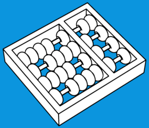
Demonstrações matemáticas: uma revisão.

MC458 - Projeto e Análise de Algoritmos I

01

08/25



Santiago Valdés Ravelo
https://ic.unicamp.br/~santiago/
ravelo@unicamp.br

UNICAMP

"Se as pessoas não acreditam que a matemática é simples, é só porque eles não percebem o quão complicada a vida é."

John Von Neumann.

Técnicas de demonstração

Demonstração direta

A **DEMONSTRAÇÃO DIRETA** de uma implicação $p \Rightarrow q$ é uma sequência de passos lógicos

$$p \Rightarrow p_1 \Rightarrow p_2 \Rightarrow \cdots \Rightarrow p_n \Rightarrow q,$$

que resultam, por transitividade, na implicação desejada.

Demonstração direta

A **DEMONSTRAÇÃO DIRETA** de uma implicação $p \Rightarrow q$ é uma sequência de passos lógicos

$$p \Rightarrow p_1 \Rightarrow p_2 \Rightarrow \cdots \Rightarrow p_n \Rightarrow q,$$

que resultam, por transitividade, na implicação desejada.

- Cada passo da demonstração é um axioma ou um teorema demonstrado previamente.

Demonstração direta

A **DEMONSTRAÇÃO DIRETA** de uma implicação $p \Rightarrow q$ é uma sequência de passos lógicos

$$p \Rightarrow p_1 \Rightarrow p_2 \Rightarrow \cdots \Rightarrow p_n \Rightarrow q,$$

que resultam, por transitividade, na implicação desejada.

- Cada passo da demonstração é um axioma ou um teorema demonstrado previamente.

Exemplo

Prove que $\sum_{i=1}^{k}(2i-1) = k^2$.

Demonstração direta (exemplo)

Demonstração:

$$\sum_{i=1}^{k} 2i - 1$$

Demonstração direta (exemplo)

Demonstração:

$$\sum_{i=1}^{k} 2i - 1 = 2\sum_{i=1}^{k} i - \sum_{i=1}^{k} 1$$

Demonstração direta (exemplo)

Demonstração:

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{k} 2i - 1 &= 2\sum_{i=1}^{k} i - \sum_{i=1}^{k} 1 \\ &= 2\frac{k(k+1)}{2} - k\end{aligned}$$

Demonstração direta (exemplo)

Demonstração:

$$
\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{k} 2i - 1 &= 2\sum_{i=1}^{k} i - \sum_{i=1}^{k} 1 \\
&= 2\frac{k(k+1)}{2} - k \\
&= k^2 + k - k
\end{aligned}
$$

Demonstração direta (exemplo)

Demonstração:

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{k} 2i-1 &= 2\sum_{i=1}^{k} i - \sum_{i=1}^{k} 1\\ &= 2\frac{k(k+1)}{2} - k\\ &= k^2 + k - k\\ &= k^2.\end{aligned}$$

Demonstração pela contrapositiva

A **CONTRAPOSITIVA** de $p \Rightarrow q$ é $\neg q \Rightarrow \neg p$.

Demonstração pela contrapositiva

A **CONTRAPOSITIVA** de $p \Rightarrow q$ é $\neg q \Rightarrow \neg p$.

- A contrapositiva é equivalente à implicação original.

Demonstração pela contrapositiva

A **CONTRAPOSITIVA** de $p \Rightarrow q$ é $\neg q \Rightarrow \neg p$.

- A contrapositiva é equivalente à implicação original.
- Demonstrar $\neg q \Rightarrow \neg p$ implica em $p \Rightarrow q$ e vice-versa.

Demonstração pela contrapositiva

A **CONTRAPOSITIVA** de $p \Rightarrow q$ é $\neg q \Rightarrow \neg p$.

- A contrapositiva é equivalente à implicação original.
- Demonstrar $\neg q \Rightarrow \neg p$ implica em $p \Rightarrow q$ e vice-versa.
- É útil quando é mais fácil demonstrar a contrapositiva.

Demonstração pela contrapositiva

A **CONTRAPOSITIVA** de $p \Rightarrow q$ é $\neg q \Rightarrow \neg p$.

- A contrapositiva é equivalente à implicação original.
- Demonstrar $\neg q \Rightarrow \neg p$ implica em $p \Rightarrow q$ e vice-versa.
- É útil quando é mais fácil demonstrar a contrapositiva.
- Para demonstrarmos a contrapositiva de uma implicação, podemos utilizar qualquer técnica de demonstração.

Demonstração pela contrapositiva

A **CONTRAPOSITIVA** de $p \Rightarrow q$ é $\neg q \Rightarrow \neg p$.

- A contrapositiva é equivalente à implicação original.
- Demonstrar $\neg q \Rightarrow \neg p$ implica em $p \Rightarrow q$ e vice-versa.
- É útil quando é mais fácil demonstrar a contrapositiva.
- Para demonstrarmos a contrapositiva de uma implicação, podemos utilizar qualquer técnica de demonstração.

Exemplo

Prove que se $2 \mid 3m$, *então* $2 \mid m$.

Demonstração pela contrapositiva (exemplo)

Demonstração:

Demonstração pela contrapositiva (exemplo)

Demonstração:

- Tentando demonstrar diretamente, é possível concluir a partir da hipótese que $m = \frac{2k}{3}$, para algum inteiro k. No entanto, essa conclusão não traz informação sobre a paridade de m.

Demonstração pela contrapositiva (exemplo)

Demonstração:

- Tentando demonstrar diretamente, é possível concluir a partir da hipótese que $m = \frac{2k}{3}$, para algum inteiro k. No entanto, essa conclusão não traz informação sobre a paridade de m.
- É mais fácil demonstrar a contrapositiva.

Demonstração pela contrapositiva (exemplo)

Demonstração:

- Tentando demonstrar diretamente, é possível concluir a partir da hipótese que $m = \frac{2k}{3}$, para algum inteiro k. No entanto, essa conclusão não traz informação sobre a paridade de m.
- É mais fácil demonstrar a contrapositiva.
- Isso é, demonstrar que, se $2 \nmid m$, então $2 \nmid 3m$.

Demonstração pela contrapositiva (exemplo)

Demonstração:

- Tentando demonstrar diretamente, é possível concluir a partir da hipótese que $m = \frac{2k}{3}$, para algum inteiro k. No entanto, essa conclusão não traz informação sobre a paridade de m.
- É mais fácil demonstrar a contrapositiva.
- Isso é, demonstrar que, se $2 \nmid m$, então $2 \nmid 3m$.
- Se $2 \nmid m$, então m é ímpar, ou seja, existe inteiro k tal que $m = 2k + 1$. Temos então que:

Demonstração pela contrapositiva (exemplo)

Demonstração:

- Tentando demonstrar diretamente, é possível concluir a partir da hipótese que $m = \frac{2k}{3}$, para algum inteiro k. No entanto, essa conclusão não traz informação sobre a paridade de m.
- É mais fácil demonstrar a contrapositiva.
- Isso é, demonstrar que, se $2 \nmid m$, então $2 \nmid 3m$.
- Se $2 \nmid m$, então m é ímpar, ou seja, existe inteiro k tal que $m = 2k + 1$. Temos então que:

$$3m = 3(2k + 1) = 6k + 3 = 2(3k + 1) + 1.$$

Demonstração pela contrapositiva (exemplo)

Demonstração:

- Tentando demonstrar diretamente, é possível concluir a partir da hipótese que $m = \frac{2k}{3}$, para algum inteiro k. No entanto, essa conclusão não traz informação sobre a paridade de m.
- É mais fácil demonstrar a contrapositiva.
- Isso é, demonstrar que, se $2 \nmid m$, então $2 \nmid 3m$.
- Se $2 \nmid m$, então m é ímpar, ou seja, existe inteiro k tal que $m = 2k + 1$. Temos então que:

$$3m = 3(2k + 1) = 6k + 3 = 2(3k + 1) + 1.$$

- Logo, $3m$ é ímpar, ou seja, $2 \nmid 3m$.

Demonstração por contradição

A **DEMONSTRAÇÃO POR CONTRADIÇÃO** supõe que a afirmação a ser demonstrada é falsa e obtém uma conclusão contraditória.

Demonstração por contradição

A **DEMONSTRAÇÃO POR CONTRADIÇÃO** supõe que a afirmação a ser demonstrada é falsa e obtém uma conclusão contraditória.

- A contradição obtida implica que a suposição é falsa.

Demonstração por contradição

A **DEMONSTRAÇÃO POR CONTRADIÇÃO** supõe que a afirmação a ser demonstrada é falsa e obtém uma conclusão contraditória.

- A contradição obtida implica que a suposição é falsa.
- Portanto, a afirmação é verdadeira.

Demonstração por contradição

A **DEMONSTRAÇÃO POR CONTRADIÇÃO** supõe que a afirmação a ser demonstrada é falsa e obtém uma conclusão contraditória.

- A contradição obtida implica que a suposição é falsa.
- Portanto, a afirmação é verdadeira.
- A negação de $p \Rightarrow q$ corresponde a $p \wedge \neg q$.

Demonstração por contradição

A **DEMONSTRAÇÃO POR CONTRADIÇÃO** supõe que a afirmação a ser demonstrada é falsa e obtém uma conclusão contraditória.

- A contradição obtida implica que a suposição é falsa.
- Portanto, a afirmação é verdadeira.
- A negação de $p \Rightarrow q$ corresponde a $p \wedge \neg q$.

Exemplo

Prove que $\sqrt{2}$ é irracional.

Demonstração por contradição (exemplo)

Demonstração:

Demonstração por contradição (exemplo)

Demonstração:

- Suponha que $\sqrt{2}$ é racional (ou seja que é falso o que desejamos demonstrar).

Demonstração por contradição (exemplo)

Demonstração:

- Suponha que $\sqrt{2}$ é racional (ou seja que é falso o que desejamos demonstrar).
- Então, existem inteiros $p, q \neq 0$ tais que $\sqrt{2} = \frac{p}{q}$ e p e q não possuem divisores comuns distintos de 1.

Demonstração por contradição (exemplo)

Demonstração:

- Suponha que $\sqrt{2}$ é racional (ou seja que é falso o que desejamos demonstrar).
- Então, existem inteiros $p, q \neq 0$ tais que $\sqrt{2} = \frac{p}{q}$ e p e q não possuem divisores comuns distintos de 1.
- Desta forma, $2 = \sqrt{2}^2 = \frac{p^2}{q^2}$ e $p^2 = 2q^2$.

