Análise de algoritmos

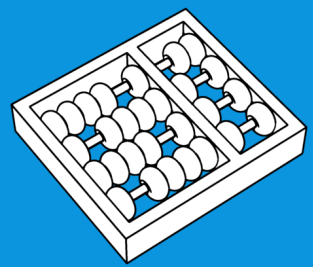
MC458 - Projeto e Análise de Algoritmos I

08/25

05

Santiago Valdés Ravelo
https://ic.unicamp.br/~santiago/
ravelo@unicamp.br

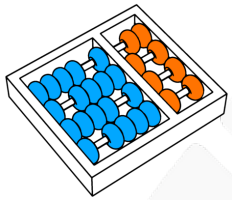
UNICAMP



“Um algoritmo só é tão bom quanto seu comportamento assintótico.”

Anônimo.

Analisando um algoritmo

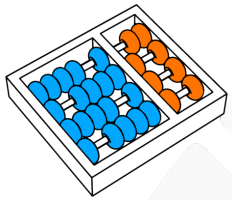


Ordenação

Consideremos o problema da ordenação:

Problem (Ordenação de inteiros)

- ***Entrada:*** *Um vetor de inteiros.*
- ***Saída:*** *O vetor em ordem crescente.*



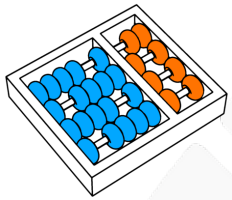
Ordenação por inserção

Uma ideia para ordenar os elementos de um vetor pode ser:

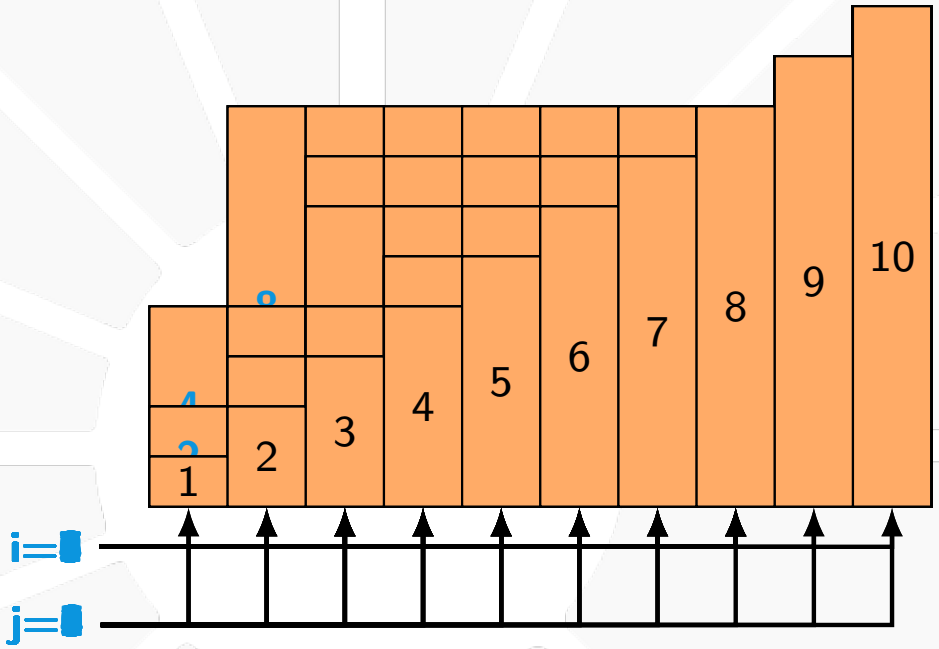
- Percorrer as posições do vetor e a cada nova posição, inserir o elemento associado no lugar correto do sub-vetor (ordenado) à esquerda daquela posição.

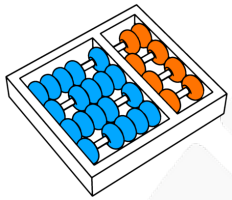
Elaborado mais a ideia:

1. Percorrer cada posição **i** do vetor do início ao fim fazendo:
2. Percorrer de **i** até o início enquanto o valor for maior que o da esquerda:
3. Trocar o valor atual com o da posição à esquerda.



Ordenação por Inserção

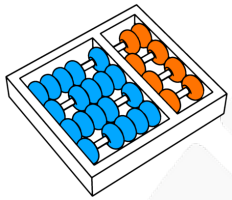




Ordenação por inserção

Para evitar muitas trocas:

1. Percorrer cada posição **i** do vetor do início ao fim fazendo:
2. Armazenar o valor em **i** numa chave.
3. Percorrer de **i** − **1** até o início enquanto o valor for maior que chave:
4. Copiar o valor atual na posição à direita.
5. Colocar o valor da chave à direita da última posição.



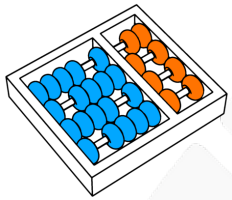
Algoritmo

Algoritmo: INSERTION-SORT(A, n)

```
1 para i ← 2 até n
2     chave ← A[i]
3     j ← i − 1
4     enquanto j ≥ 1 e A[j] > chave
5         A[j + 1] ← A[j]
6         j ← j − 1
7     A[j + 1] ← chave
```

Perguntas:

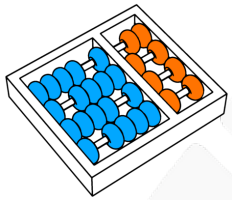
- O algoritmo termina?
- Qual a sua complexidade?
- Produz uma resposta correta?



