Recursão

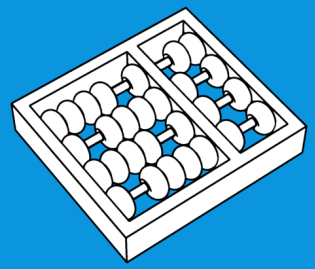
MC102 - Algoritmos e Programação de Computadores

06/25

23

Santiago Valdés Ravelo
https://ic.unicamp.br/~santiago/
ravelo@unicamp.br

UNICAMP



"Para entender recursão, você primeiro tem que entender recursão."

Anônimo.

Dúvidas da aula anterior

Dúvidas selecionadas

- No caso em que a lista está desorganizada, qual opção tem melhor desempenho: fazer uma busca linear ou organizar a lista com um dos algoritmos da aula passada e fazer uma busca binária?

Dúvidas selecionadas

- No caso em que a lista está desorganizada, qual opção tem melhor desempenho: fazer uma busca linear ou organizar a lista com um dos algoritmos da aula passada e fazer uma busca binária?
- Como funciona a busca em conjuntos?

Dúvidas selecionadas

- No caso em que a lista está desorganizada, qual opção tem melhor desempenho: fazer uma busca linear ou organizar a lista com um dos algoritmos da aula passada e fazer uma busca binária?
- Como funciona a busca em conjuntos?
- Quanto ao número de divisões que fazemos em uma lista ordenada (na busca binária, duas divisões) existe um número de divisões mais eficiente levando em conta o tempo que os operadores lógicos consomem? Tem a ver com o comprimento da lista da busca?

Dúvidas selecionadas

- No caso em que a lista está desorganizada, qual opção tem melhor desempenho: fazer uma busca linear ou organizar a lista com um dos algoritmos da aula passada e fazer uma busca binária?
- Como funciona a busca em conjuntos?
- Quanto ao número de divisões que fazemos em uma lista ordenada (na busca binária, duas divisões) existe um número de divisões mais eficiente levando em conta o tempo que os operadores lógicos consomem? Tem a ver com o comprimento da lista da busca?
- Python possui alguma biblioteca built-in com uma função pronta para fazer a busca binária sem ter que a criar do zero?

Dúvidas selecionadas

- No caso em que a lista está desorganizada, qual opção tem melhor desempenho: fazer uma busca linear ou organizar a lista com um dos algoritmos da aula passada e fazer uma busca binária?
- Como funciona a busca em conjuntos?
- Quanto ao número de divisões que fazemos em uma lista ordenada (na busca binária, duas divisões) existe um número de divisões mais eficiente levando em conta o tempo que os operadores lógicos consomem? Tem a ver com o comprimento da lista da busca?
- Python possui alguma biblioteca built-in com uma função pronta para fazer a busca binária sem ter que a criar do zero?
- Os algoritmos de ordenação funcionariam com números repetidos?

Dúvidas selecionadas

- No caso em que a lista está desorganizada, qual opção tem melhor desempenho: fazer uma busca linear ou organizar a lista com um dos algoritmos da aula passada e fazer uma busca binária?
- Como funciona a busca em conjuntos?
- Quanto ao número de divisões que fazemos em uma lista ordenada (na busca binária, duas divisões) existe um número de divisões mais eficiente levando em conta o tempo que os operadores lógicos consomem? Tem a ver com o comprimento da lista da busca?
- Python possui alguma biblioteca built-in com uma função pronta para fazer a busca binária sem ter que a criar do zero?
- Os algoritmos de ordenação funcionariam com números repetidos?
- Se a lista for bidimensional ou superior, é necessário primeiro lineariza-la para depois aplicar os algoritmos de busca sobre seus elementos?

Dúvidas selecionadas

- No caso em que a lista está desorganizada, qual opção tem melhor desempenho: fazer uma busca linear ou organizar a lista com um dos algoritmos da aula passada e fazer uma busca binária?
- Como funciona a busca em conjuntos?
- Quanto ao número de divisões que fazemos em uma lista ordenada (na busca binária, duas divisões) existe um número de divisões mais eficiente levando em conta o tempo que os operadores lógicos consomem? Tem a ver com o comprimento da lista da busca?
- Python possui alguma biblioteca built-in com uma função pronta para fazer a busca binária sem ter que a criar do zero?
- Os algoritmos de ordenação funcionariam com números repetidos?
- Se a lista for bidimensional ou superior, é necessário primeiro lineariza-la para depois aplicar os algoritmos de busca sobre seus elementos?
- O algoritmo de busca binária funcionaria em uma lista preenchida por um único número, diferente do valor que estou buscando? Por exemplo se estiver buscando 3 em l[1, 1, 1, 1].

Dúvidas selecionadas

- No caso em que a lista está desorganizada, qual opção tem melhor desempenho: fazer uma busca linear ou organizar a lista com um dos algoritmos da aula passada e fazer uma busca binária?
- Como funciona a busca em conjuntos?
- Quanto ao número de divisões que fazemos em uma lista ordenada (na busca binária, duas divisões) existe um número de divisões mais eficiente levando em conta o tempo que os operadores lógicos consomem? Tem a ver com o comprimento da lista da busca?
- Python possui alguma biblioteca built-in com uma função pronta para fazer a busca binária sem ter que a criar do zero?
- Os algoritmos de ordenação funcionariam com números repetidos?
- Se a lista for bidimensional ou superior, é necessário primeiro lineariza-la para depois aplicar os algoritmos de busca sobre seus elementos?
- O algoritmo de busca binária funcionaria em uma lista preenchida por um único número, diferente do valor que estou buscando? Por exemplo se estiver buscando 3 em l[1, 1, 1, 1].
- Quando é melhor usar a busca sequencial mesmo com a lista ordenada, em vez da busca binária? Somente em listas pequenas ou quando queremos a primeira ocorrência do elemento?

Dúvidas selecionadas

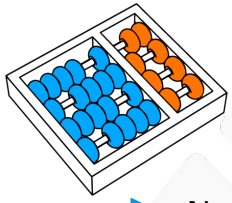
- No caso em que a lista está desorganizada, qual opção tem melhor desempenho: fazer uma busca linear ou organizar a lista com um dos algoritmos da aula passada e fazer uma busca binária?
- Como funciona a busca em conjuntos?
- Quanto ao número de divisões que fazemos em uma lista ordenada (na busca binária, duas divisões) existe um número de divisões mais eficiente levando em conta o tempo que os operadores lógicos consomem? Tem a ver com o comprimento da lista da busca?
- Python possui alguma biblioteca built-in com uma função pronta para fazer a busca binária sem ter que a criar do zero?
- Os algoritmos de ordenação funcionariam com números repetidos?
- Se a lista for bidimensional ou superior, é necessário primeiro lineariza-la para depois aplicar os algoritmos de busca sobre seus elementos?
- O algoritmo de busca binária funcionaria em uma lista preenchida por um único número, diferente do valor que estou buscando? Por exemplo se estiver buscando 3 em l[1, 1, 1, 1].
- Quando é melhor usar a busca sequencial mesmo com a lista ordenada, em vez da busca binária? Somente em listas pequenas ou quando queremos a primeira ocorrência do elemento?
- Existem casos em que a busca sequencial se torna mais eficiente do que a binária? Se sim, como é feita essa avaliação?