Demonstração por contradição (exemplo)

Demonstração:

- Suponha que $\sqrt{2}$ é racional (ou seja que é falso o que desejamos demonstrar).
- Então, existem inteiros $p, q \neq 0$ tais que $\sqrt{2} = \frac{p}{q}$ e p e q não possuem divisores comuns distintos de 1.
- Desta forma, $2 = \sqrt{2}^2 = \frac{p^2}{q^2}$ e $p^2 = 2q^2$.
- Logo, p^2 é par, o que implica que p deve ser par. Isto é, $p = 2m$ para algum inteiro m.

Demonstração por contradição (exemplo)

Demonstração:

- Suponha que $\sqrt{2}$ é racional (ou seja que é falso o que desejamos demonstrar).
- Então, existem inteiros $p, q \neq 0$ tais que $\sqrt{2} = \frac{p}{q}$ e p e q não possuem divisores comuns distintos de 1.
- Desta forma, $2 = \sqrt{2}^2 = \frac{p^2}{q^2}$ e $p^2 = 2q^2$.
- Logo, p^2 é par, o que implica que p deve ser par. Isto é, $p = 2m$ para algum inteiro m.
- Portanto, $4m^2 = (2m)^2 = p^2 = 2q^2$ e $2m^2 = q^2$.

Demonstração por contradição (exemplo)

Demonstração:

- Suponha que $\sqrt{2}$ é racional (ou seja que é falso o que desejamos demonstrar).
- Então, existem inteiros $p, q \neq 0$ tais que $\sqrt{2} = \frac{p}{q}$ e p e q não possuem divisores comuns distintos de 1.
- Desta forma, $2 = \sqrt{2}^2 = \frac{p^2}{q^2}$ e $p^2 = 2q^2$.
- Logo, p^2 é par, o que implica que p deve ser par. Isto é, $p = 2m$ para algum inteiro m.
- Portanto, $4m^2 = (2m)^2 = p^2 = 2q^2$ e $2m^2 = q^2$.
- Isso implica que q também é par.

Demonstração por contradição (exemplo)

Demonstração:

- Suponha que $\sqrt{2}$ é racional (ou seja que é falso o que desejamos demonstrar).
- Então, existem inteiros $p, q \neq 0$ tais que $\sqrt{2} = \frac{p}{q}$ e p e q não possuem divisores comuns distintos de 1.
- Desta forma, $2 = \sqrt{2}^2 = \frac{p^2}{q^2}$ e $p^2 = 2q^2$.
- Logo, p^2 é par, o que implica que p deve ser par. Isto é, $p = 2m$ para algum inteiro m.
- Portanto, $4m^2 = (2m)^2 = p^2 = 2q^2$ e $2m^2 = q^2$.
- Isso implica que q também é par.
- Concluindo que 2 é divisor comum de p e q, o que é uma contradição!

Demonstração por contradição (exemplo)

Demonstração:

- Suponha que $\sqrt{2}$ é racional (ou seja que é falso o que desejamos demonstrar).
- Então, existem inteiros $p, q \neq 0$ tais que $\sqrt{2} = \frac{p}{q}$ e p e q não possuem divisores comuns distintos de 1.
- Desta forma, $2 = \sqrt{2}^2 = \frac{p^2}{q^2}$ e $p^2 = 2q^2$.
- Logo, p^2 é par, o que implica que p deve ser par. Isto é, $p = 2m$ para algum inteiro m.
- Portanto, $4m^2 = (2m)^2 = p^2 = 2q^2$ e $2m^2 = q^2$.
- Isso implica que q também é par.
- Concluindo que 2 é divisor comum de p e q, o que é uma contradição!
- Assim, a nossa hipótese de $\sqrt{2}$ ser racional é falsa. Logo, $\sqrt{2}$ é irracional.

Demonstração por casos

Na **DEMONSTRAÇÃO POR CASOS**, particionamos as possibilidades em um conjunto de casos e demonstramos cada um deles.

Demonstração por casos

Na **DEMONSTRAÇÃO POR CASOS**, particionamos as possibilidades em um conjunto de casos e demonstramos cada um deles.

- O número de casos é normalmente finito.

Demonstração por casos

Na **DEMONSTRAÇÃO POR CASOS**, particionamos as possibilidades em um conjunto de casos e demonstramos cada um deles.

- O número de casos é normalmente finito.
- Cada caso é demonstrado usando qualquer técnica.

Demonstração por casos

Na **DEMONSTRAÇÃO POR CASOS**, particionamos as possibilidades em um conjunto de casos e demonstramos cada um deles.

- O número de casos é normalmente finito.
- Cada caso é demonstrado usando qualquer técnica.

Exemplo

Provar que a soma de dois inteiros x e y de mesma paridade é sempre par.

Demonstração por casos (exemplo)

Demonstração:

Demonstração por casos (exemplo)

Demonstração:

- Temos que considerar individualmente os casos de ambos x e y serem pares ou ímpares.

Demonstração por casos (exemplo)

Demonstração:

- Temos que considerar individualmente os casos de ambos x e y serem pares ou ímpares.
- **Caso 1:** Ambos x e y são pares. Então, existem inteiros k e l tais que $x = 2k$ e $y = 2l$. Assim,

Demonstração por casos (exemplo)

Demonstração:

- Temos que considerar individualmente os casos de ambos x e y serem pares ou ímpares.
- **Caso 1:** Ambos x e y são pares. Então, existem inteiros k e l tais que $x = 2k$ e $y = 2l$. Assim,

$$x + y = 2k + 2l = 2(k + l).$$

Demonstração por casos (exemplo)

Demonstração:

- Temos que considerar individualmente os casos de ambos x e y serem pares ou ímpares.
- **Caso 1:** Ambos x e y são pares. Então, existem inteiros k e l tais que $x = 2k$ e $y = 2l$. Assim,

$$x + y = 2k + 2l = 2(k + l).$$

- Logo, a soma $x + y$ é par.

Demonstração por casos (exemplo)

Demonstração:

- Temos que considerar individualmente os casos de ambos x e y serem pares ou ímpares.
- **Caso 1:** Ambos x e y são pares. Então, existem inteiros k e l tais que $x = 2k$ e $y = 2l$. Assim,

$$x + y = 2k + 2l = 2(k + l).$$

- Logo, a soma $x + y$ é par.
- **Caso 2:** Ambos x e y são ímpares. Então, existem inteiros k e l tais que $x = 2k + 1$ e $y = 2l + 1$. Assim,

Demonstração por casos (exemplo)

Demonstração:

- Temos que considerar individualmente os casos de ambos x e y serem pares ou ímpares.
- **Caso 1:** Ambos x e y são pares. Então, existem inteiros k e l tais que $x = 2k$ e $y = 2l$. Assim,

$$x + y = 2k + 2l = 2(k + l).$$

- Logo, a soma $x + y$ é par.
- **Caso 2:** Ambos x e y são ímpares. Então, existem inteiros k e l tais que $x = 2k + 1$ e $y = 2l + 1$. Assim,

$$x + y = 2k + 1 + 2l + 1 = 2k + 2l + 2 = 2(k + l + 1).$$

Demonstração por casos (exemplo)

Demonstração:

- Temos que considerar individualmente os casos de ambos x e y serem pares ou ímpares.
- **Caso 1:** Ambos x e y são pares. Então, existem inteiros k e l tais que $x = 2k$ e $y = 2l$. Assim,

$$x + y = 2k + 2l = 2(k + l).$$

- Logo, a soma $x + y$ é par.
- **Caso 2:** Ambos x e y são ímpares. Então, existem inteiros k e l tais que $x = 2k + 1$ e $y = 2l + 1$. Assim,

$$x + y = 2k + 1 + 2l + 1 = 2k + 2l + 2 = 2(k + l + 1).$$

- Logo, a soma $x + y$ é par.

Princípio da boa ordem

Princípio da boa ordem

Princípio da boa ordem: Todo subconjunto não vazio dos naturais tem um menor elemento.

Princípio da boa ordem

Princípio da boa ordem: Todo subconjunto não vazio dos naturais tem um menor elemento.

Exemplo

Prove que todos os números naturais são interessantes.

Princípio da boa ordem

Princípio da boa ordem: Todo subconjunto não vazio dos naturais tem um menor elemento.

Exemplo

Prove que todos os números naturais são interessantes.

Demonstração:

Princípio da boa ordem

Princípio da boa ordem: Todo subconjunto não vazio dos naturais tem um menor elemento.

Exemplo

Prove que todos os números naturais são interessantes.

Demonstração:

- Denote por A o subconjunto dos naturais que não são interessantes e suponha que $A \neq \emptyset$.

Princípio da boa ordem

Princípio da boa ordem: Todo subconjunto não vazio dos naturais tem um menor elemento.

Exemplo

Prove que todos os números naturais são interessantes.

Demonstração:

- Denote por A o subconjunto dos naturais que não são interessantes e suponha que $A \neq \emptyset$.
- Pelo princípio da boa ordem A possui um menor elemento x.

Princípio da boa ordem

Princípio da boa ordem: Todo subconjunto não vazio dos naturais tem um menor elemento.

Exemplo

Prove que todos os números naturais são interessantes.

Demonstração:

- Denote por A o subconjunto dos naturais que não são interessantes e suponha que $A \neq \emptyset$.
- Pelo princípio da boa ordem A possui um menor elemento x.
- Mas, ser o menor dos naturais não interessantes é **algo interessante**.

Princípio da boa ordem

Princípio da boa ordem: Todo subconjunto não vazio dos naturais tem um menor elemento.

Exemplo

Prove que todos os números naturais são interessantes.

Demonstração:

- Denote por A o subconjunto dos naturais que não são interessantes e suponha que $A \neq \emptyset$.
- Pelo princípio da boa ordem A possui um menor elemento x.
- Mas, ser o menor dos naturais não interessantes é **algo interessante**.
- Logo, x seria interessante e $x \notin A$, o que é uma contradição.

Princípio da boa ordem

Princípio da boa ordem: Todo subconjunto não vazio dos naturais tem um menor elemento.

Exemplo

Prove que todos os números naturais são interessantes.