Contando o número de instruções

INSERTION-SORT(A, n)	Custo	Quantas vezes?
1 **para** $i \leftarrow 2$ **até** n	c_1	n
2 chave $\leftarrow A[i]$	c_2	$n-1$
3 $j \leftarrow i-1$	c_3	$n-1$
4 **enquanto** $j \geq 1$ **e** $A[j] >$ chave	c_4	$\sum_{i=2}^{n} t_i$
5 $A[j+1] \leftarrow A[j]$	c_5	$\sum_{i=2}^{n}(t_i-1)$
6 $j \leftarrow j-1$	c_6	$\sum_{i=2}^{n}(t_i-1)$
7 $A[j+1] \leftarrow$ chave	c_7	$n-1$

- A linha k executa um número constante de instruções c_k.
- Cada linha executa uma ou mais vezes.
- Quantas vezes a linha 4 executa depende da entrada.
  - t_i denota quantas vezes o **enquanto** executa para um certo i.



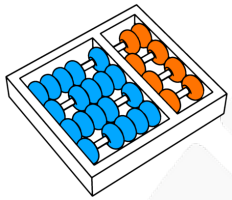
Tempo de execução total

- Considere uma instância de tamanho n.
- $T(n)$ denota o número de instruções executadas para ela.
- Basta somar para todas as linhas:

$$T(n) = c_1 \cdot n + c_2 \cdot (n-1) + c_3 \cdot (n-1) + c_4 \cdot \sum_{i=2}^{n} t_i + c_5 \cdot \sum_{i=2}^{n} (t_i - 1) + c_6 \cdot \sum_{i=2}^{n} (t_i - 1) + c_7 \cdot (n-1).$$

Observações:

- Entradas do mesmo tamanho podem ter tempos diferentes.
- Vamos considerar diferentes instâncias.
  - **Melhor caso:** quando $T(n)$ é o menor possível.
  - **Pior caso:** quando $T(n)$ é o maior possível.



Melhor caso

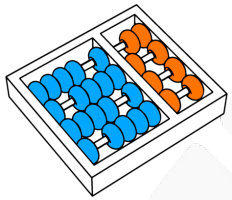
Um melhor caso ocorre quando $t_i = 1$ para cada i:

- Basta que a condição do **enquanto** sempre falhe.
- Ocorre se a entrada A já vem ordenada.

Nesse caso:

$$\begin{aligned} T(n) &= \mathbf{c_1} \cdot n + \mathbf{c_2} \cdot (n-1) + \mathbf{c_3} \cdot (n-1) + \mathbf{c_4} \cdot (n-1) + \mathbf{c_7} \cdot (n-1) \\ &= (\mathbf{c_1} + \mathbf{c_2} + \mathbf{c_3} + \mathbf{c_4} + \mathbf{c_7}) \cdot n - (\mathbf{c_2} + \mathbf{c_3} + \mathbf{c_4} + \mathbf{c_7}) \\ &= \mathbf{a} \cdot n + \mathbf{b}. \end{aligned}$$

- Os valores de a e b são constantes.
- O tempo de execução no melhor caso é **linear** em n.
- O algoritmo executa em tempo $\Omega(n)$.



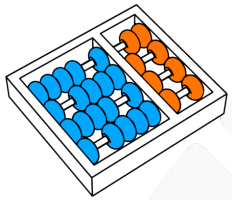
Pior caso

Um pior caso ocorre quando t_i é máximo para cada i:

- Basta que a condição do **enquanto** só falha quando $j = 0$.
- Nessa situação, teremos $t_i = i$.
- Ocorre se a entrada A vem ordenada decrescentemente.

Relembre que:

- $\sum_{i=2}^{n} i = n(n+1)/2 - 1$ e $\sum_{i=2}^{n}(i-1) = n(n-1)/2$.



Pior caso (cont)

Substituindo, temos:

$$
\begin{aligned}
T(n) &= c_1 \cdot n + c_2 \cdot (n-1) + c_3 \cdot (n-1) + c_4 \cdot (n(n+1)/2 - 1) + \\
&\quad c_5 \cdot n(n-1)/2 + c_6 \cdot n(n-1)/2 + c_7 \cdot (n-1) \\
&= (c_4/2 + c_5/2 + c_6/2) \cdot n^2 + \\
&\quad (c_1 + c_2 + c_3 + c_4/2 - c_5/2 - c_6/2 + c_7) \cdot n - \\
&\quad (c_2 + c_3 + c_4 + c_7) \\
&= a \cdot n^2 + b \cdot n + c.
\end{aligned}
$$

- Os valores de a, b, c são constantes.
- O tempo de execução no pior caso é **quadrático** em n.
- O algoritmo executa em tempo $O(n^2)$.

Análise de algoritmos

MC458 - Projeto e Análise de Algoritmos I

08/25

05

Santiago Valdés Ravelo
https://ic.unicamp.br/~santiago/
ravelo@unicamp.br

UNICAMP