Dúvidas selecionadas

- No caso em que a lista está desorganizada, qual opção tem melhor desempenho: fazer uma busca linear ou organizar a lista com um dos algoritmos da aula passada e fazer uma busca binária?
- Como funciona a busca em conjuntos?
- Quanto ao número de divisões que fazemos em uma lista ordenada (na busca binária, duas divisões) existe um número de divisões mais eficiente levando em conta o tempo que os operadores lógicos consomem? Tem a ver com o comprimento da lista da busca?
- Python possui alguma biblioteca built-in com uma função pronta para fazer a busca binária sem ter que a criar do zero?
- Os algoritmos de ordenação funcionariam com números repetidos?
- Se a lista for bidimensional ou superior, é necessário primeiro lineariza-la para depois aplicar os algoritmos de busca sobre seus elementos?
- O algoritmo de busca binária funcionaria em uma lista preenchida por um único número, diferente do valor que estou buscando? Por exemplo se estiver buscando 3 em l[1, 1, 1, 1].
- Quando é melhor usar a busca sequencial mesmo com a lista ordenada, em vez da busca binária? Somente em listas pequenas ou quando queremos a primeira ocorrência do elemento?
- Existem casos em que a busca sequencial se torna mais eficiente do que a binária? Se sim, como é feita essa avaliação?
- O algoritmo de busca binária funciona apenas em listas ordenadas?

Dúvidas selecionadas

- No caso em que a lista está desorganizada, qual opção tem melhor desempenho: fazer uma busca linear ou organizar a lista com um dos algoritmos da aula passada e fazer uma busca binária?
- Como funciona a busca em conjuntos?
- Quanto ao número de divisões que fazemos em uma lista ordenada (na busca binária, duas divisões) existe um número de divisões mais eficiente levando em conta o tempo que os operadores lógicos consomem? Tem a ver com o comprimento da lista da busca?
- Python possui alguma biblioteca built-in com uma função pronta para fazer a busca binária sem ter que a criar do zero?
- Os algoritmos de ordenação funcionariam com números repetidos?
- Se a lista for bidimensional ou superior, é necessário primeiro lineariza-la para depois aplicar os algoritmos de busca sobre seus elementos?
- O algoritmo de busca binária funcionaria em uma lista preenchida por um único número, diferente do valor que estou buscando? Por exemplo se estiver buscando 3 em l[1, 1, 1, 1].
- Quando é melhor usar a busca sequencial mesmo com a lista ordenada, em vez da busca binária? Somente em listas pequenas ou quando queremos a primeira ocorrência do elemento?
- Existem casos em que a busca sequencial se torna mais eficiente do que a binária? Se sim, como é feita essa avaliação?
- O algoritmo de busca binária funciona apenas em listas ordenadas?
- Como as estratégias de busca funcionariam em listas com mais de um tipo?



Dúvidas selecionadas

- No caso em que a lista está desorganizada, qual opção tem melhor desempenho: fazer uma busca linear ou organizar a lista com um dos algoritmos da aula passada e fazer uma busca binária?
- Como funciona a busca em conjuntos?
- Quanto ao número de divisões que fazemos em uma lista ordenada (na busca binária, duas divisões) existe um número de divisões mais eficiente levando em conta o tempo que os operadores lógicos consomem? Tem a ver com o comprimento da lista da busca?
- Python possui alguma biblioteca built-in com uma função pronta para fazer a busca binária sem ter que a criar do zero?
- Os algoritmos de ordenação funcionariam com números repetidos?
- Se a lista for bidimensional ou superior, é necessário primeiro lineariza-la para depois aplicar os algoritmos de busca sobre seus elementos?
- O algoritmo de busca binária funcionaria em uma lista preenchida por um único número, diferente do valor que estou buscando? Por exemplo se estiver buscando 3 em l[1, 1, 1, 1].
- Quando é melhor usar a busca sequencial mesmo com a lista ordenada, em vez da busca binária? Somente em listas pequenas ou quando queremos a primeira ocorrência do elemento?
- Existem casos em que a busca sequencial se torna mais eficiente do que a binária? Se sim, como é feita essa avaliação?
- O algoritmo de busca binária funciona apenas em listas ordenadas?
- Como as estratégias de busca funcionariam em listas com mais de um tipo?
- Então para desfrutar do tempo logarítmico da busca binária em algum programa, sem o custo de ordenar a lista na hora, o ideal é manter uma lista sempre ordenada? (Isto é, inserindo novos elementos sempre na posição correta ao invés de appendar)

Dúvidas selecionadas

- No caso em que a lista está desorganizada, qual opção tem melhor desempenho: fazer uma busca linear ou organizar a lista com um dos algoritmos da aula passada e fazer uma busca binária?
- Como funciona a busca em conjuntos?
- Quanto ao número de divisões que fazemos em uma lista ordenada (na busca binária, duas divisões) existe um número de divisões mais eficiente levando em conta o tempo que os operadores lógicos consomem? Tem a ver com o comprimento da lista da busca?
- Python possui alguma biblioteca built-in com uma função pronta para fazer a busca binária sem ter que a criar do zero?
- Os algoritmos de ordenação funcionariam com números repetidos?
- Se a lista for bidimensional ou superior, é necessário primeiro lineariza-la para depois aplicar os algoritmos de busca sobre seus elementos?
- O algoritmo de busca binária funcionaria em uma lista preenchida por um único número, diferente do valor que estou buscando? Por exemplo se estiver buscando 3 em l[1, 1, 1, 1].
- Quando é melhor usar a busca sequencial mesmo com a lista ordenada, em vez da busca binária? Somente em listas pequenas ou quando queremos a primeira ocorrência do elemento?
- Existem casos em que a busca sequencial se torna mais eficiente do que a binária? Se sim, como é feita essa avaliação?
- O algoritmo de busca binária funciona apenas em listas ordenadas?
- Como as estratégias de busca funcionariam em listas com mais de um tipo?
- Então para desfrutar do tempo logarítmico da busca binária em algum programa, sem o custo de ordenar a lista na hora, o ideal é manter uma lista sempre ordenada? (Isto é, inserindo novos elementos sempre na posição correta ao invés de appendar)
- Os algoritmos feitos para os métodos de cada linguagem costumam ser parecidos?

Introdução

Motivação

- É necessário solucionar um problema para uma entrada grande.

Motivação

- É necessário solucionar um problema para uma entrada grande.
- O problema pode ser reduzido para um caso menor.

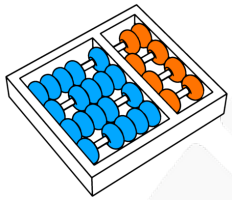
Motivação

- É necessário solucionar um problema para uma entrada grande.
- O problema pode ser reduzido para um caso menor.
- Solucionar o caso menor e a partir dele obter a solução do maior.

Motivação

- É necessário solucionar um problema para uma entrada grande.
- O problema pode ser reduzido para um caso menor.
- Solucionar o caso menor e a partir dele obter a solução do maior.

O que é recursão?



Motivação

- É necessário solucionar um problema para uma entrada grande.
- O problema pode ser reduzido para um caso menor.
- Solucionar o caso menor e a partir dele obter a solução do maior.

O que é recursão?

TÉCNICA em que pelo menos um dos passos de um certo procedimento envolve a **REPETIÇÃO** de todo o procedimento.

Motivação

- É necessário solucionar um problema para uma entrada grande.
- O problema pode ser reduzido para um caso menor.
- Solucionar o caso menor e a partir dele obter a solução do maior.

O que é recursão?

TÉCNICA em que pelo menos um dos passos de um certo procedimento envolve a **REPETIÇÃO** de todo o procedimento.

TÉCNICA em que um subprograma (**FUNÇÃO**) chama a si mesmo.

