbf{e}\})$.

Demonstração:

Árvore geradora

Fato (3)

Seja $T = (\boldsymbol{V}, \mathbf{E'})$ uma árvore geradora de um grafo $G = (\boldsymbol{V}, \boldsymbol{E})$. Então para toda aresta $\boldsymbol{e} \in \boldsymbol{E} \setminus \mathbf{E'}$ existe um único ciclo em $T + \boldsymbol{e} = (\boldsymbol{V}, \mathbf{E'} \cup \{\mathbf{e}\})$.

Demonstração:

- Sejam **u,v** os extremos de **e**.

Árvore geradora

Fato (3)

Seja $T = (V, \mathbf{E'})$ *uma árvore geradora de um grafo* $G = (V, E)$*. Então para toda aresta* $e \in E \setminus \mathbf{E'}$ *existe um único ciclo em* $T + e = (V, \mathbf{E'} \cup \{\mathbf{e}\})$*.*

Demonstração:

- Sejam **u,v** os extremos de **e**.
- Como T é árvore, existe um único caminho P de **u** a **v** em T.

Árvore geradora

Fato (3)

Seja $T = (V, \mathbf{E'})$ *uma árvore geradora de um grafo* $G = (V, E)$*. Então para toda aresta* $e \in E \setminus \mathbf{E'}$ *existe um único ciclo em* $T + e = (V, \mathbf{E'} \cup \{\mathbf{e}\})$*.*

Demonstração:

- Sejam **u,v** os extremos de **e**.
- Como T é árvore, existe um único caminho P de **u** a **v** em T.
- Portanto, $P + \mathbf{e}$ é o único ciclo em $T + \mathbf{e}$.

Árvore geradora

Fato (3)

Seja $T = (\mathbf{V}, \mathbf{E}')$ *uma árvore geradora de um grafo* $G = (\mathbf{V}, \mathbf{E})$*. Então para toda aresta* $\mathbf{e} \in \mathbf{E} \setminus \mathbf{E}'$ *existe um único ciclo em* $T + \mathbf{e} = (\mathbf{V}, \mathbf{E}' \cup \{\mathbf{e}\})$*.*

Demonstração:

- Sejam **u,v** os extremos de **e**.
- Como T é árvore, existe um único caminho P de **u** a **v** em T.
- Portanto, $P + \mathbf{e}$ é o único ciclo em $T + \mathbf{e}$.

O único ciclo de $T + \mathbf{e}$ é chamado de **CICLO FUNDAMENTAL**.

Demonstração do teorema

Agora estamos prontos para demonstrar a segunda parte do teorema:

Demonstração do teorema

Agora estamos prontos para demonstrar a segunda parte do teorema:

Teorema

Seja G um grafo. Então G é bipartido se e somente se G não possuir um ciclo ímpar.

Demonstração do teorema

Agora estamos prontos para demonstrar a segunda parte do teorema:

Teorema

Seja G um grafo. Então G é bipartido se e somente se G não possuir um ciclo ímpar.

Demonstração:

Demonstração do teorema

Agora estamos prontos para demonstrar a segunda parte do teorema:

Teorema

Seja G um grafo. Então G é bipartido se e somente se G não possuir um ciclo ímpar.

Demonstração:

- Resta mostrar que se G não tem ciclo ímpar, ele é bipartido.

Demonstração do teorema

Agora estamos prontos para demonstrar a segunda parte do teorema:

Teorema

Seja G um grafo. Então G é bipartido se e somente se G não possuir um ciclo ímpar.

Demonstração:

- Resta mostrar que se G não tem ciclo ímpar, ele é bipartido.
- Lembre, podemos supor que G seja conexo.

Demonstração do teorema

Agora estamos prontos para demonstrar a segunda parte do teorema:

Teorema

Seja G um grafo. Então G é bipartido se e somente se G não possuir um ciclo ímpar.

Demonstração:

- Resta mostrar que se G não tem ciclo ímpar, ele é bipartido.
- Lembre, podemos supor que G seja conexo.
- Suponha que G não contenha um ciclo ímpar.

Demonstração do teorema

Agora estamos prontos para demonstrar a segunda parte do teorema:

Teorema

Seja G um grafo. Então G é bipartido se e somente se G não possuir um ciclo ímpar.

Demonstração:

- Resta mostrar que se G não tem ciclo ímpar, ele é bipartido.
- Lembre, podemos supor que G seja conexo.
- Suponha que G não contenha um ciclo ímpar.
- Construiremos uma bipartição ($\mathbf{A}, \mathbf{B}$) de $\mathbf{V}$ tal que toda aresta de G tem um extremo em $\mathbf{A}$ e outro em $\mathbf{B}$.

Demonstração do teorema

- Pelo Fato 1, G contém uma árvore geradora $T = (\mathbf{V}, \mathbf{E}')$.

Demonstração do teorema

- Pelo Fato 1, G contém uma árvore geradora $T = (\mathbf{V}, \mathbf{E}')$.
- Pelo Fato 2, T possui uma uma bipartição $(\mathbf{A}, \mathbf{B})$ de $\mathbf{V}$ tal que toda aresta de T tem um extremo em $\mathbf{A}$ e outro em $\mathbf{B}$.

Demonstração do teorema

- Pelo Fato 1, G contém uma árvore geradora $T = (\mathbf{V}, \mathbf{E}')$.
- Pelo Fato 2, T possui uma uma bipartição $(\mathbf{A}, \mathbf{B})$ de $\mathbf{V}$ tal que toda aresta de T tem um extremo em $\mathbf{A}$ e outro em $\mathbf{B}$.
- Mostraremos que toda aresta de $\mathbf{E} \setminus \mathbf{E}'$ tem um extremo em $\mathbf{A}$ e outro em $\mathbf{B}$.

Demonstração do teorema

Seja $\mathbf{e}$ uma aresta de $\mathbf{E} \setminus \mathbf{E'}$:

Demonstração do teorema

Seja **e** uma aresta de $\mathbf{E} \setminus \mathbf{E'}$:

- Pelo Fato 3, existe um único ciclo C em $T + \mathbf{e}$ que contém **e**.

Demonstração do teorema

Seja **e** uma aresta de $\mathbf{E} \setminus \mathbf{E'}$:

- Pelo Fato 3, existe um único ciclo C em $T + \mathbf{e}$ que contém **e**.
- Se os extremos de **e** são da mesma parte (**A** ou **B**),

Demonstração do teorema

Seja **e** uma aresta de $\mathbf{E} \setminus \mathbf{E'}$:

- Pelo Fato 3, existe um único ciclo C em $T + \mathbf{e}$ que contém **e**.
- Se os extremos de **e** são da mesma parte (**A** ou **B**),
- então C é um ciclo ímpar, o que é uma **CONTRADIÇÃO**!

Demonstração do teorema

Seja **e** uma aresta de $\mathbf{E} \setminus \mathbf{E}'$:

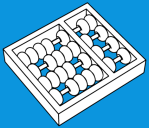
- Pelo Fato 3, existe um único ciclo C em $T + \mathbf{e}$ que contém **e**.
- Se os extremos de **e** são da mesma parte (**A** ou **B**),
- então C é um ciclo ímpar, o que é uma **CONTRADIÇÃO**!
- Portanto, os extremos de **e** estão em partes distintas.

Cortes, conexidade, árvores e grafos bipartidos

MC558 - Projeto e Análise de Algoritmos II

02

08/24



Santiago Valdés Ravelo
https://ic.unicamp.br/~santiago/
ravelo@unicamp.br