Demonstração:

- Denote por A o subconjunto dos naturais que não são interessantes e suponha que $A \neq \emptyset$.
- Pelo princípio da boa ordem A possui um menor elemento x.
- Mas, ser o menor dos naturais não interessantes é **algo interessante**.
- Logo, x seria interessante e $x \notin A$, o que é uma contradição.
- Portanto, $A = \emptyset$.

Princípio da indução

Princípio da indução matemática

Princípio da indução matemática: Dada uma propriedade P sobre os naturais:

Princípio da indução matemática

Princípio da indução matemática: Dada uma propriedade P sobre os naturais:

- Se $P(n_0)$ é verdadeira para algum natural n_0 e

Princípio da indução matemática

Princípio da indução matemática: Dada uma propriedade P sobre os naturais:

- Se $P(n_0)$ é verdadeira para algum natural n_0 e
- se $P(n)$ ser verdadeira para qualquer natural $n \geq n_0$ implica em $P(n+1)$ ser verdadeira.

Princípio da indução matemática

Princípio da indução matemática: Dada uma propriedade P sobre os naturais:

- Se $P(n_0)$ é verdadeira para algum natural n_0 e
- se $P(n)$ ser verdadeira para qualquer natural $n \geq n_0$ implica em $P(n+1)$ ser verdadeira.
- Então, P é verdadeira para todos os naturais maiores que n_0.

Demonstração do princípio da indução matemática

Usaremos o princípio da boa ordenação e o método de prova por contradição:

Demonstração do princípio da indução matemática

Usaremos o princípio da boa ordenação e o método de prova por contradição:

- Suponha que existe uma propriedade P tal que as condições do princípio de indução matemática são verdadeiras mas a tese é falsa, isto é:

Demonstração do princípio da indução matemática

Usareмos o princípio da boa ordenação e o método de prova por contradição:

- Suponha que existe uma propriedade P tal que as condições do princípio de indução matemática são verdadeiras mas a tese é falsa, isto é:
    - Existe um n_0 natural tal que $P(n_0)$ é verdadeira e, para qualquer $n \geq n_0$, se $P(n)$ é verdadeira, então $P(n+1)$ também é verdadeira.

Demonstração do princípio da indução matemática

Usaremos o princípio da boa ordenação e o método de prova por contradição:

- Suponha que existe uma propriedade P tal que as condições do princípio de indução matemática são verdadeiras mas a tese é falsa, isto é:
    - Existe um n_0 natural tal que $P(n_0)$ é verdadeira e, para qualquer $n \geq n_0$, se $P(n)$ é verdadeira, então $P(n+1)$ também é verdadeira.
    - Mas, P não é verdadeira para todo natural maior ou igual que n_0.

Demonstração do princípio da indução matemática

Usaremos o princípio da boa ordenação e o método de prova por contradição:

- Suponha que existe uma propriedade P tal que as condições do princípio de indução matemática são verdadeiras mas a tese é falsa, isto é:
  - Existe um n_0 natural tal que $P(n_0)$ é verdadeira e, para qualquer $n \geq n_0$, se $P(n)$ é verdadeira, então $P(n+1)$ também é verdadeira.
  - Mas, P não é verdadeira para todo natural maior ou igual que n_0.
- Então, o conjunto dos naturais maiores ou iguais a n_0 para os quais a propriedade P não é verdadeira é não vazio. Denotemos esse conjunto por A.

Demonstração do princípio da indução matemática

Usaremos o princípio da boa ordenação e o método de prova por contradição:

- Suponha que existe uma propriedade P tal que as condições do princípio de indução matemática são verdadeiras mas a tese é falsa, isto é:
    - Existe um n_0 natural tal que $P(n_0)$ é verdadeira e, para qualquer $n \geq n_0$, se $P(n)$ é verdadeira, então $P(n+1)$ também é verdadeira.
    - Mas, P não é verdadeira para todo natural maior ou igual que n_0.
- Então, o conjunto dos naturais maiores ou iguais a n_0 para os quais a propriedade P não é verdadeira é não vazio. Denotemos esse conjunto por A.
- Pelo princípio da boa ordem, A possui um elemento mínimo, seja m tal elemento.

Demonstração do princípio da indução matemática

Usaremos o princípio da boa ordenação e o método de prova por contradição:

- Suponha que existe uma propriedade P tal que as condições do princípio de indução matemática são verdadeiras mas a tese é falsa, isto é:
  - Existe um n_0 natural tal que $P(n_0)$ é verdadeira e, para qualquer $n \geq n_0$, se $P(n)$ é verdadeira, então $P(n+1)$ também é verdadeira.
  - Mas, P não é verdadeira para todo natural maior ou igual que n_0.
- Então, o conjunto dos naturais maiores ou iguais a n_0 para os quais a propriedade P não é verdadeira é não vazio. Denotemos esse conjunto por A.
- Pelo princípio da boa ordem, A possui um elemento mínimo, seja m tal elemento.
- Como os elementos de A são maiores ou iguais a n_0 e $P(n_0)$ é verdadeira enquanto $P(m)$ não, temos que $m \geq n_0 + 1$.

Demonstração do princípio da indução matemática

Usaremos o princípio da boa ordenação e o método de prova por contradição:

- Suponha que existe uma propriedade P tal que as condições do princípio de indução matemática são verdadeiras mas a tese é falsa, isto é:
  - Existe um n_0 natural tal que $P(n_0)$ é verdadeira e, para qualquer $n \geq n_0$, se $P(n)$ é verdadeira, então $P(n+1)$ também é verdadeira.
  - Mas, P não é verdadeira para todo natural maior ou igual que n_0.
- Então, o conjunto dos naturais maiores ou iguais a n_0 para os quais a propriedade P não é verdadeira é não vazio. Denotemos esse conjunto por A.
- Pelo princípio da boa ordem, A possui um elemento mínimo, seja m tal elemento.
- Como os elementos de A são maiores ou iguais a n_0 e $P(n_0)$ é verdadeira enquanto $P(m)$ não, temos que $m \geq n_0 + 1$.
- Se $P(m-1)$ não fosse verdadeira, então $m-1$ estaria em A e m não seria o menor elemento de A. Portanto, $P(m-1)$ tem que ser verdadeira.

Demonstração do princípio da indução matemática

Usaremos o princípio da boa ordenação e o método de prova por contradição:

- Suponha que existe uma propriedade P tal que as condições do princípio de indução matemática são verdadeiras mas a tese é falsa, isto é:
  - Existe um n_0 natural tal que $P(n_0)$ é verdadeira e, para qualquer $n \geq n_0$, se $P(n)$ é verdadeira, então $P(n+1)$ também é verdadeira.
  - Mas, P não é verdadeira para todo natural maior ou igual que n_0.
- Então, o conjunto dos naturais maiores ou iguais a n_0 para os quais a propriedade P não é verdadeira é não vazio. Denotemos esse conjunto por A.
- Pelo princípio da boa ordem, A possui um elemento mínimo, seja m tal elemento.
- Como os elementos de A são maiores ou iguais a n_0 e $P(n_0)$ é verdadeira enquanto $P(m)$ não, temos que $m \geq n_0 + 1$.
- Se $P(m-1)$ não fosse verdadeira, então $m-1$ estaria em A e m não seria o menor elemento de A. Portanto, $P(m-1)$ tem que ser verdadeira.
- Mas, $m-1 \geq n_0$ e $P(m-1)$ é verdadeira, logo $P(m-+1) = P(m)$ deve ser verdadeira.

Demonstração do princípio da indução matemática

Usaremos o princípio da boa ordenação e o método de prova por contradição:

- Suponha que existe uma propriedade P tal que as condições do princípio de indução matemática são verdadeiras mas a tese é falsa, isto é:
  - Existe um n_0 natural tal que $P(n_0)$ é verdadeira e, para qualquer $n \geq n_0$, se $P(n)$ é verdadeira, então $P(n+1)$ também é verdadeira.
  - Mas, P não é verdadeira para todo natural maior ou igual que n_0.
- Então, o conjunto dos naturais maiores ou iguais a n_0 para os quais a propriedade P não é verdadeira é não vazio. Denotemos esse conjunto por A.
- Pelo princípio da boa ordem, A possui um elemento mínimo, seja m tal elemento.
- Como os elementos de A são maiores ou iguais a n_0 e $P(n_0)$ é verdadeira enquanto $P(m)$ não, temos que $m \geq n_0 + 1$.
- Se $P(m-1)$ não fosse verdadeira, então $m-1$ estaria em A e m não seria o menor elemento de A. Portanto, $P(m-1)$ tem que ser verdadeira.
- Mas, $m - 1 \geq n_0$ e $P(m-1)$ é verdadeira, logo $P(m - +1) = P(m)$ deve ser verdadeira.
- Isso contradiz $m \in A$, portanto P é verdadeira para todo natural maior que n_0!

Demonstração por indução

Usando o **PRINCÍPIO DA INDUÇÃO**, demonstramos uma afirmação $P(n)$ que depende de um parâmetro natural n.

Demonstração por indução

Usando o **PRINCÍPIO DA INDUÇÃO**, demonstramos uma afirmação $P(n)$ que depende de um parâmetro natural n.

- Demonstramos $P(n)$ para todos os valores de n.

Demonstração por indução

Usando o **PRINCÍPIO DA INDUÇÃO**, demonstramos uma afirmação $P(n)$ que depende de um parâmetro natural n.

- Demonstramos $P(n)$ para todos os valores de n.
- Quebramos a demonstração em duas partes.

Demonstração por indução

Usando o **PRINCÍPIO DA INDUÇÃO**, demonstramos uma afirmação $P(n)$ que depende de um parâmetro natural n.

- Demonstramos $P(n)$ para todos os valores de n.
- Quebramos a demonstração em duas partes.

1. **CASO BÁSICO**:

Demonstração por indução

Usando o **PRINCÍPIO DA INDUÇÃO**, demonstramos uma afirmação $P(n)$ que depende de um parâmetro natural n.

- Demonstramos $P(n)$ para todos os valores de n.
- Quebramos a demonstração em duas partes.

1. **CASO BÁSICO**:
    - Consideramos $n = 1$.

Demonstração por indução

Usando o **PRINCÍPIO DA INDUÇÃO**, demonstramos uma afirmação $P(n)$ que depende de um parâmetro natural n.

- Demonstramos $P(n)$ para todos os valores de n.
- Quebramos a demonstração em duas partes.