Recursão

Recursão é o conceito de uma função chamar a si mesma para resolver algum problema computacional:

Recursão

Recursão é o conceito de uma função chamar a si mesma para resolver algum problema computacional:

- Sabemos resolver instâncias pequenas do problema

Recursão

Recursão é o conceito de uma função chamar a si mesma para resolver algum problema computacional:

- Sabemos resolver instâncias pequenas do problema
  - Chamamos de **CASO BASE**.

Recursão

Recursão é o conceito de uma função chamar a si mesma para resolver algum problema computacional:

- Sabemos resolver instâncias pequenas do problema
  - Chamamos de **CASO BASE**.
- Sabemos resolver uma instância maior a partir das menores.

Recursão

Recursão é o conceito de uma função chamar a si mesma para resolver algum problema computacional:

- Sabemos resolver instâncias pequenas do problema
  - Chamamos de **CASO BASE**.
- Sabemos resolver uma instância maior a partir das menores.
  - Chamamos de **CASO GERAL**.

Algoritmos recursivos

Se: a instância é pequena, **então:**

Algoritmos recursivos

Se: a instância é pequena, **então:**

- Resolva o problema diretamente.

Algoritmos recursivos

Se: a instância é pequena, **então:**

- Resolva o problema diretamente.

Algoritmos recursivos

Se: a instância é pequena, **então:**

- Resolva o problema diretamente.

Senão:

- Reduza-a a uma (ou várias) instância(s) menor(es) do mesmo problema.

Algoritmos recursivos

Se: a instância é pequena, **então:**

- Resolva o problema diretamente.

Senão:

- Reduza-a a uma (ou várias) instância(s) menor(es) do mesmo problema.
- Aplique o algoritmo à(s) instância(s) menor(es).

Algoritmos recursivos

Se: a instância é pequena, **então:**

- Resolva o problema diretamente.

Senão:

- Reduza-a a uma (ou várias) instância(s) menor(es) do mesmo problema.
- Aplique o algoritmo à(s) instância(s) menor(es).
- Volte à instância original e resolva-a.

Fim da recursão

IMPORTANTE: toda função recursiva deve **ENCERRAR** a recursão!

Fim da recursão

IMPORTANTE: toda função recursiva deve **ENCERRAR** a recursão!

Para encerrar a recursão se realiza um teste (**CONDIÇÃO DE PARADA**).

Fim da recursão

IMPORTANTE: toda função recursiva deve **ENCERRAR** a recursão!

Para encerrar a recursão se realiza um teste (**CONDIÇÃO DE PARADA**).

Sem a condição de parada, a recursão se repete eternamente (até dar um erro de memória (**stack**) cheia).

Forma geral

Algoritmo: FUNÇÃO(parâmetros)

```
se condição de parada
    resolver caso base e/ou finalizar
senão
    FUNÇÃO(parâmetros menores)        ▷ chamado recursivo
    solucionar o problema para parâmetros
```

Fatorial

Calculando Fatorial

Por exemplo, para calcular $n! = \prod_{i=1}^{n} i$:

Calculando Fatorial

Por exemplo, para calcular $n! = \prod_{i=1}^{n} i$:

- **Base**: Sabemos resolver $0!$

Calculando Fatorial

Por exemplo, para calcular $n! = \prod_{i=1}^{n} i$:

- **Base**: Sabemos resolver $0!$, pois $0! = 1$.

Calculando Fatorial

Por exemplo, para calcular $n! = \prod_{i=1}^{n} i$:

- **Base**: Sabemos resolver $0!$, pois $0! = 1$.
- **Geral**: Sabemos resolver $n!$ a partir de $(n-1)!$ pois:

Calculando Fatorial

Por exemplo, para calcular $n! = \prod_{i=1}^{n} i$:

- **Base**: Sabemos resolver $0!$, pois $0! = 1$.
- **Geral**: Sabemos resolver $n!$ a partir de $(n-1)!$ pois:

$$n! = \prod_{i=1}^{n} i = n \prod_{i=1}^{n-1} i$$

Calculando Fatorial

Por exemplo, para calcular $n! = \prod_{i=1}^{n} i$:

- **Base**: Sabemos resolver $0!$, pois $0! = 1$.
- **Geral**: Sabemos resolver $n!$ a partir de $(n-1)!$ pois:

$$n! = \prod_{i=1}^{n} i = n \prod_{i=1}^{n-1} i = n(n-1)!$$

Exemplo: Fatorial

Calculando $n!$ recursivamente:

Exemplo: Fatorial

Calculando $n!$ recursivamente:

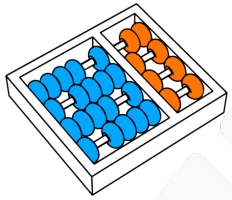
```
1  def fatorial(n):
2      if n == 0:
3          return 1
4      else:
5          return n * fatorial(n - 1)
```

Exemplo: Fatorial

Calculando $n!$ recursivamente:

```
1  def fatorial(n):
2      if n == 0:
3          return 1
4      else:
5          return n * fatorial(n - 1)
```

Mas como isso pode funcionar se a função chama a si mesma?



Exemplo: Fatorial

Calculando $n!$ recursivamente:

```
1 def fatorial(n):
2     if n == 0:
3         return 1
4     else:
5         return n * fatorial(n - 1)
```

Mas como isso pode funcionar se a função chama a si mesma?

O Python sabe a linha de código que fez a chamada de função:

Exemplo: Fatorial

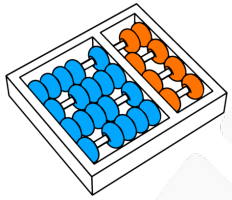
Calculando $n!$ recursivamente:

```
1 def fatorial(n):
2     if n == 0:
3         return 1
4     else:
5         return n * fatorial(n - 1)
```

Mas como isso pode funcionar se a função chama a si mesma?

O Python sabe a linha de código que fez a chamada de função:

- Isso gera a **pilha de chamadas**.



Exemplo: Fatorial

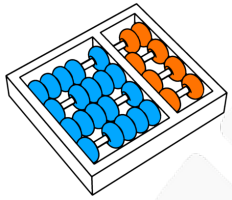
Calculando $n!$ recursivamente:

```
1 def fatorial(n):
2     if n == 0:
3         return 1
4     else:
5         return n * fatorial(n - 1)
```

Mas como isso pode funcionar se a função chama a si mesma?

O Python sabe a linha de código que fez a chamada de função:

- Isso gera a **pilha de chamadas**.
- Quando uma função é chamada, ela vai "em cima" da atual.



Exemplo: Fatorial

Calculando $n!$ recursivamente:

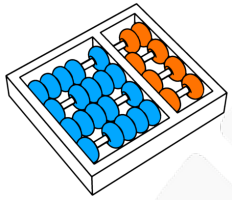
```
1 def fatorial(n):
2     if n == 0:
3         return 1
4     else:
5         return n * fatorial(n - 1)
```

Mas como isso pode funcionar se a função chama a si mesma?

O Python sabe a linha de código que fez a chamada de função:

- Isso gera a **pilha de chamadas**.
- Quando uma função é chamada, ela vai "em cima" da atual.

O Python sabe também qual era o valor das variáveis locais:



Exemplo: Fatorial

Calculando $n!$ recursivamente:

```
1 def fatorial(n):
2     if n == 0:
3         return 1
4     else:
5         return n * fatorial(n - 1)
```

Mas como isso pode funcionar se a função chama a si mesma?

O Python sabe a linha de código que fez a chamada de função:

- Isso gera a **pilha de chamadas**.
- Quando uma função é chamada, ela vai "em cima" da atual.

