

NOTAÇÃO ASSINTÓTICA. PROPRIEDADES

Santiago Valdés Ravelo
[https://ic.unicamp.br/~santiago/
ravelo@unicamp.br](https://ic.unicamp.br/~santiago/ravelo@unicamp.br)

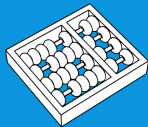
MC458 - Projeto e Análise de
Algoritmos I

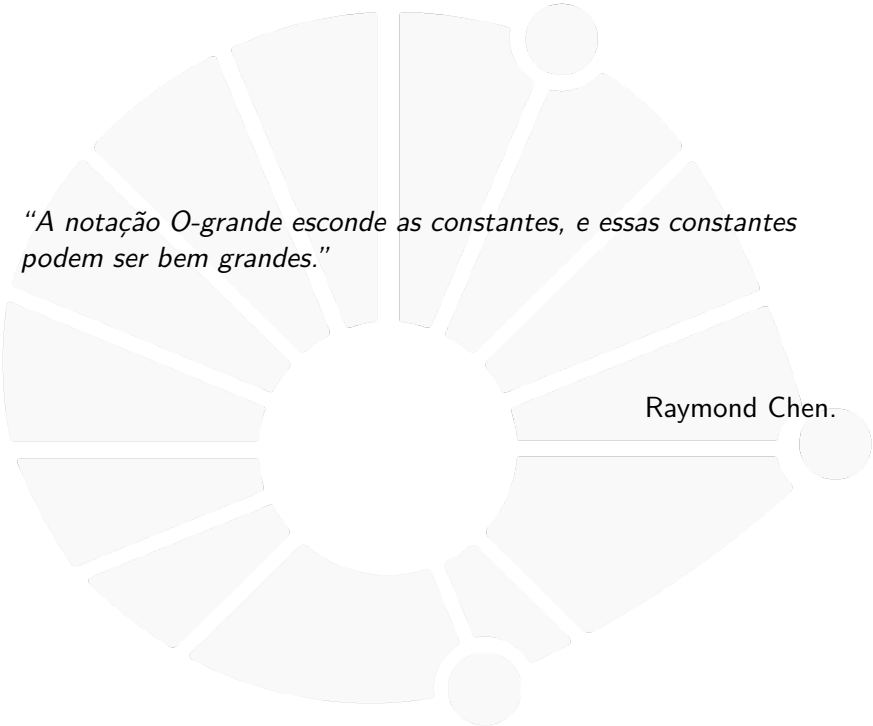
08/25

03



UNICAMP



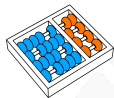


“A notação O -grande esconde as constantes, e essas constantes podem ser bem grandes.”

Raymond Chen.



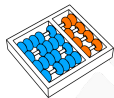
RELAÇÃO COM LIMITES



Suficiência

Teorema (Condições suficientes)

Sejam $f(n)$ e $g(n)$ funções não negativas, então:

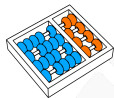


Suficiência

Teorema (Condições suficientes)

Sejam $f(n)$ e $g(n)$ funções não negativas, então:

- ▶ Se $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f(n)}{g(n)} = 0$, então $f(n) \in o(g(n))$.

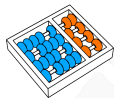


Suficiência

Teorema (Condições suficientes)

Sejam $f(n)$ e $g(n)$ funções não negativas, então:

- ▶ Se $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f(n)}{g(n)} = 0$, então $f(n) \in o(g(n))$.
- ▶ Se $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f(n)}{g(n)} < \infty$, então $f(n) \in O(g(n))$.

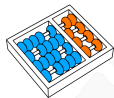


Suficiência

Teorema (Condições suficientes)

Sejam $f(n)$ e $g(n)$ funções não negativas, então:

- ▶ Se $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f(n)}{g(n)} = 0$, então $f(n) \in o(g(n))$.
- ▶ Se $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f(n)}{g(n)} < \infty$, então $f(n) \in O(g(n))$.
- ▶ Se $0 < \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f(n)}{g(n)} < \infty$, então $f(n) \in \Theta(g(n))$.