1. **CASO BÁSICO**:
    - Consideramos $n = 1$.
    - Demonstramos $P(n)$.

Demonstração por indução

Usando o **PRINCÍPIO DA INDUÇÃO**, demonstramos uma afirmação $P(n)$ que depende de um parâmetro natural n.

- Demonstramos $P(n)$ para todos os valores de n.
- Quebramos a demonstração em duas partes.

1. **CASO BÁSICO**:
   - Consideramos $n = 1$.
   - Demonstramos $P(n)$.
2. **CASO GERAL**:

Demonstração por indução

Usando o **PRINCÍPIO DA INDUÇÃO**, demonstramos uma afirmação $P(n)$ que depende de um parâmetro natural n.

- Demonstramos $P(n)$ para todos os valores de n.
- Quebramos a demonstração em duas partes.

1. **CASO BÁSICO**:
   - Consideramos $n = 1$.
   - Demonstramos $P(n)$.
2. **CASO GERAL**:
   - Consideramos $n > 1$.

Demonstração por indução

Usando o **PRINCÍPIO DA INDUÇÃO**, demonstramos uma afirmação $P(n)$ que depende de um parâmetro natural n.

- Demonstramos $P(n)$ para todos os valores de n.
- Quebramos a demonstração em duas partes.

1. **CASO BÁSICO**:
   - Consideramos $n = 1$.
   - Demonstramos $P(n)$.
2. **CASO GERAL**:
   - Consideramos $n > 1$.
   - **Hipótese da indução:** supomos que $P(n-1)$ vale.

Demonstração por indução

Usando o **PRINCÍPIO DA INDUÇÃO**, demonstramos uma afirmação $P(n)$ que depende de um parâmetro natural n.

- Demonstramos $P(n)$ para todos os valores de n.
- Quebramos a demonstração em duas partes.

1. **CASO BÁSICO**:
   - Consideramos $n = 1$.
   - Demonstramos $P(n)$.
2. **CASO GERAL**:
   - Consideramos $n > 1$.
   - **Hipótese da indução:** supomos que $P(n-1)$ vale.
   - **Passo da indução:** demonstramos $P(n)$ usando a hipótese.

Demonstração por indução

Usando o **PRINCÍPIO DA INDUÇÃO**, demonstramos uma afirmação $P(n)$ que depende de um parâmetro natural n.

- Demonstramos $P(n)$ para todos os valores de n.
- Quebramos a demonstração em duas partes.

1. **CASO BÁSICO**:
   - Consideramos $n = 1$.
   - Demonstramos $P(n)$.
2. **CASO GERAL**:
   - Consideramos $n > 1$.
   - **Hipótese da indução:** supomos que $P(n-1)$ vale.
   - **Passo da indução:** demonstramos $P(n)$ usando a hipótese.

Exemplo

Prove que a soma dos n primeiros números ímpares é n^2.

Demonstração por indução alternativa

Uma forma equivalente:

Demonstração por indução alternativa

Uma forma equivalente:

1. Caso básico:

Demonstração por indução alternativa

Uma forma equivalente:

1. Caso básico:
   - Consideramos $n = 1$.

Demonstração por indução alternativa

Uma forma equivalente:

1. Caso básico:
   - Consideramos $n = 1$.
   - Demonstramos $P(n)$.

Demonstração por indução alternativa

Uma forma equivalente:

1. Caso básico:
   - Consideramos $n = 1$.
   - Demonstramos $P(n)$.
2. Caso geral:

Demonstração por indução alternativa

Uma forma equivalente:

1. Caso básico:
   - Consideramos $n = 1$.
   - Demonstramos $P(n)$.
2. Caso geral:
   - Consideramos $n \geq 1$:

Demonstração por indução alternativa

Uma forma equivalente:

1. Caso básico:
   - Consideramos $n = 1$.
   - Demonstramos $P(n)$.
2. Caso geral:
   - Consideramos $n \geq 1$:
   - Supomos que $P(n)$ vale.

Demonstração por indução alternativa

Uma forma equivalente:

1. Caso básico:
   - Consideramos $n = 1$.
   - Demonstramos $P(n)$.
2. Caso geral:
   - Consideramos $n \geq 1$:
   - Supomos que $P(n)$ vale.
   - Demonstramos $P(n+1)$.

Demonstração por indução alternativa

Uma forma equivalente:

1. Caso básico:
   - Consideramos $n = 1$.
   - Demonstramos $P(n)$.
2. Caso geral:
   - Consideramos $n \geq 1$:
   - Supomos que $P(n)$ vale.
   - Demonstramos $P(n+1)$.

Exemplo

Prove que a soma dos n primeiros números ímpares é n^2.

Fortalecendo a hipótese

Algumas vezes é útil supor que a hipótese vale para **TODOS** os casos anteriores.

Fortalecendo a hipótese

Algumas vezes é útil supor que a hipótese vale para **TODOS** os casos anteriores.

1. Caso básico:

Fortalecendo a hipótese

Algumas vezes é útil supor que a hipótese vale para **TODOS** os casos anteriores.

1. Caso básico:
   - Consideramos $n = 1$.

Fortalecendo a hipótese

Algumas vezes é útil supor que a hipótese vale para **TODOS** os casos anteriores.

1. Caso básico:
   - Consideramos $n = 1$.
   - Demonstramos $P(n)$.

Fortalecendo a hipótese

Algumas vezes é útil supor que a hipótese vale para **TODOS** os casos anteriores.

1. Caso básico:
   - Consideramos $n = 1$.
   - Demonstramos $P(n)$.
2. Caso geral:

Fortalecendo a hipótese

Algumas vezes é útil supor que a hipótese vale para **TODOS** os casos anteriores.

1. Caso básico:
   - Consideramos $n = 1$.
   - Demonstramos $P(n)$.
2. Caso geral:
   - Consideramos $n > 1$.

Fortalecendo a hipótese

Algumas vezes é útil supor que a hipótese vale para **TODOS** os casos anteriores.

1. Caso básico:
   - Consideramos $n = 1$.
   - Demonstramos $P(n)$.
2. Caso geral:
   - Consideramos $n > 1$.
   - Supomos que $P(k)$ vale para todo $1 \leq k \leq n - 1$.

Fortalecendo a hipótese

Algumas vezes é útil supor que a hipótese vale para **TODOS** os casos anteriores.

1. Caso básico:
   - Consideramos $n = 1$.
   - Demonstramos $P(n)$.
2. Caso geral:
   - Consideramos $n > 1$.
   - Supomos que $P(k)$ vale para todo $1 \leq k \leq n - 1$.
   - demonstramos $P(n)$.

Fortalecendo a hipótese

Algumas vezes é útil supor que a hipótese vale para **TODOS** os casos anteriores.

1. Caso básico:
   - Consideramos $n = 1$.
   - Demonstramos $P(n)$.
2. Caso geral:
   - Consideramos $n > 1$.
   - Supomos que $P(k)$ vale para todo $1 \leq k \leq n - 1$.
   - demonstramos $P(n)$.

Exemplo

Prove que todo inteiro n pode ser escrito como a soma de diferentes potências de 2.

Indução a partir de um ponto

Às vezes queremos provar uma afirmação $P(n)$ apenas para $n \geq n_0$ para algum n_0.

Indução a partir de um ponto

Às vezes queremos provar uma afirmação $P(n)$ apenas para $n \geq n_0$ para algum n_0.

1. Caso básico:

Indução a partir de um ponto

Às vezes queremos provar uma afirmação $P(n)$ apenas para $n \geq n_0$ para algum n_0.

1. Caso básico:
   - Consideramos $n = n_0$.

Indução a partir de um ponto

Às vezes queremos provar uma afirmação $P(n)$ apenas para $n \geq n_0$ para algum n_0.

1. Caso básico:
   - Consideramos $n = n_0$.
   - Demonstramos $P(n)$.

Indução a partir de um ponto

Às vezes queremos provar uma afirmação $P(n)$ apenas para $n \geq n_0$ para algum n_0.

1. Caso básico:
   - Consideramos $n = n_0$.
   - Demonstramos $P(n)$.
2. Caso geral:

Indução a partir de um ponto

Às vezes queremos provar uma afirmação $P(n)$ apenas para $n \geq n_0$ para algum n_0.

1. Caso básico:
   - Consideramos $n = n_0$.
   - Demonstramos $P(n)$.
2. Caso geral:
   - Consideramos $n > n_0$.

Indução a partir de um ponto

Às vezes queremos provar uma afirmação $P(n)$ apenas para $n \geq n_0$ para algum n_0.

1. Caso básico:
   - Consideramos $n = n_0$.
   - Demonstramos $P(n)$.
2. Caso geral:
   - Consideramos $n > n_0$.
   - Supomos que $P(k)$ vale para todo $n_0 \leq k \leq n - 1$.

Indução a partir de um ponto

Às vezes queremos provar uma afirmação $P(n)$ apenas para $n \geq n_0$ para algum n_0.

1. Caso básico:
   - Consideramos $n = n_0$.
   - Demonstramos $P(n)$.
2. Caso geral:
   - Consideramos $n > n_0$.
   - Supomos que $P(k)$ vale para todo $n_0 \leq k \leq n - 1$.
   - Demonstramos $P(n)$ usando a hipótese.

Indução a partir de um ponto

Às vezes queremos provar uma afirmação $P(n)$ apenas para $n \geq n_0$ para algum n_0.

1. Caso básico:
   - Consideramos $n = n_0$.
   - Demonstramos $P(n)$.
2. Caso geral:
   - Consideramos $n > n_0$.
   - Supomos que $P(k)$ vale para todo $n_0 \leq k \leq n - 1$.
   - Demonstramos $P(n)$ usando a hipótese.

Exemplo

Prove que todo inteiro $n \geq 2$ pode ser fatorado como um produto de primos.

Exemplos de demonstração por indução

Exemplo 1

Exemplo

Demonstre que, para inteiros $x \geq 1$ e $n \geq 1$, o número $x^n - 1$ é divisível por $x - 1$.

Exemplo 1

Exemplo

Demonstre que, para inteiros $x \geq 1$ e $n \geq 1$, o número $x^n - 1$ é divisível por $x - 1$.

Demonstração:

Exemplo 1

Exemplo

Demonstre que, para inteiros $x \geq 1$ e $n \geq 1$, o número $x^n - 1$ é divisível por $x - 1$.