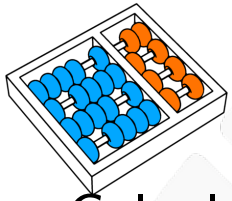
O Python sabe também qual era o valor das variáveis locais:

- Ele consegue restaurar esses valores quando voltar.

Exemplo: Fatorial

Calculando $n!$ recursivamente:

```
1 def fatorial(n):
2     if n == 0:
3         return 1
4     else:
5         return n * fatorial(n - 1)
```

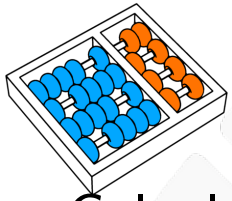


Exemplo: Fatorial

Calculando $n!$ recursivamente:

```
1 def fatorial(n):
2     if n == 0:
3         return 1
4     else:
5         return n * fatorial(n - 1)
```

```
fatorial        n:  4
   return n * fatorial(n - 1)
```

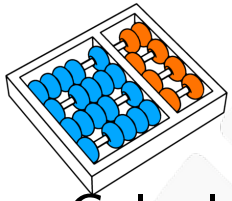


Exemplo: Fatorial

Calculando $n!$ recursivamente:

```
1 def fatorial(n):
2     if n == 0:
3         return 1
4     else:
5         return n * fatorial(n - 1)
```

```
fatorial        n:  4
    fatorial        n:  3
        return n * fatorial(n - 1)
```

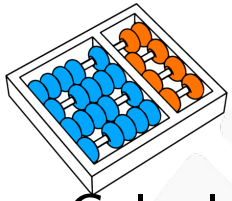


Exemplo: Fatorial

Calculando $n!$ recursivamente:

```
1 def fatorial(n):
2     if n == 0:
3         return 1
4     else:
5         return n * fatorial(n - 1)
```

```
fatorial        n:  4
  fatorial        n:  3
    fatorial        n:  2
      return n * fatorial(n - 1)
```



Exemplo: Fatorial

Calculando $n!$ recursivamente:

```
1 def fatorial(n):
2     if n == 0:
3         return 1
4     else:
5         return n * fatorial(n - 1)
```

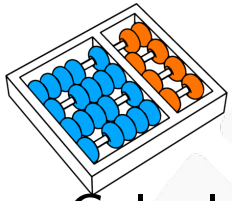
```
fatorial        n:  4
  fatorial        n:  3
    fatorial        n:  2
      fatorial        n:  1
        return n * fatorial(n - 1)
```

Exemplo: Fatorial

Calculando $n!$ recursivamente:

```
1  def fatorial(n):
2      if n == 0:
3          return 1
4      else:
5          return n * fatorial(n - 1)
```

```
fatorial        n:  4
  fatorial        n:  3
    fatorial        n:  2
      fatorial        n:  1
        fatorial        n:  0
          return 1
```

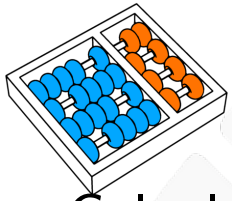


Exemplo: Fatorial

Calculando $n!$ recursivamente:

```
1 def fatorial(n):
2     if n == 0:
3         return 1
4     else:
5         return n * fatorial(n - 1)
```

```
fatorial        n:  4
  fatorial        n:  3
    fatorial        n:  2
      fatorial        n:  1
        return n * 1
```

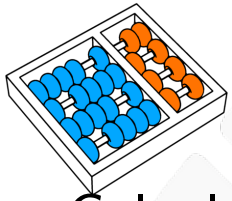


Exemplo: Fatorial

Calculando $n!$ recursivamente:

```
1 def fatorial(n):
2     if n == 0:
3         return 1
4     else:
5         return n * fatorial(n - 1)
```

```
fatorial        n:  4
  fatorial        n:  3
    fatorial        n:  2
      return n * 1
```

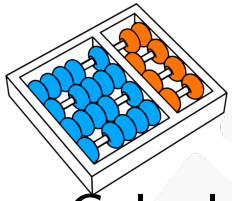


Exemplo: Fatorial

Calculando $n!$ recursivamente:

```
1 def fatorial(n):
2     if n == 0:
3         return 1
4     else:
5         return n * fatorial(n - 1)
```

```
fatorial        n:  4
    fatorial        n:  3
        return n * 2
```



Exemplo: Fatorial

Calculando $n!$ recursivamente:

```
1 def fatorial(n):
2     if n == 0:
3         return 1
4     else:
5         return n * fatorial(n - 1)
```

```
fatorial        n:  4
   return n * 6
```

Progressão aritmética

Último termo da PA

Uma Progressão Aritmética (PA):

Último termo da PA

Uma Progressão Aritmética (PA):

- É uma sequência de números $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$,

Último termo da PA

Uma Progressão Aritmética (PA):

- É uma sequência de números $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$,
- onde existe um número r tal que:

Último termo da PA

Uma Progressão Aritmética (PA):

- É uma sequência de números $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$,
- onde existe um número r tal que:
- $a_i = a_{i-1} + r$, para todo $1 < i \leq n$.

Último termo da PA

Uma Progressão Aritmética (PA):

- É uma sequência de números $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$,
- onde existe um número r tal que:
- $a_i = a_{i-1} + r$, para todo $1 < i \leq n$.

Queremos um algoritmo recursivo para calcular a_n:

Último termo da PA

Uma Progressão Aritmética (PA):

- É uma sequência de números $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$,
- onde existe um número r tal que:
- $a_i = a_{i-1} + r$, para todo $1 < i \leq n$.

Queremos um algoritmo recursivo para calcular a_n:

- **Base**: Se $n = 1$, $a_n = a_1$.

Último termo da PA

Uma Progressão Aritmética (PA):

- É uma sequência de números $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$,
- onde existe um número r tal que:
- $a_i = a_{i-1} + r$, para todo $1 < i \leq n$.

Queremos um algoritmo recursivo para calcular a_n:

- **Base**: Se $n = 1$, $a_n = a_1$.
- **Geral**: Se $n > 1$, $a_n = a_{n-1} + r$.

Último termo da PA

Uma Progressão Aritmética (PA):

- É uma sequência de números $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$,
- onde existe um número r tal que:
- $a_i = a_{i-1} + r$, para todo $1 < i \leq n$.

Queremos um algoritmo recursivo para calcular a_n:

- **Base**: Se $n = 1$, $a_n = a_1$.
- **Geral**: Se $n > 1$, $a_n = a_{n-1} + r$.
  - Estamos indo de uma instância maior para uma menor.

Último termo da PA

Uma Progressão Aritmética (PA):

- É uma sequência de números $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$,
- onde existe um número r tal que:
- $a_i = a_{i-1} + r$, para todo $1 < i \leq n$.

Queremos um algoritmo recursivo para calcular a_n:

- **Base**: Se $n = 1$, $a_n = a_1$.
- **Geral**: Se $n > 1$, $a_n = a_{n-1} + r$.
  - Estamos indo de uma instância maior para uma menor.

Solução:

Último termo da PA

Uma Progressão Aritmética (PA):

- É uma sequência de números $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$,
- onde existe um número r tal que:
- $a_i = a_{i-1} + r$, para todo $1 < i \leq n$.