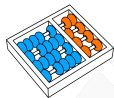


Suficiência

Teorema (Condições suficientes)

Sejam $f(n)$ e $g(n)$ funções não negativas, então:

- ▶ Se $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f(n)}{g(n)} = 0$, então $f(n) \in o(g(n))$.
- ▶ Se $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f(n)}{g(n)} < \infty$, então $f(n) \in O(g(n))$.
- ▶ Se $0 < \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f(n)}{g(n)} < \infty$, então $f(n) \in \Theta(g(n))$.
- ▶ Se $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f(n)}{g(n)} > 0$, então $f(n) \in \Omega(g(n))$.

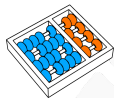


Suficiência

Teorema (Condições suficientes)

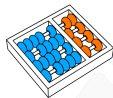
Sejam $f(n)$ e $g(n)$ funções não negativas, então:

- ▶ Se $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f(n)}{g(n)} = 0$, então $f(n) \in o(g(n))$.
- ▶ Se $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f(n)}{g(n)} < \infty$, então $f(n) \in O(g(n))$.
- ▶ Se $0 < \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f(n)}{g(n)} < \infty$, então $f(n) \in \Theta(g(n))$.
- ▶ Se $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f(n)}{g(n)} > 0$, então $f(n) \in \Omega(g(n))$.
- ▶ Se $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f(n)}{g(n)} = \infty$, então $f(n) \in \omega(g(n))$.



Regra de l'Hôpital

Teorema (Regra de l'Hôpital)

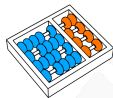


Regra de l'Hôpital

Teorema (Regra de l'Hôpital)

Sejam f e g funções diferenciáveis tais que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(n) = \lim_{n \rightarrow \infty} g(n) = \infty.$$



Regra de l'Hôpital

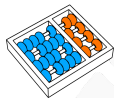
Teorema (Regra de l'Hôpital)

Sejam f e g funções diferenciáveis tais que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(n) = \lim_{n \rightarrow \infty} g(n) = \infty.$$

Se o limite de $\frac{f'(n)}{g'(n)}$ existir, então

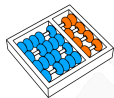
$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f(n)}{g(n)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f'(n)}{g'(n)}.$$



Regra de l'Hôpital

Exemplo

Relacione $f(n) = \ln n$ e $g(n) = \sqrt{n}$ usando classes de funções adequadas.

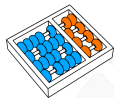


Regra de l'Hôpital

Exemplo

Relacione $f(n) = \ln n$ e $g(n) = \sqrt{n}$ usando classes de funções adequadas.

► Temos $f'(n) = \frac{1}{n}$ e $g'(n) = \frac{1}{2\sqrt{n}}$



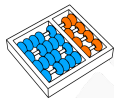
Regra de l'Hôpital

Exemplo

Relacione $f(n) = \ln n$ e $g(n) = \sqrt{n}$ usando classes de funções adequadas.

- ▶ Temos $f'(n) = \frac{1}{n}$ e $g'(n) = \frac{1}{2\sqrt{n}}$
- ▶ Assim,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f(n)}{g(n)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f'(n)}{g'(n)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2\sqrt{n}}{n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2}{\sqrt{n}} = 0.$$