Demonstração:

1. No caso básico, considere $n = 1$:

Exemplo 1

Exemplo

Demonstre que, para inteiros $x \geq 1$ e $n \geq 1$, o número $x^n - 1$ é divisível por $x - 1$.

Demonstração:

1. No caso básico, considere $n = 1$:
   - Temos $x^n - 1 = x - 1$, que é divisível por $x - 1$.

Exemplo 1

Exemplo

Demonstre que, para inteiros $x \geq 1$ e $n \geq 1$, o número $x^n - 1$ é divisível por $x - 1$.

Demonstração:

1. No caso básico, considere $n = 1$:
   - Temos $x^n - 1 = x - 1$, que é divisível por $x - 1$.
   - Isso mostra a afirmação para $n = 1$.

Exemplo 1 (cont)

2. No caso geral, considere $n \geq 1$:

Exemplo 1 (cont)

2. No caso geral, considere $n \geq 1$:
   - **Hipótese de indução**:

Exemplo 1 (cont)

2. No caso geral, considere $n \geq 1$:
    - **Hipótese de indução**:
        - Suponha que $x - 1$ divide $x^n - 1$.

Exemplo 1 (cont)

2. No caso geral, considere $n \geq 1$:
   - **Hipótese de indução**:
     - Suponha que $x - 1$ divide $x^n - 1$.
   - **Passo de indução**:

Exemplo 1 (cont)

2. No caso geral, considere $n \geq 1$:
   - **Hipótese de indução**:
     - Suponha que $x - 1$ divide $x^n - 1$.
   - **Passo de indução**:
     - Observe que $x^{n+1} - 1 = x(x^n - 1) + (x - 1)$.

Exemplo 1 (cont)

2. No caso geral, considere $n \geq 1$:
   - **Hipótese de indução**:
     - Suponha que $x - 1$ divide $x^n - 1$.
   - **Passo de indução**:
     - Observe que $x^{n+1} - 1 = x(x^n - 1) + (x - 1)$.
     - Pela h.i., $x^n - 1$ é divisível por $x - 1$.

Exemplo 1 (cont)

2. No caso geral, considere $n \geq 1$:
   - **Hipótese de indução**:
     - Suponha que $x - 1$ divide $x^n - 1$.
   - **Passo de indução**:
     - Observe que $x^{n+1} - 1 = x(x^n - 1) + (x - 1)$.
     - Pela h.i., $x^n - 1$ é divisível por $x - 1$.
     - Então, $x - 1$ divide o lado direito da equação.

Exemplo 1 (cont)

2. No caso geral, considere $n \geq 1$:
   - **Hipótese de indução**:
     - Suponha que $x - 1$ divide $x^n - 1$.
   - **Passo de indução**:
     - Observe que $x^{n+1} - 1 = x(x^n - 1) + (x - 1)$.
     - Pela h.i., $x^n - 1$ é divisível por $x - 1$.
     - Então, $x - 1$ divide o lado direito da equação.
     - Portanto, $x - 1$ também divide $x^{n+1} - 1$.

Exemplo 2

Exemplo

Demonstre que a equação

$$\sum_{i=1}^{n}(3+5i) = \frac{5n^2+11n}{2}$$

vale para todo inteiro $n \geq 1$.

Demonstração:

Exemplo 2

Exemplo

Demonstre que a equação

$$\sum_{i=1}^{n}(3+5i) = \frac{5n^2+11n}{2}$$

vale para todo inteiro $n \geq 1$.

Demonstração:

- Para o caso básico, temos:

$$\sum_{i=1}^{1}(3+5i) = 8 = \frac{5n^2+11n}{2}.$$

Exemplo 2

Exemplo

Demonstre que a equação

$$\sum_{i=1}^{n}(3+5i) = \frac{5n^2+11n}{2}$$

vale para todo inteiro $n \geq 1$.

Demonstração:

- Para o caso básico, temos:

$$\sum_{i=1}^{1}(3+5i) = 8 = \frac{5n^2+11n}{2}.$$

- Então, a afirmação vale quando $n = 1$.

Exemplo 2 (cont)

- Considere um número $n > 1$ fixo.

Exemplo 2 (cont)

- Considere um número $n > 1$ fixo.
- Suponha que a equação valha para $n - 1$.

Exemplo 2 (cont)

- Considere um número $n > 1$ fixo.
- Suponha que a equação valha para $n - 1$.
- Vamos mostrar que a equação também vale para n.

Exemplo 2 (cont)

- Considere um número $n > 1$ fixo.
- Suponha que a equação valha para $n - 1$.
- Vamos mostrar que a equação também vale para n.
- Desenvolvendo a soma,

$$\sum_{i=1}^{n}(3 + 5i)$$

Exemplo 2 (cont)

- Considere um número $n > 1$ fixo.
- Suponha que a equação valha para $n - 1$.
- Vamos mostrar que a equação também vale para n.
- Desenvolvendo a soma,

$$\sum_{i=1}^{n}(3+5i) = \sum_{i=1}^{n-1}(3+5i) + (3+5n)$$

Exemplo 2 (cont)

- Considere um número $n > 1$ fixo.
- Suponha que a equação valha para $n - 1$.
- Vamos mostrar que a equação também vale para n.
- Desenvolvendo a soma,

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n}(3+5i) &= \sum_{i=1}^{n-1}(3+5i) + (3+5n) \\ &= \frac{5(n-1)^2 + 11(n-1)}{2} + (3+5n) \qquad \text{(pela h.i.)}\end{aligned}$$

Exemplo 2 (cont)

- Considere um número $n > 1$ fixo.
- Suponha que a equação valha para $n - 1$.
- Vamos mostrar que a equação também vale para n.
- Desenvolvendo a soma,

$$
\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{n}(3+5i) &= \sum_{i=1}^{n-1}(3+5i) + (3+5n) \\
&= \frac{5(n-1)^2 + 11(n-1)}{2} + (3+5n) \qquad \text{(pela h.i.)} \\
&= \frac{5n^2 - 10n + 5 + 11n - 11}{2} + \frac{6+10n}{2}
\end{aligned}
$$

Exemplo 2 (cont)

- Considere um número $n > 1$ fixo.
- Suponha que a equação valha para $n - 1$.
- Vamos mostrar que a equação também vale para n.
- Desenvolvendo a soma,

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{n}(3+5i) &= \sum_{i=1}^{n-1}(3+5i) + (3+5n) \\
&= \frac{5(n-1)^2 + 11(n-1)}{2} + (3+5n) \qquad \text{(pela h.i.)} \\
&= \frac{5n^2 - 10n + 5 + 11n - 11}{2} + \frac{6+10n}{2} \\
&= \frac{5n^2 + 11n}{2}.
\end{aligned}$$

Exemplo 3

Exemplo

Demonstre que a inequação

$$(1+x)^n \geq 1 + nx$$

vale para todo natural n e real x tal que $(1+x) > 0$.

Exemplo 3

Exemplo

Demonstre que a inequação

$$(1+x)^n \geq 1+nx$$

vale para todo natural n *e real* x *tal que* $(1+x) > 0$.

Demonstração:

Exemplo 3

Exemplo

Demonstre que a inequação

$$(1+x)^n \geq 1+nx$$

vale para todo natural n e real x tal que $(1+x) > 0$.

Demonstração:

- Se $n = 1$, ambos os lados da inequação valem $1 + x$.

Exemplo 3

Exemplo

Demonstre que a inequação

$$(1+x)^n \geq 1 + nx$$

vale para todo natural n *e real* x *tal que* $(1+x) > 0$.

Demonstração:

- Se $n = 1$, ambos os lados da inequação valem $1 + x$.
- Isso demonstra o caso básico.

Exemplo 3 (cont)

- Considere $n \geq 1$ e suponha que a inequação vale para n.

Exemplo 3 (cont)

- Considere $n \geq 1$ e suponha que a inequação vale para n.
- Desenvolvendo o lado esquerdo da inequação, temos:

$$(1 + x)^{n+1}$$

Exemplo 3 (cont)

- Considere $n \geq 1$ e suponha que a inequação vale para n.
- Desenvolvendo o lado esquerdo da inequação, temos:

$$(1 + x)^{n+1} = (1 + x)^n (1 + x)$$

Exemplo 3 (cont)

- Considere $n \geq 1$ e suponha que a inequação vale para n.
- Desenvolvendo o lado esquerdo da inequação, temos:

$$\begin{aligned} (1+x)^{n+1} &= (1+x)^n(1+x) \\ &\geq (1+nx)(1+x) \qquad \text{(pela h.i. e já que } (1+x) > 0\text{)} \end{aligned}$$

Exemplo 3 (cont)

- Considere $n \geq 1$ e suponha que a inequação vale para n.
- Desenvolvendo o lado esquerdo da inequação, temos:

$$\begin{aligned}
(1+x)^{n+1} &= (1+x)^n(1+x) \\
&\geq (1+nx)(1+x) \qquad \text{(pela h.i. e já que } (1+x)>0) \\
&= 1+(n+1)x+nx^2
\end{aligned}$$

Exemplo 3 (cont)

- Considere $n \geq 1$ e suponha que a inequação vale para n.
- Desenvolvendo o lado esquerdo da inequação, temos:

$$\begin{aligned}
(1+x)^{n+1} &= (1+x)^n(1+x) \\
&\geq (1+nx)(1+x) && \text{(pela h.i. e já que } (1+x) > 0) \\
&= 1 + (n+1)x + nx^2 \\
&\geq 1 + (n+1)x. && \text{(já que } nx^2 \geq 0)
\end{aligned}$$

Exemplo 3 (cont)

- Considere $n \geq 1$ e suponha que a inequação vale para n.
- Desenvolvendo o lado esquerdo da inequação, temos:

$$\begin{aligned}
(1+x)^{n+1} &= (1+x)^n(1+x) \\
&\geq (1+nx)(1+x) && \text{(pela h.i. e já que } (1+x) > 0\text{)} \\
&= 1 + (n+1)x + nx^2 \\
&\geq 1 + (n+1)x. && \text{(já que } nx^2 \geq 0\text{)}
\end{aligned}$$

- Isso demonstra desigualdade para $n+1$.

Exemplo 4

Algumas vezes temos que ter mais cuidado ao usar a hipótese da indução.

Exemplo 4

Algumas vezes temos que ter mais cuidado ao usar a hipótese da indução.