Queremos um algoritmo recursivo para calcular a_n:

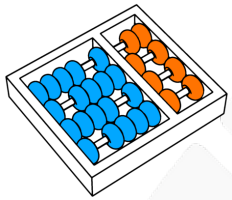
- **Base**: Se $n = 1$, $a_n = a_1$.
- **Geral**: Se $n > 1$, $a_n = a_{n-1} + r$.
  - Estamos indo de uma instância maior para uma menor.

Solução:

```
1 def termo(a_1, r, n):
2     if n == 1:
3         return a_1
4     else:
5         return r + termo(a_1, r, n - 1)
```

Exemplo: Progressão aritmética com impressão

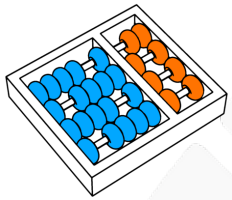
E se quisermos imprimir a progressão aritmética?



Exemplo: Progressão aritmética com impressão

E se quisermos imprimir a progressão aritmética?

```
1  def termo(a_1, r, n):
2      if n == 1:
3          print(a_1)
4          return a_1
5      else:
6          atual = r + termo(a_1, r, n - 1)
7          print(atual)
8          return atual
```



Exemplo: Progressão aritmética com impressão

E se quisermos imprimir a progressão aritmética?

```
1  def termo(a_1, r, n):
2      if n == 1:
3          print(a_1)
4          return a_1
5      else:
6          atual = r + termo(a_1, r, n - 1)
7          print(atual)
8          return atual
```

Vamos depurar!

Fibonacci

Exemplo: Fibonnaci

A sequência de Fibonnaci é: **1, 1, 2, 3, 5, 8, . . .**

Exemplo: Fibonnaci

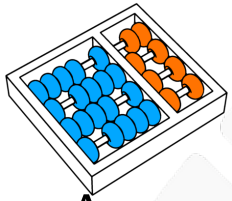
A sequência de Fibonnaci é: **1, 1, 2, 3, 5, 8, ...**

- Começa com **1**, **1**.

Exemplo: Fibonnaci

A sequência de Fibonnaci é: **1, 1, 2, 3, 5, 8, ...**

- Começa com **1**, **1**.
- Cada elemento a seguir é a soma dos dois anteriores.



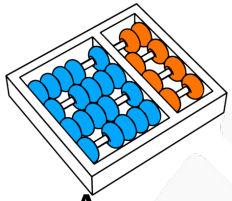
Exemplo: Fibonnaci

A sequência de Fibonnaci é: **1, 1, 2, 3, 5, 8, ...**

- Começa com **1**, **1**.
- Cada elemento a seguir é a soma dos dois anteriores.

Ou seja,

$$\mathbf{f(n)} = \begin{cases} \mathbf{f(n-1)} + \mathbf{f(n-2)}, & \text{se } n > 2 \\ \mathbf{1}, & \text{se } n = 1 \text{ ou } n = 2 \end{cases}$$



Exemplo: Fibonnaci

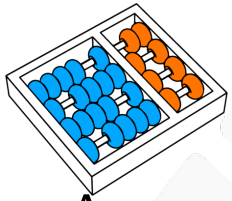
A sequência de Fibonnaci é: **1, 1, 2, 3, 5, 8, ...**

- Começa com **1**, **1**.
- Cada elemento a seguir é a soma dos dois anteriores.

Ou seja,

$$\mathbf{f(n)} = \begin{cases} \mathbf{f(n-1)} + \mathbf{f(n-2)}, & \text{se } n > 2 \\ \mathbf{1}, & \text{se } n = 1 \text{ ou } n = 2 \end{cases}$$

É o que chamamos na matemática de **recorrência**:



Exemplo: Fibonnaci

A sequência de Fibonnaci é: **1, 1, 2, 3, 5, 8, ...**

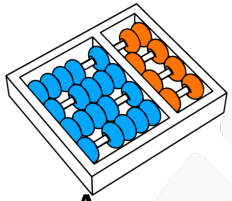
- Começa com **1**, **1**.
- Cada elemento a seguir é a soma dos dois anteriores.

Ou seja,

$$\mathbf{f(n)} = \begin{cases} \mathbf{f(n-1)} + \mathbf{f(n-2)}, & \text{se } n > 2 \\ \mathbf{1}, & \text{se } n = 1 \text{ ou } n = 2 \end{cases}$$

É o que chamamos na matemática de **recorrência**:

- Uma função definida recursivamente.



Exemplo: Fibonnaci

A sequência de Fibonnaci é: **1, 1, 2, 3, 5, 8, ...**

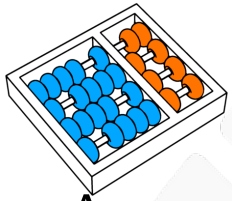
- Começa com **1**, **1**.
- Cada elemento a seguir é a soma dos dois anteriores.

Ou seja,

$$\mathbf{f(n)} = \begin{cases} \mathbf{f(n-1)} + \mathbf{f(n-2)}, & \text{se } n > 2 \\ \mathbf{1}, & \text{se } n = 1 \text{ ou } n = 2 \end{cases}$$

É o que chamamos na matemática de **recorrência**:

- Uma função definida recursivamente.
- $n!$ é outro exemplo de recorrência.



Exemplo: Fibonnaci

A sequência de Fibonnaci é: **1, 1, 2, 3, 5, 8, ...**

- Começa com **1**, **1**.
- Cada elemento a seguir é a soma dos dois anteriores.

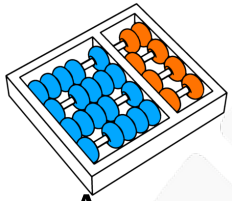
Ou seja,

$$\mathbf{f(n)} = \begin{cases} \mathbf{f(n-1)} + \mathbf{f(n-2)}, & \text{se } n > 2 \\ \mathbf{1}, & \text{se } n = 1 \text{ ou } n = 2 \end{cases}$$

É o que chamamos na matemática de **recorrência**:

- Uma função definida recursivamente.
- $n!$ é outro exemplo de recorrência.

Note que temos dois casos bases e um caso geral:



Exemplo: Fibonnaci

A sequência de Fibonnaci é: **1, 1, 2, 3, 5, 8, ...**

- Começa com **1**, **1**.
- Cada elemento a seguir é a soma dos dois anteriores.

Ou seja,

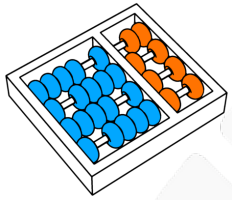
$$\mathbf{f(n)} = \begin{cases} \mathbf{f(n-1)} + \mathbf{f(n-2)}, & \text{se } n > 2 \\ \mathbf{1}, & \text{se } n = 1 \text{ ou } n = 2 \end{cases}$$

É o que chamamos na matemática de **recorrência**:

- Uma função definida recursivamente.
- $n!$ é outro exemplo de recorrência.

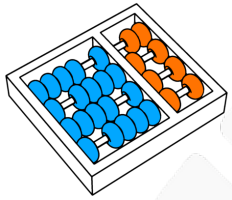
Note que temos dois casos bases e um caso geral:

- E que resolvemos uma instância a partir de duas menores.