Regra de l'Hôpital

Exemplo

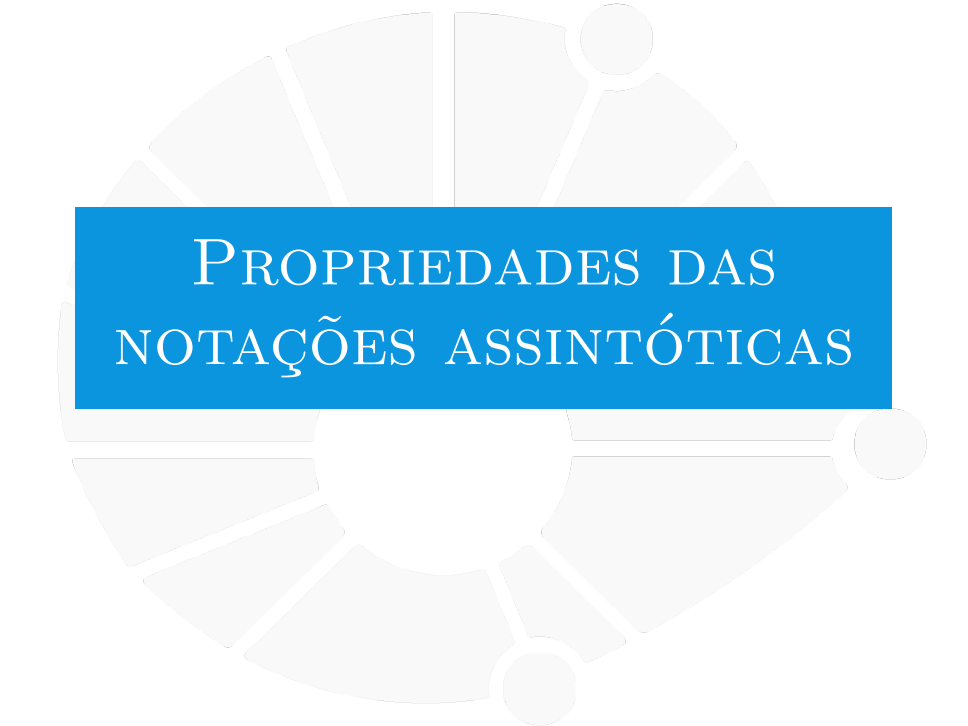
Relacione $f(n) = \ln n$ e $g(n) = \sqrt{n}$ usando classes de funções adequadas.

► Temos $f'(n) = \frac{1}{n}$ e $g'(n) = \frac{1}{2\sqrt{n}}$

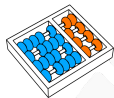
► Assim,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f(n)}{g(n)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f'(n)}{g'(n)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2\sqrt{n}}{n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2}{\sqrt{n}} = 0.$$

► Portanto, $f(n) = o(g(n))$.

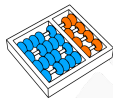


PROPRIEDADES DAS NOTAÇÕES ASSINTÓTICAS



Propriedades das classes

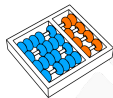
Teorema (Transitividade)



Propriedades das classes

Teorema (Transitividade)

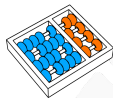
- ▶ Se $f(n) \in O(g(n))$ e $g(n) \in O(h(n))$, então $f(n) \in O(h(n))$.



Propriedades das classes

Teorema (Transitividade)

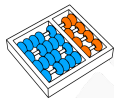
- ▶ Se $f(n) \in O(g(n))$ e $g(n) \in O(h(n))$, então $f(n) \in O(h(n))$.
- ▶ Se $f(n) \in \Omega(g(n))$ e $g(n) \in \Omega(h(n))$, então $f(n) \in \Omega(h(n))$.



Propriedades das classes

Teorema (Transitividade)

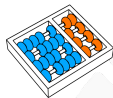
- ▶ Se $f(n) \in O(g(n))$ e $g(n) \in O(h(n))$, então $f(n) \in O(h(n))$.
- ▶ Se $f(n) \in \Omega(g(n))$ e $g(n) \in \Omega(h(n))$, então $f(n) \in \Omega(h(n))$.
- ▶ Se $f(n) \in \Theta(g(n))$ e $g(n) \in \Theta(h(n))$, então $f(n) \in \Theta(h(n))$.



Propriedades das classes

Teorema (Transitividade)

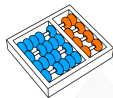
- ▶ Se $f(n) \in O(g(n))$ e $g(n) \in O(h(n))$, então $f(n) \in O(h(n))$.
- ▶ Se $f(n) \in \Omega(g(n))$ e $g(n) \in \Omega(h(n))$, então $f(n) \in \Omega(h(n))$.
- ▶ Se $f(n) \in \Theta(g(n))$ e $g(n) \in \Theta(h(n))$, então $f(n) \in \Theta(h(n))$.
- ▶ Se $f(n) \in o(g(n))$ e $g(n) \in o(h(n))$, então $f(n) \in o(h(n))$.