Exemplo

Demonstre que a série S_n definida abaixo satisfaz

$$S_n = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \cdots + \frac{1}{2^n} < 1,$$

para todo inteiro $n \geq 1$.

Exemplo 4

Algumas vezes temos que ter mais cuidado ao usar a hipótese da indução.

Exemplo

Demonstre que a série S_n definida abaixo satisfaz

$$S_n = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \cdots + \frac{1}{2^n} < 1,$$

para todo inteiro $n \geq 1$.

Demonstração:

Exemplo 4

Algumas vezes temos que ter mais cuidado ao usar a hipótese da indução.

Exemplo

Demonstre que a série S_n definida abaixo satisfaz

$$S_n = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \cdots + \frac{1}{2^n} < 1,$$

para todo inteiro $n \geq 1$.

Demonstração:

- Para $n = 1$, a inequação se reduz a $\frac{1}{2} < 1$, que é válida.

Exemplo 4

Algumas vezes temos que ter mais cuidado ao usar a hipótese da indução.

Exemplo

Demonstre que a série S_n definida abaixo satisfaz

$$S_n = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \cdots + \frac{1}{2^n} < 1,$$

para todo inteiro $n \geq 1$.

Demonstração:

- Para $n = 1$, a inequação se reduz a $\frac{1}{2} < 1$, que é válida.
- Isso demonstra o caso básico.

Exemplo 4 (cont)

- Considere um número $n \geq 1$ e suponha que $S_n < 1$.

Exemplo 4 (cont)

- Considere um número $n \geq 1$ e suponha que $S_n < 1$.
- Queremos mostrar que $S_{n+1} < 1$.

Exemplo 4 (cont)

- Considere um número $n \geq 1$ e suponha que $S_n < 1$.
- Queremos mostrar que $S_{n+1} < 1$.

Primeira tentativa:

Exemplo 4 (cont)

- Considere um número $n \geq 1$ e suponha que $S_n < 1$.
- Queremos mostrar que $S_{n+1} < 1$.

Primeira tentativa:

- Desenvolvemos S_{n+1} usando a definição:

Exemplo 4 (cont)

- Considere um número $n \geq 1$ e suponha que $S_n < 1$.
- Queremos mostrar que $S_{n+1} < 1$.

Primeira tentativa:

- Desenvolvemos S_{n+1} usando a definição:

$$S_{n+1}$$

Exemplo 4 (cont)

- Considere um número $n \geq 1$ e suponha que $S_n < 1$.
- Queremos mostrar que $S_{n+1} < 1$.

Primeira tentativa:

- Desenvolvemos S_{n+1} usando a definição:

$$S_{n+1} = S_n + \frac{1}{2^{n+1}}$$

Exemplo 4 (cont)

- Considere um número $n \geq 1$ e suponha que $S_n < 1$.
- Queremos mostrar que $S_{n+1} < 1$.

Primeira tentativa:

- Desenvolvemos S_{n+1} usando a definição:

$$S_{n+1} = S_n + \frac{1}{2^{n+1}} < \; 1 + \frac{1}{2^{n+1}} \qquad \text{(pela h.i.)}$$

Exemplo 4 (cont)

- Considere um número $n \geq 1$ e suponha que $S_n < 1$.
- Queremos mostrar que $S_{n+1} < 1$.

Primeira tentativa:

- Desenvolvemos S_{n+1} usando a definição:

$$S_{n+1} = S_n + \frac{1}{2^{n+1}} < \; 1 + \frac{1}{2^{n+1}} \qquad \text{(pela h.i.)}$$

- Mas o lado direito já é maior do que 1!

Exemplo 4 (cont)

Podemos manipular S_{n+1} e usar a hipótese de outro jeito:

Exemplo 4 (cont)

Podemos manipular S_{n+1} e usar a hipótese de outro jeito:

S_{n+1}

Exemplo 4 (cont)

Podemos manipular S_{n+1} e usar a hipótese de outro jeito:

$$S_{n+1} = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \cdots + \frac{1}{2^{n+1}}$$

Exemplo 4 (cont)

Podemos manipular S_{n+1} e usar a hipótese de outro jeito:

$$
\begin{aligned}
S_{n+1} &= \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \cdots + \frac{1}{2^{n+1}} \\
&= \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{2^n}\right)
\end{aligned}
$$

Exemplo 4 (cont)

Podemos manipular S_{n+1} e usar a hipótese de outro jeito:

$$\begin{aligned} S_{n+1} &= \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \cdots + \frac{1}{2^{n+1}} \\ &= \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{2^n}\right) \\ &< \frac{1}{2} + \frac{1}{2}(1) && \text{(pela h.i.)} \end{aligned}$$

Exemplo 4 (cont)

Podemos manipular S_{n+1} e usar a hipótese de outro jeito:

$$\begin{aligned} S_{n+1} &= \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \cdots + \frac{1}{2^{n+1}} \\ &= \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{2^n}\right) \\ &< \frac{1}{2} + \frac{1}{2}(1) && \text{(pela h.i.)} \\ &= 1. \end{aligned}$$

Exemplo 4 (cont)

Podemos manipular S_{n+1} e usar a hipótese de outro jeito:

$$\begin{aligned}
S_{n+1} &= \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \cdots + \frac{1}{2^{n+1}} \\
&= \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{2^n}\right) \\
&< \frac{1}{2} + \frac{1}{2}(1) && \text{(pela h.i.)} \\
&= 1.
\end{aligned}$$

Isto conclui a demonstração.

Indução reversa

Podemos usar indução para derivar o seguinte resultado.

Indução reversa

Podemos usar indução para derivar o seguinte resultado.

Teorema (Indução reversa)

Considere uma afirmação $P(n)$ e suponha que:

Indução reversa

Podemos usar indução para derivar o seguinte resultado.

Teorema (Indução reversa)

Considere uma afirmação $P(n)$ e suponha que:

1. *$P(n)$ vale para um subconjunto infinito de naturais.*

Indução reversa

Podemos usar indução para derivar o seguinte resultado.

Teorema (Indução reversa)

Considere uma afirmação $P(n)$ e suponha que:

1. *$P(n)$ vale para um subconjunto infinito de naturais.*
2. *Se $P(n)$ vale para $n > 1$, então $P(n-1)$ também vale.*

Indução reversa

Podemos usar indução para derivar o seguinte resultado.

Teorema (Indução reversa)

Considere uma afirmação $P(n)$ e suponha que:

1. *$P(n)$ vale para um subconjunto infinito de naturais.*
2. *Se $P(n)$ vale para $n > 1$, então $P(n-1)$ também vale.*

Então $P(n)$ vale para todo natural n.

Indução reversa

Podemos usar indução para derivar o seguinte resultado.

Teorema (Indução reversa)

Considere uma afirmação $P(n)$ e suponha que:

1. *$P(n)$ vale para um subconjunto infinito de naturais.*
2. *Se $P(n)$ vale para $n > 1$, então $P(n-1)$ também vale.*

Então $P(n)$ vale para todo natural n.

Você consegue ver por que esse resultado vale?

Exemplo 5

Exemplo

Se $x_1, x_2, \ldots, x_n$ *são números reais positivos, então:*

$$(x_1 x_2 \ldots x_n)^{\frac{1}{n}} \leq \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n}.$$

Exemplo 5

Exemplo

Se $x_1, x_2, \ldots, x_n$ *são números reais positivos, então:*

$$(x_1 x_2 \ldots x_n)^{\frac{1}{n}} \leq \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n}.$$

Demonstração:

Exemplo 5

Exemplo

Se $x_1, x_2, \ldots, x_n$ são números reais positivos, então:

$$(x_1 x_2 \ldots x_n)^{\frac{1}{n}} \leq \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n}.$$

Demonstração:

1. Primeiro, mostramos que vale para $n = 2^k$ para todo $k \geq 0$.

Exemplo 5

Exemplo

Se $x_1, x_2, \ldots, x_n$ *são números reais positivos, então:*

$$(x_1 x_2 \ldots x_n)^{\frac{1}{n}} \leq \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n}.$$

Demonstração:

1. Primeiro, mostramos que vale para $n = 2^k$ para todo $k \geq 0$.
2. Depois, mostramos que, se vale n, também vale para $n - 1$.

Exemplo 5 (cont)

Lema (1)

Considere um inteiro $k \geq 0$. Se $n = 2^k$, então o teorema vale.

Exemplo 5 (cont)

Lema (1)

Considere um inteiro $k \geq 0$. Se $n = 2^k$, então o teorema vale.

Vamos mostrar por indução em k.

Exemplo 5 (cont)

Lema (1)

Considere um inteiro $k \geq 0$. Se $n = 2^k$, então o teorema vale.

Vamos mostrar por indução em k.

- Se $n = 2^0 = 1$, a inequação vale trivialmente.

Exemplo 5 (cont)

Lema (1)

Considere um inteiro $k \geq 0$. Se $n = 2^k$, então o teorema vale.

Vamos mostrar por indução em k.

- Se $n = 2^0 = 1$, a inequação vale trivialmente.
- Se $n = 2^1 = 2$, a inequação vale, já que:

Exemplo 5 (cont)

Lema (1)

Considere um inteiro $k \geq 0$. Se $n = 2^k$, então o teorema vale.

Vamos mostrar por indução em k.

- Se $n = 2^0 = 1$, a inequação vale trivialmente.
- Se $n = 2^1 = 2$, a inequação vale, já que:

$$\sqrt{x_1 x_2} \leq \frac{x_1 + x_2}{2} \qquad \Leftrightarrow$$

Exemplo 5 (cont)

Lema (1)

Considere um inteiro $k \geq 0$. Se $n = 2^k$, então o teorema vale.

Vamos mostrar por indução em k.

- Se $n = 2^0 = 1$, a inequação vale trivialmente.
- Se $n = 2^1 = 2$, a inequação vale, já que:

$$\sqrt{x_1 x_2} \leq \frac{x_1 + x_2}{2} \qquad \Leftrightarrow$$

$$x_1 x_2 \leq \frac{x_1^2 + 2x_1 x_2 + x_2^2}{4} \qquad \Leftrightarrow$$

Exemplo 5 (cont)

Lema (1)

Considere um inteiro $k \geq 0$. Se $n = 2^k$, então o teorema vale.

Vamos mostrar por indução em k.