Exemplo: Fibonnaci

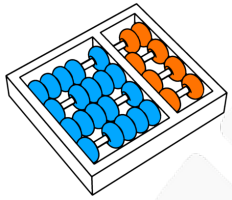
```
1 def fib(n):
2     if n == 1 or n == 2:
3         return 1
4     else:
5         return fib(n - 1) + fib(n - 2)
```



Exemplo: Fibonnaci

```
1 def fib(n):
2     if n == 1 or n == 2:
3         return 1
4     else:
5         return fib(n - 1) + fib(n - 2)
```

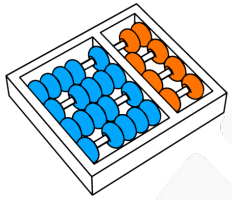
```
fib                 n:  5
   return fib(n - 1) + fib(n - 2)
```



Exemplo: Fibonnaci

```
1 def fib(n):
2     if n == 1 or n == 2:
3         return 1
4     else:
5         return fib(n - 1) + fib(n - 2)
```

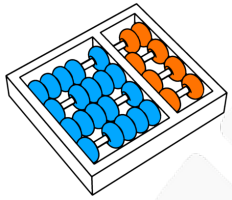
```
fib                 n:  5
    fib                 n:  4
        return fib(n - 1) + fib(n - 2)
```



Exemplo: Fibonnaci

```
1  def fib(n):
2      if n == 1 or n == 2:
3          return 1
4      else:
5          return fib(n - 1) + fib(n - 2)
```

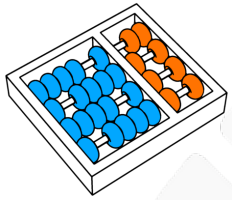
```
fib                 n:  5
    fib             n:  4
        fib         n:  3
            return fib(n - 1) + fib(n - 2)
```



Exemplo: Fibonnaci

```
1 def fib(n):
2     if n == 1 or n == 2:
3         return 1
4     else:
5         return fib(n - 1) + fib(n - 2)
```

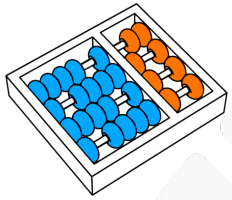
```
fib                 n:  5
    fib             n:  4
        fib         n:  3
            fib     n:  2
                return 1
```



Exemplo: Fibonnaci

```
1  def fib(n):
2      if n == 1 or n == 2:
3          return 1
4      else:
5          return fib(n - 1) + fib(n - 2)
```

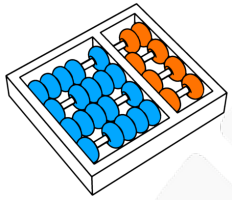
```
fib                 n:  5
    fib                 n:  4
        fib                 n:  3
            return 1 + fib(n - 2)
```



Exemplo: Fibonnaci

```
1 def fib(n):
2     if n == 1 or n == 2:
3         return 1
4     else:
5         return fib(n - 1) + fib(n - 2)
```

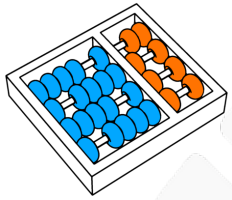
```
fib                 n:  5
    fib             n:  4
        fib         n:  3
            fib     n:  1
                return 1
```



Exemplo: Fibonnaci

```
1  def fib(n):
2      if n == 1 or n == 2:
3          return 1
4      else:
5          return fib(n - 1) + fib(n - 2)
```

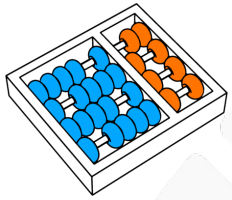
```
fib                 n:  5
    fib                 n:  4
        fib                 n:  3
            return 1 + 1
```



Exemplo: Fibonnaci

```
1 def fib(n):
2     if n == 1 or n == 2:
3         return 1
4     else:
5         return fib(n - 1) + fib(n - 2)
```

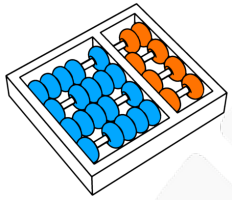
```
fib                 n:  5
    fib                 n:  4
        return 2 + fib(n - 2)
```



Exemplo: Fibonnaci

```
1  def fib(n):
2      if n == 1 or n == 2:
3          return 1
4      else:
5          return fib(n - 1) + fib(n - 2)
```

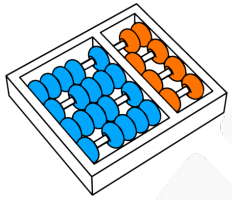
```
fib                 n:  5
    fib             n:  4
        fib         n:  2
            return 1
```



Exemplo: Fibonnaci

```
1 def fib(n):
2     if n == 1 or n == 2:
3         return 1
4     else:
5         return fib(n - 1) + fib(n - 2)
```

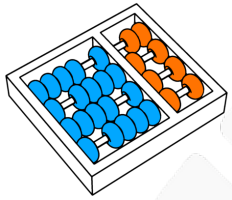
```
fib                 n:  5
    fib                 n:  4
        return 2 + 1
```



Exemplo: Fibonnaci

```
1 def fib(n):
2     if n == 1 or n == 2:
3         return 1
4     else:
5         return fib(n - 1) + fib(n - 2)
```

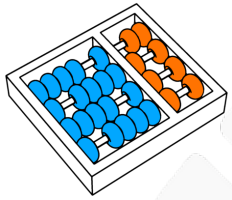
```
fib                 n:  5
   return 3 + fib(n - 2)
```



Exemplo: Fibonnaci

```
1 def fib(n):
2     if n == 1 or n == 2:
3         return 1
4     else:
5         return fib(n - 1) + fib(n - 2)
```

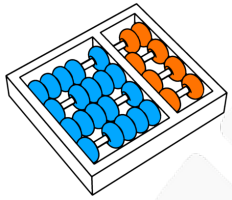
```
fib                 n:  5
    fib                 n:  3
        return fib(n - 1) + fib(n - 2)
```



Exemplo: Fibonnaci

```
1 def fib(n):
2     if n == 1 or n == 2:
3         return 1
4     else:
5         return fib(n - 1) + fib(n - 2)
```

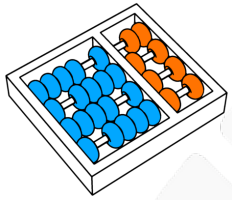
```
fib                 n:  5
    fib             n:  3
        fib         n:  2
            return 1
```



Exemplo: Fibonnaci

```
1 def fib(n):
2     if n == 1 or n == 2:
3         return 1
4     else:
5         return fib(n - 1) + fib(n - 2)
```

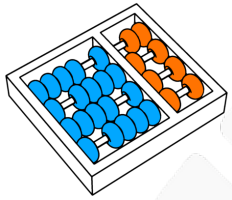
```
fib                 n:  5
    fib                 n:  3
        return 1 + fib(n - 2)
```



Exemplo: Fibonnaci

```
1  def fib(n):
2      if n == 1 or n == 2:
3          return 1
4      else:
5          return fib(n - 1) + fib(n - 2)
```

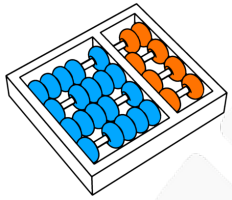
```
fib                 n:  5
    fib             n:  3
        fib         n:  1
            return 1
```



Exemplo: Fibonnaci

```
1 def fib(n):
2     if n == 1 or n == 2:
3         return 1
4     else:
5         return fib(n - 1) + fib(n - 2)
```

```
fib                 n:  5
    fib                 n:  3
        return 1 + 1
```



Exemplo: Fibonnaci

```
1 def fib(n):
2     if n == 1 or n == 2:
3         return 1
4     else:
5         return fib(n - 1) + fib(n - 2)
```

```
fib                 n:  5
   return 3 + 2
```

Euclides

Exemplo: Algoritmo de Euclides

x é um **divisor** de y se existe um inteiro k tal que $y = k \cdot x$.