Propriedades das classes

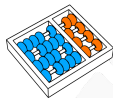
Teorema (Transitividade)

- ▶ Se $f(n) \in O(g(n))$ e $g(n) \in O(h(n))$, então $f(n) \in O(h(n))$.
- ▶ Se $f(n) \in \Omega(g(n))$ e $g(n) \in \Omega(h(n))$, então $f(n) \in \Omega(h(n))$.
- ▶ Se $f(n) \in \Theta(g(n))$ e $g(n) \in \Theta(h(n))$, então $f(n) \in \Theta(h(n))$.
- ▶ Se $f(n) \in o(g(n))$ e $g(n) \in o(h(n))$, então $f(n) \in o(h(n))$.
- ▶ Se $f(n) \in \omega(g(n))$ e $g(n) \in \omega(h(n))$, então $f(n) \in \omega(h(n))$.



Propriedades das classes

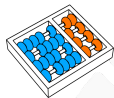
Teorema (Reflexividade)



Propriedades das classes

Teorema (Reflexividade)

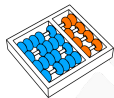
► $f(n) \in O(f(n))$.



Propriedades das classes

Teorema (Reflexividade)

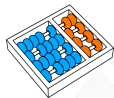
- ▶ $f(n) \in O(f(n))$.
- ▶ $f(n) \in \Omega(f(n))$.



Propriedades das classes

Teorema (Reflexividade)

- ▶ $f(n) \in O(f(n))$.
- ▶ $f(n) \in \Omega(f(n))$.
- ▶ $f(n) \in \Theta(f(n))$.

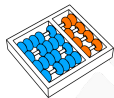


Propriedades das classes

Teorema (Reflexividade)

- ▶ $f(n) \in O(f(n))$.
- ▶ $f(n) \in \Omega(f(n))$.
- ▶ $f(n) \in \Theta(f(n))$.

Teorema (Simetria)



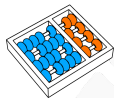
Propriedades das classes

Teorema (Reflexividade)

- ▶ $f(n) \in O(f(n))$.
- ▶ $f(n) \in \Omega(f(n))$.
- ▶ $f(n) \in \Theta(f(n))$.

Teorema (Simetria)

- ▶ $f(n) \in \Theta(g(n))$ se, e somente se, $g(n) \in \Theta(f(n))$.



Propriedades das classes

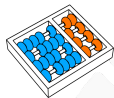
Teorema (Reflexividade)

- ▶ $f(n) \in O(f(n))$.
- ▶ $f(n) \in \Omega(f(n))$.
- ▶ $f(n) \in \Theta(f(n))$.

Teorema (Simetria)

- ▶ $f(n) \in \Theta(g(n))$ se, e somente se, $g(n) \in \Theta(f(n))$.

Teorema (Simetria Transposta)



Propriedades das classes

Teorema (Reflexividade)

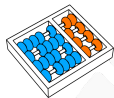
- ▶ $f(n) \in O(f(n))$.
- ▶ $f(n) \in \Omega(f(n))$.
- ▶ $f(n) \in \Theta(f(n))$.

Teorema (Simetria)

- ▶ $f(n) \in \Theta(g(n))$ se, e somente se, $g(n) \in \Theta(f(n))$.

Teorema (Simetria Transposta)

- ▶ $f(n) \in O(g(n))$ se, e somente se, $g(n) \in \Omega(f(n))$.



Propriedades das classes

Teorema (Reflexividade)

- ▶ $f(n) \in O(f(n))$.
- ▶ $f(n) \in \Omega(f(n))$.
- ▶ $f(n) \in \Theta(f(n))$.

Teorema (Simetria)

- ▶ $f(n) \in \Theta(g(n))$ se, e somente se, $g(n) \in \Theta(f(n))$.

Teorema (Simetria Transposta)

- ▶ $f(n) \in O(g(n))$ se, e somente se, $g(n) \in \Omega(f(n))$.
- ▶ $f(n) \in o(g(n))$ se, e somente se, $g(n) \in \omega(f(n))$.

NOTAÇÃO ASSINTÓTICA. PROPRIEDADES

Santiago Valdés Ravelo
<https://ic.unicamp.br/~santiago/ravelo@unicamp.br>

MC458 - Projeto e Análise de Algoritmos I

08/25

03



UNICAMP