- Se $n = 2^0 = 1$, a inequação vale trivialmente.
- Se $n = 2^1 = 2$, a inequação vale, já que:

$$
\begin{aligned}
\sqrt{x_1 x_2} &\leq \frac{x_1 + x_2}{2} && \Leftrightarrow \\
x_1 x_2 &\leq \frac{x_1^2 + 2x_1 x_2 + x_2^2}{4} && \Leftrightarrow \\
2x_1 x_2 &\leq x_1^2 + x_2^2 && \Leftrightarrow
\end{aligned}
$$

Exemplo 5 (cont)

Lema (1)

Considere um inteiro $k \geq 0$. Se $n = 2^k$, então o teorema vale.

Vamos mostrar por indução em k.

- Se $n = 2^0 = 1$, a inequação vale trivialmente.
- Se $n = 2^1 = 2$, a inequação vale, já que:

$$
\begin{aligned}
\sqrt{x_1 x_2} &\leq \frac{x_1 + x_2}{2} && \Leftrightarrow \\
x_1 x_2 &\leq \frac{x_1^2 + 2x_1x_2 + x_2^2}{4} && \Leftrightarrow \\
2x_1x_2 &\leq x_1^2 + x_2^2 && \Leftrightarrow \\
0 &\leq x_1^2 - 2x_1x_2 + x_2^2 && \Leftrightarrow
\end{aligned}
$$

Exemplo 5 (cont)

Lema (1)

Considere um inteiro $k \geq 0$. Se $n = 2^k$, então o teorema vale.

Vamos mostrar por indução em k.

- Se $n = 2^0 = 1$, a inequação vale trivialmente.
- Se $n = 2^1 = 2$, a inequação vale, já que:

$$
\begin{aligned}
\sqrt{x_1 x_2} &\leq \frac{x_1 + x_2}{2} && \Leftrightarrow \\
x_1 x_2 &\leq \frac{x_1^2 + 2x_1x_2 + x_2^2}{4} && \Leftrightarrow \\
2x_1x_2 &\leq x_1^2 + x_2^2 && \Leftrightarrow \\
0 &\leq x_1^2 - 2x_1x_2 + x_2^2 && \Leftrightarrow \\
0 &\leq (x_1 - x_2)^2.
\end{aligned}
$$

Exemplo 5 (cont)

- Agora considere um número $k \geq 0$.

Exemplo 5 (cont)

- Agora considere um número $k \geq 0$.
- **Suponha** que a inequação vale para $n = 2^k$.

Exemplo 5 (cont)

- Agora considere um número $k \geq 0$.
- **Suponha** que a inequação vale para $n = 2^k$.
- **Vamos demonstrar** que a inequação vale para $2n = 2^{k+1}$.

Exemplo 5 (cont)

- Agora considere um número $k \geq 0$.
- **Suponha** que a inequação vale para $n = 2^k$.
- **Vamos demonstrar** que a inequação vale para $2n = 2^{k+1}$.
- Reescrevendo o lado esquerdo da inequação para $2n$,

$$(x_1 x_2 \ldots x_{2n})^{\frac{1}{2n}} = \sqrt{(x_1 x_2 \ldots x_n)^{\frac{1}{n}} \, (x_{n+1} x_{n+2} \ldots x_{2n})^{\frac{1}{n}}}.$$

Exemplo 5 (cont)

- Agora considere um número $k \geq 0$.
- **Suponha** que a inequação vale para $n = 2^k$.
- **Vamos demonstrar** que a inequação vale para $2n = 2^{k+1}$.
- Reescrevendo o lado esquerdo da inequação para $2n$,

$$(x_1 x_2 \ldots x_{2n})^{\frac{1}{2n}} = \sqrt{(x_1 x_2 \ldots x_n)^{\frac{1}{n}} \, (x_{n+1} x_{n+2} \ldots x_{2n})^{\frac{1}{n}}}.$$

- Defina: $\quad y_1 = (x_1 x_2 \ldots x_n)^{\frac{1}{n}} \quad$ e $\quad y_2 = (x_{n+1} x_{n+2} \ldots x_{2n})^{\frac{1}{n}}$

Exemplo 5 (cont)

- Agora considere um número $k \geq 0$.
- **Suponha** que a inequação vale para $n = 2^k$.
- **Vamos demonstrar** que a inequação vale para $2n = 2^{k+1}$.
- Reescrevendo o lado esquerdo da inequação para $2n$,

$$(x_1 x_2 \dots x_{2n})^{\frac{1}{2n}} = \sqrt{(x_1 x_2 \dots x_n)^{\frac{1}{n}} \, (x_{n+1} x_{n+2} \dots x_{2n})^{\frac{1}{n}}}.$$

- Defina: $\quad y_1 = (x_1 x_2 \dots x_n)^{\frac{1}{n}} \quad$ e $\quad y_2 = (x_{n+1} x_{n+2} \dots x_{2n})^{\frac{1}{n}}$
- Portanto, pelo caso $n = 2$ já demonstrado,

$$(x_1 x_2 \dots x_{2n})^{\frac{1}{2n}} = \sqrt{y_1 \; y_2} \leq \frac{y_1 + y_2}{2}$$

Exemplo 5 (cont)

- Utilizando a h.i. duas vezes:

Exemplo 5 (cont)

- Utilizando a h.i. duas vezes:

$$y_1 = (x_1 x_2 \dots x_n)^{\frac{1}{n}} \leq \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n},$$

Exemplo 5 (cont)

- Utilizando a h.i. duas vezes:

$$y_1 = (x_1 x_2 \dots x_n)^{\frac{1}{n}} \leq \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n},$$

$$y_2 = (x_{n+1} x_{n+2} \dots x_{2n})^{\frac{1}{n}} \leq \frac{x_{n+1} + x_{n+2} + \cdots + x_{2n}}{n}.$$

Exemplo 5 (cont)

- Utilizando a h.i. duas vezes:

$$y_1 = (x_1 x_2 \ldots x_n)^{\frac{1}{n}} \leq \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n},$$
$$y_2 = (x_{n+1} x_{n+2} \ldots x_{2n})^{\frac{1}{n}} \leq \frac{x_{n+1} + x_{n+2} + \cdots + x_{2n}}{n}.$$

- Substituindo na inequação anterior:

Exemplo 5 (cont)

- Utilizando a h.i. duas vezes:

$$y_1 = (x_1 x_2 \dots x_n)^{\frac{1}{n}} \le \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n},$$

$$y_2 = (x_{n+1} x_{n+2} \dots x_{2n})^{\frac{1}{n}} \le \frac{x_{n+1} + x_{n+2} + \cdots + x_{2n}}{n}.$$

- Substituindo na inequação anterior:

$$(x_1 x_2 \dots x_{2n})^{\frac{1}{2n}}$$

Exemplo 5 (cont)

- Utilizando a h.i. duas vezes:

$$y_1 = (x_1 x_2 \dots x_n)^{\frac{1}{n}} \leq \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n},$$

$$y_2 = (x_{n+1} x_{n+2} \dots x_{2n})^{\frac{1}{n}} \leq \frac{x_{n+1} + x_{n+2} + \cdots + x_{2n}}{n}.$$

- Substituindo na inequação anterior:

$$(x_1 x_2 \dots x_{2n})^{\frac{1}{2n}} \leq \frac{y_1 + y_2}{2}$$

Exemplo 5 (cont)

- Utilizando a h.i. duas vezes:

$$y_1 = (x_1 x_2 \dots x_n)^{\frac{1}{n}} \leq \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n},$$

$$y_2 = (x_{n+1} x_{n+2} \dots x_{2n})^{\frac{1}{n}} \leq \frac{x_{n+1} + x_{n+2} + \cdots + x_{2n}}{n}.$$

- Substituindo na inequação anterior:

$$\begin{aligned}(x_1 x_2 \dots x_{2n})^{\frac{1}{2n}} &\leq \frac{y_1 + y_2}{2} \\ &= \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{2n} + \frac{x_{n+1} + x_{n+2} + \cdots + x_{2n}}{2n}\end{aligned}$$

Exemplo 5 (cont)

- Utilizando a h.i. duas vezes:

$$y_1 = (x_1 x_2 \dots x_n)^{\frac{1}{n}} \leq \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n},$$

$$y_2 = (x_{n+1} x_{n+2} \dots x_{2n})^{\frac{1}{n}} \leq \frac{x_{n+1} + x_{n+2} + \dots + x_{2n}}{n}.$$

- Substituindo na inequação anterior:

$$\begin{aligned}
(x_1 x_2 \dots x_{2n})^{\frac{1}{2n}} &\leq \frac{y_1 + y_2}{2} \\
&= \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{2n} + \frac{x_{n+1} + x_{n+2} + \dots + x_{2n}}{2n} \\
&= \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_{2n}}{2n}
\end{aligned}$$

Exemplo 5 (cont)

- Utilizando a h.i. duas vezes:

$$y_1 = (x_1 x_2 \dots x_n)^{\frac{1}{n}} \leq \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n},$$

$$y_2 = (x_{n+1} x_{n+2} \dots x_{2n})^{\frac{1}{n}} \leq \frac{x_{n+1} + x_{n+2} + \cdots + x_{2n}}{n}.$$

- Substituindo na inequação anterior:

$$\begin{aligned}(x_1 x_2 \dots x_{2n})^{\frac{1}{2n}} &\leq \frac{y_1 + y_2}{2} \\ &= \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{2n} + \frac{x_{n+1} + x_{n+2} + \cdots + x_{2n}}{2n} \\ &= \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_{2n}}{2n}\end{aligned}$$

- Isso mostra o lema para $k+1$ e completa a demonstração.

Exemplo 5 (cont)

Para utilizar a indução reversa, ainda precisamos do seguinte.

Exemplo 5 (cont)

Para utilizar a indução reversa, ainda precisamos do seguinte.

Lema (2)

Se o teorema vale para $n \geq 2$, ele também vale para $n - 1$.

Exemplo 5 (cont)

Para utilizar a indução reversa, ainda precisamos do seguinte.

Lema (2)

Se o teorema vale para $n \geq 2$, ele também vale para $n - 1$.

Demonstração:

Exemplo 5 (cont)

Para utilizar a indução reversa, ainda precisamos do seguinte.

Lema (2)

Se o teorema vale para $n \geq 2$, ele também vale para $n-1$.