Exemplo: Algoritmo de Euclides

x é um **divisor** de y se existe um inteiro k tal que $y = k \cdot x$.

- O máximo divisor comum de a e b, denotado por $mdc(a, b)$ é o maior inteiro que divide a e b simultaneamente.

Exemplo: Algoritmo de Euclides

x é um **divisor** de y se existe um inteiro k tal que $y = k \cdot x$.

- O máximo divisor comum de a e b, denotado por $mdc(a, b)$ é o maior inteiro que divide a e b simultaneamente.

Qual o $mdc(a, 0)$?

Exemplo: Algoritmo de Euclides

x é um **divisor** de y se existe um inteiro k tal que $y = k \cdot x$.

- O máximo divisor comum de a e b, denotado por $mdc(a, b)$ é o maior inteiro que divide a e b simultaneamente.

Qual o $mdc(a, 0)$?

- Qualquer número x é divisor de 0

Exemplo: Algoritmo de Euclides

x é um **divisor** de y se existe um inteiro k tal que $y = k \cdot x$.

- O máximo divisor comum de a e b, denotado por $mdc(a, b)$ é o maior inteiro que divide a e b simultaneamente.

Qual o $mdc(a, 0)$?

- Qualquer número x é divisor de 0, pois $0 = 0 \cdot x$.

Exemplo: Algoritmo de Euclides

x é um **divisor** de y se existe um inteiro k tal que $y = k \cdot x$.

- O máximo divisor comum de a e b, denotado por $mdc(a, b)$ é o maior inteiro que divide a e b simultaneamente.

Qual o $mdc(a, 0)$?

- Qualquer número x é divisor de 0, pois $0 = 0 \cdot x$.

Além disso, se x divide a e b :

Exemplo: Algoritmo de Euclides

x é um **divisor** de y se existe um inteiro k tal que $y = k \cdot x$.

- O máximo divisor comum de a e b, denotado por $mdc(a, b)$ é o maior inteiro que divide a e b simultaneamente.

Qual o $mdc(a, 0)$?

- Qualquer número x é divisor de 0, pois $0 = 0 \cdot x$.

Além disso, se x divide a e b, então x divide $a \,\mathbf{\%}\, b$:

Exemplo: Algoritmo de Euclides

x é um **divisor** de y se existe um inteiro k tal que $y = k \cdot x$.

- O máximo divisor comum de a e b, denotado por $mdc(a, b)$ é o maior inteiro que divide a e b simultaneamente.

Qual o $mdc(a, 0)$?

- Qualquer número x é divisor de 0, pois $0 = 0 \cdot x$.

Além disso, se x divide a e b, então x divide $a \,\mathbf{\%}\, b$:

- $a = q_a \cdot x$ e $b = q_b \cdot x$.

Exemplo: Algoritmo de Euclides

x é um **divisor** de y se existe um inteiro k tal que $y = k \cdot x$.

- O máximo divisor comum de a e b, denotado por $mdc(a, b)$ é o maior inteiro que divide a e b simultaneamente.

Qual o $mdc(a, 0)$?

- Qualquer número x é divisor de 0, pois $0 = 0 \cdot x$.

Além disso, se x divide a e b, então x divide $a \,\mathbf{\%}\, b$:

- $a = q_a \cdot x$ e $b = q_b \cdot x$.
- $a = k \cdot b + r$.

Exemplo: Algoritmo de Euclides

x é um **divisor** de y se existe um inteiro k tal que $y = k \cdot x$.

- O máximo divisor comum de a e b, denotado por $mdc(a, b)$ é o maior inteiro que divide a e b simultaneamente.

Qual o $mdc(a, 0)$?

- Qualquer número x é divisor de 0, pois $0 = 0 \cdot x$.

Além disso, se x divide a e b, então x divide $a \,\mathbf{\%}\, b$:

- $a = q_a \cdot x$ e $b = q_b \cdot x$.
- $a = k \cdot b + r$ e, portanto, .

Exemplo: Algoritmo de Euclides

x é um **divisor** de y se existe um inteiro k tal que $y = k \cdot x$.

- O máximo divisor comum de a e b, denotado por $mdc(a, b)$ é o maior inteiro que divide a e b simultaneamente.

Qual o $mdc(a, 0)$?

- Qualquer número x é divisor de 0, pois $0 = 0 \cdot x$.

Além disso, se x divide a e b, então x divide $a \,\mathbf{\%}\, b$:

- $a = q_a \cdot x$ e $b = q_b \cdot x$.
- $a = k \cdot b + r$ e, portanto, $a \,\mathbf{\%}\, b = r$.

Exemplo: Algoritmo de Euclides

x é um **divisor** de y se existe um inteiro k tal que $y = k \cdot x$.

- O máximo divisor comum de a e b, denotado por $mdc(a, b)$ é o maior inteiro que divide a e b simultaneamente.

Qual o $mdc(a, 0)$?

- Qualquer número x é divisor de 0, pois $0 = 0 \cdot x$.

Além disso, se x divide a e b, então x divide $a \,\mathbf{\%}\, b$:

- $a = q_a \cdot x$ e $b = q_b \cdot x$.
- $a = k \cdot b + r$ e, portanto, $a \,\mathbf{\%}\, b = r = a - k \cdot b$.

Exemplo: Algoritmo de Euclides

x é um **divisor** de y se existe um inteiro k tal que $y = k \cdot x$.

- O máximo divisor comum de a e b, denotado por $mdc(a, b)$ é o maior inteiro que divide a e b simultaneamente.

Qual o $mdc(a, 0)$?

- Qualquer número x é divisor de 0, pois $0 = 0 \cdot x$.

Além disso, se x divide a e b, então x divide $a \,\mathbf{\%}\, b$:

- $a = q_a \cdot x$ e $b = q_b \cdot x$.
- $a = k \cdot b + r$ e, portanto, $a \,\mathbf{\%}\, b = r = a - k \cdot b$.
- .

Exemplo: Algoritmo de Euclides

x é um **divisor** de y se existe um inteiro k tal que $y = k \cdot x$.

- O máximo divisor comum de a e b, denotado por $mdc(a, b)$ é o maior inteiro que divide a e b simultaneamente.

Qual o $mdc(a, 0)$?

- Qualquer número x é divisor de 0, pois $0 = 0 \cdot x$.

Além disso, se x divide a e b, então x divide $a \,\mathbf{\%}\, b$:

- $a = q_a \cdot x$ e $b = q_b \cdot x$.
- $a = k \cdot b + r$ e, portanto, $a \,\mathbf{\%}\, b = r = a - k \cdot b$.
- $a \,\mathbf{\%}\, b = a - k \cdot b$.

Exemplo: Algoritmo de Euclides

x é um **divisor** de y se existe um inteiro k tal que $y = k \cdot x$.

- O máximo divisor comum de a e b, denotado por $mdc(a, b)$ é o maior inteiro que divide a e b simultaneamente.

Qual o $mdc(a, 0)$?

- Qualquer número x é divisor de 0, pois $0 = 0 \cdot x$.

Além disso, se x divide a e b, então x divide $a \,\mathbf{\%}\, b$:

- $a = q_a \cdot x$ e $b = q_b \cdot x$.
- $a = k \cdot b + r$ e, portanto, $a \,\mathbf{\%}\, b = r = a - k \cdot b$.
- $a \,\mathbf{\%}\, b = a - k \cdot b = q_a \cdot x - k \cdot q_b \cdot x$.

Exemplo: Algoritmo de Euclides

x é um **divisor** de y se existe um inteiro k tal que $y = k \cdot x$.