Demonstração:

- Queremos demonstrar:

$$(x_1 x_2 \dots x_{n-1})^{\frac{1}{n-1}} \leq \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_{n-1}}{n-1}.$$

Exemplo 5 (cont)

Para utilizar a indução reversa, ainda precisamos do seguinte.

Lema (2)

Se o teorema vale para $n \geq 2$, ele também vale para $n - 1$.

Demonstração:

- Queremos demonstrar:

$$(x_1 x_2 \ldots x_{n-1})^{\frac{1}{n-1}} \leq \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_{n-1}}{n-1}.$$

- Defina:

$$z = \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_{n-1}}{n-1}.$$

Exemplo 5 (cont)

Para utilizar a indução reversa, ainda precisamos do seguinte.

Lema (2)

Se o teorema vale para $n \geq 2$, ele também vale para $n-1$.

Demonstração:

- Queremos demonstrar:

$$(x_1 x_2 \ldots x_{n-1})^{\frac{1}{n-1}} \leq \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_{n-1}}{n-1}.$$

- Defina:

$$z = \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_{n-1}}{n-1}.$$

- Como o teorema vale para n, pela premissa, sabemos que:

$$(x_1 x_2 \ldots x_{n-1} z)^{\frac{1}{n}} \leq \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_{n-1} + z}{n} = z.$$

Exemplo 5 (cont)

- Elevando ambos os lados à potência $\frac{n}{n-1}$,

$$(x_1 x_2 \ldots x_{n-1} z)^{\frac{1}{n-1}} \leq z^{\frac{n}{n-1}}.$$

Exemplo 5 (cont)

- Elevando ambos os lados à potência $\frac{n}{n-1}$,

$$(x_1 x_2 \ldots x_{n-1} z)^{\frac{1}{n-1}} \leq z^{\frac{n}{n-1}}.$$

- Finalmente, multiplicando ambos os lados por $z^{-\frac{1}{n-1}}$,

$$(x_1 x_2 \ldots x_{n-1})^{\frac{1}{n-1}} \leq z = \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_{n-1}}{n-1}.$$

Exemplo 5 (cont)

- Elevando ambos os lados à potência $\frac{n}{n-1}$,

$$(x_1 x_2 \dots x_{n-1} z)^{\frac{1}{n-1}} \leq z^{\frac{n}{n-1}}.$$

- Finalmente, multiplicando ambos os lados por $z^{-\frac{1}{n-1}}$,

$$(x_1 x_2 \dots x_{n-1})^{\frac{1}{n-1}} \leq z = \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_{n-1}}{n-1}.$$

- Assim, o teorema para $n-1$, completando a prova.

Reduzir ou aumentar

- No passo da indução, supomos que a afirmação é válida para o caso $n - 1$ e mostramos que é válida para n.

Reduzir ou aumentar

- No passo da indução, supomos que a afirmação é válida para o caso $n-1$ e mostramos que é válida para n.
- Portanto, devemos **SEMPRE** partir de um caso genérico para n e reduzi-lo a algum caso particular para $n-1$.

Reduzir ou aumentar

- No passo da indução, supomos que a afirmação é válida para o caso $n-1$ e mostramos que é válida para n.
- Portanto, devemos **SEMPRE** partir de um caso genérico para n e reduzi-lo a algum caso particular para $n-1$.
- Um **ERRO COMUM** é sair de um caso genérico para $n-1$ e construir um exemplo do caso n.

Reduzir ou aumentar

- No passo da indução, supomos que a afirmação é válida para o caso $n-1$ e mostramos que é válida para n.
- Portanto, devemos **SEMPRE** partir de um caso genérico para n e reduzi-lo a algum caso particular para $n-1$.
- Um **ERRO COMUM** é sair de um caso genérico para $n-1$ e construir um exemplo do caso n.
  - Não basta dar um exemplo para n.

Reduzir ou aumentar

- No passo da indução, supomos que a afirmação é válida para o caso $n-1$ e mostramos que é válida para n.
- Portanto, devemos **SEMPRE** partir de um caso genérico para n e reduzi-lo a algum caso particular para $n-1$.
- Um **ERRO COMUM** é sair de um caso genérico para $n-1$ e construir um exemplo do caso n.
  - Não basta dar um exemplo para n.
  - Esse procedimento não é geral.

Todas as retas se interceptam?

O que há de errado com a demonstração seguinte ?

Todas as retas se interceptam?

O que há de errado com a demonstração seguinte ?

Exemplo

Considere n retas distintas no plano, concorrentes duas a duas. Então existe um ponto comum a todas as n retas.

Todas as retas se interceptam?

O que há de errado com a demonstração seguinte ?

Exemplo

Considere n retas distintas no plano, concorrentes duas a duas. Então existe um ponto comum a todas as n retas.

Demonstração:

Todas as retas se interceptam?

O que há de errado com a demonstração seguinte ?

Exemplo

Considere n retas distintas no plano, concorrentes duas a duas. Então existe um ponto comum a todas as n retas.

Demonstração:

- Se $n = 1$ ou $n = 2$, então a afirmação é clara.

Todas as retas se interceptam?

O que há de errado com a demonstração seguinte ?

Exemplo

Considere n retas distintas no plano, concorrentes duas a duas. Então existe um ponto comum a todas as n retas.

Demonstração:

- Se $n = 1$ ou $n = 2$, então a afirmação é clara.
- Fixe $n > 2$ e suponha que a afirmação vale para $n - 1$.

Todas as retas se interceptam?

O que há de errado com a demonstração seguinte ?

Exemplo

Considere n retas distintas no plano, concorrentes duas a duas. Então existe um ponto comum a todas as n retas.

Demonstração:

- Se $n = 1$ ou $n = 2$, então a afirmação é clara.
- Fixe $n > 2$ e suponha que a afirmação vale para $n - 1$.
- Considere n retas no plano concorrentes duas a duas.

Todas as retas se interceptam?

- Sejam S_1, S_2 dois subconjuntos distintos com $n-1$ retas.

Todas as retas se interceptam?

- Sejam S_1, S_2 dois subconjuntos distintos com $n - 1$ retas.
- Pela h.i., as retas de S_1 interceptam-se em um ponto p_1.

Todas as retas se interceptam?

- Sejam S_1, S_2 dois subconjuntos distintos com $n - 1$ retas.
- Pela h.i., as retas de S_1 interceptam-se em um ponto p_1.
- Analogamente, as retas de S_2 interceptam-se em p_2.

Todas as retas se interceptam?

- Sejam S_1, S_2 dois subconjuntos distintos com $n-1$ retas.
- Pela h.i., as retas de S_1 interceptam-se em um ponto p_1.
- Analogamente, as retas de S_2 interceptam-se em p_2.
- Daí, cada reta de $S_1 \cap S_2$ intercepta tanto p_1 quanto p_2.

Todas as retas se interceptam?

- Sejam S_1, S_2 dois subconjuntos distintos com $n - 1$ retas.
- Pela h.i., as retas de S_1 interceptam-se em um ponto p_1.
- Analogamente, as retas de S_2 interceptam-se em p_2.
- Daí, cada reta de $S_1 \cap S_2$ intercepta tanto p_1 quanto p_2.
- Como duas retas da interseção só se tocam em um ponto, sabemos que $p_1 = p_2$.

Todas as retas se interceptam?

- Sejam S_1, S_2 dois subconjuntos distintos com $n - 1$ retas.
- Pela h.i., as retas de S_1 interceptam-se em um ponto p_1.
- Analogamente, as retas de S_2 interceptam-se em p_2.
- Daí, cada reta de $S_1 \cap S_2$ intercepta tanto p_1 quanto p_2.
- Como duas retas da interseção só se tocam em um ponto, sabemos que $p_1 = p_2$.
- Portanto, todas as retas interceptam-se em um ponto.

Todas as retas se interceptam?

- Sejam S_1, S_2 dois subconjuntos distintos com $n - 1$ retas.
- Pela h.i., as retas de S_1 interceptam-se em um ponto p_1.
- Analogamente, as retas de S_2 interceptam-se em p_2.
- Daí, cada reta de $S_1 \cap S_2$ intercepta tanto p_1 quanto p_2.
- Como duas retas da interseção só se tocam em um ponto, sabemos que $p_1 = p_2$.
- Portanto, todas as retas interceptam-se em um ponto.

Certo?

Todas as retas se interceptam?

- Sejam S_1, S_2 dois subconjuntos distintos com $n-1$ retas.
- Pela h.i., as retas de S_1 interceptam-se em um ponto p_1.
- Analogamente, as retas de S_2 interceptam-se em p_2.
- Daí, cada reta de $S_1 \cap S_2$ intercepta tanto p_1 quanto p_2.
- Como duas retas da interseção só se tocam em um ponto, sabemos que $p_1 = p_2$.
- Portanto, todas as retas interceptam-se em um ponto.

Certo? **NÃO!**

Todas as retas se interceptam?

- Sejam S_1, S_2 dois subconjuntos distintos com $n-1$ retas.
- Pela h.i., as retas de S_1 interceptam-se em um ponto p_1.
- Analogamente, as retas de S_2 interceptam-se em p_2.
- Daí, cada reta de $S_1 \cap S_2$ intercepta tanto p_1 quanto p_2.
- Como duas retas da interseção só se tocam em um ponto, sabemos que $p_1 = p_2$.
- Portanto, todas as retas interceptam-se em um ponto.

Certo? **NÃO!**

- Supomos que há duas retas na interseção.

Todas as retas se interceptam?

- Sejam S_1, S_2 dois subconjuntos distintos com $n - 1$ retas.
- Pela h.i., as retas de S_1 interceptam-se em um ponto p_1.
- Analogamente, as retas de S_2 interceptam-se em p_2.
- Daí, cada reta de $S_1 \cap S_2$ intercepta tanto p_1 quanto p_2.
- Como duas retas da interseção só se tocam em um ponto, sabemos que $p_1 = p_2$.
- Portanto, todas as retas interceptam-se em um ponto.

Certo? **NÃO!**

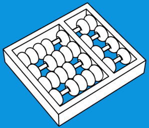
- Supomos que há duas retas na interseção.
- Mas falha quando $n = 3$.

Demonstrações matemáticas: uma revisão.

MC458 - Projeto e Análise de Algoritmos I

08/25

01



Santiago Valdés Ravelo
https://ic.unicamp.br/~santiago/
ravelo@unicamp.br

UNICAMP