- O máximo divisor comum de a e b, denotado por $mdc(a, b)$ é o maior inteiro que divide a e b simultaneamente.

Qual o $mdc(a, 0)$?

- Qualquer número x é divisor de 0, pois $0 = 0 \cdot x$.

Além disso, se x divide a e b, então x divide $a \,\mathbf{\%}\, b$:

- $a = q_a \cdot x$ e $b = q_b \cdot x$.
- $a = k \cdot b + r$ e, portanto, $a \,\mathbf{\%}\, b = r = a - k \cdot b$.
- $a \,\mathbf{\%}\, b = a - k \cdot b = q_a \cdot x - k \cdot q_b \cdot x = (q_a - k \cdot q_b) \cdot x$.

Exemplo: Algoritmo de Euclides

x é um **divisor** de y se existe um inteiro k tal que $y = k \cdot x$.

- O máximo divisor comum de a e b, denotado por $mdc(a, b)$ é o maior inteiro que divide a e b simultaneamente.

Qual o $mdc(a, 0)$?

- Qualquer número x é divisor de 0, pois $0 = 0 \cdot x$.

Além disso, se x divide a e b, então x divide $a \,\mathbf{\%}\, b$:

- $a = q_a \cdot x$ e $b = q_b \cdot x$.
- $a = k \cdot b + r$ e, portanto, $a \,\mathbf{\%}\, b = r = a - k \cdot b$.
- $a \,\mathbf{\%}\, b = a - k \cdot b = q_a \cdot x - k \cdot q_b \cdot x = (q_a - k \cdot q_b) \cdot x$.

Assim:

Exemplo: Algoritmo de Euclides

x é um **divisor** de y se existe um inteiro k tal que $y = k \cdot x$.

- O máximo divisor comum de a e b, denotado por $mdc(a, b)$ é o maior inteiro que divide a e b simultaneamente.

Qual o $mdc(a, 0)$?

- Qualquer número x é divisor de 0, pois $0 = 0 \cdot x$.

Além disso, se x divide a e b, então x divide $a \,\mathbf{\%}\, b$:

- $a = q_a \cdot x$ e $b = q_b \cdot x$.
- $a = k \cdot b + r$ e, portanto, $a \,\mathbf{\%}\, b = r = a - k \cdot b$.
- $a \,\mathbf{\%}\, b = a - k \cdot b = q_a \cdot x - k \cdot q_b \cdot x = (q_a - k \cdot q_b) \cdot x$.

Assim:

$$\mathbf{mdc(a, b)} = \begin{cases} \mathbf{mdc(b, a \,\%\, b)}, & \text{se } b \neq 0 \\ \mathbf{a}, & \text{se } b = 0 \end{cases}$$

Exemplo: Algoritmo de Euclides

$$\mathbf{mdc(a,\ b)} = \begin{cases} \mathbf{mdc(b,\ a\ \%\ b)}, & \text{se } b \neq 0 \\ \mathbf{a}, & \text{se } b = 0 \end{cases}$$

Exemplo: Algoritmo de Euclides

$$\mathbf{mdc(a,\ b)} = \begin{cases} \mathbf{mdc(b,\ a\ \%\ b)}, & \text{se } b \neq 0 \\ \mathbf{a}, & \text{se } b = 0 \end{cases}$$

Temos um caso base e um caso geral:

Exemplo: Algoritmo de Euclides

$$\textbf{mdc(a, b)} = \begin{cases} \textbf{mdc(b, a \% b)}, & \text{se } b \neq 0 \\ \textbf{a}, & \text{se } b = 0 \end{cases}$$

Temos um caso base e um caso geral:

- Para usar recursão, temos que ir do maior para o menor.

Exemplo: Algoritmo de Euclides

$$\mathbf{mdc(a,\ b)} = \begin{cases} \mathbf{mdc(b,\ a\ \%\ b)}, & \text{se } b \neq 0 \\ \mathbf{a}, & \text{se } b = 0 \end{cases}$$

Temos um caso base e um caso geral:

- Para usar recursão, temos que ir do maior para o menor.
  - E chegarmos na base em algum momento.

Exemplo: Algoritmo de Euclides

$$\mathbf{mdc(a,\ b)} = \begin{cases} \mathbf{mdc(b,\ a\ \%\ b)}, & \text{se } b \neq 0 \\ \mathbf{a}, & \text{se } b = 0 \end{cases}$$

Temos um caso base e um caso geral:

- Para usar recursão, temos que ir do maior para o menor.
  - E chegarmos na base em algum momento.
- Note que $a \,\mathbf{\%}\, b < b$.

Exemplo: Algoritmo de Euclides

$$\mathbf{mdc(a,\ b)} = \begin{cases} \mathbf{mdc(b,\ a\ \%\ b)}, & \text{se } b \neq 0 \\ \mathbf{a}, & \text{se } b = 0 \end{cases}$$

Temos um caso base e um caso geral:

- Para usar recursão, temos que ir do maior para o menor.
  - E chegarmos na base em algum momento.
- Note que $a \,\mathbf{\%}\, b < b$.
  - Ou seja, estamos sempre diminuindo o segundo termo.

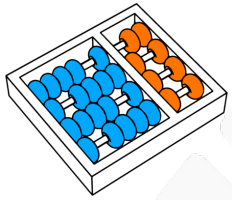
Exemplo: Algoritmo de Euclides

$$\textbf{mdc(a, b)} = \begin{cases} \textbf{mdc(b, a \% b)}, & \text{se } b \neq 0 \\ \textbf{a}, & \text{se } b = 0 \end{cases}$$

Temos um caso base e um caso geral:

- Para usar recursão, temos que ir do maior para o menor.
  - E chegarmos na base em algum momento.
- Note que $a \,\%\, b < b$.
  - Ou seja, estamos sempre diminuindo o segundo termo.

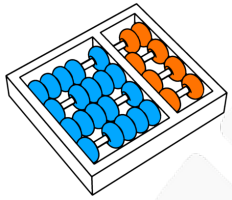
```
1  def mdc(a, b):
2      if b == 0:
3          return a
4      else:
5          return mdc(b, a % b)
```



Exemplo: Algoritmo de Euclides

```
1 def mdc(a, b):
2     if b == 0:
3         return a
4     else:
5         return mdc(b, a % b)
```

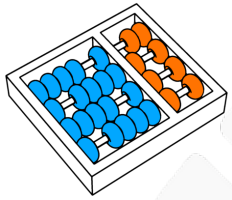
```
mdc        a:  40    b:  70
   return mdc(b, a % b)
```



Exemplo: Algoritmo de Euclides

```
1 def mdc(a, b):
2     if b == 0:
3         return a
4     else:
5         return mdc(b, a % b)
```

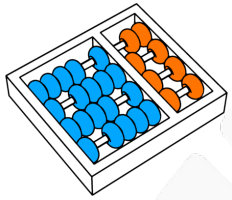
```
mdc        a:  40    b:  70
    mdc        a:  70    b:  40
        return mdc(b, a % b)
```



Exemplo: Algoritmo de Euclides

```
1 def mdc(a, b):
2     if b == 0:
3         return a
4     else:
5         return mdc(b, a % b)
```

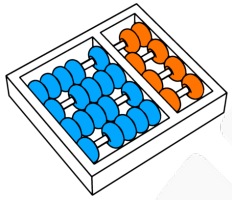
```
mdc        a:  40    b:  70
    mdc        a:  70    b:  40
        mdc        a:  40    b:  30
            return mdc(b, a % b)
```



Exemplo: Algoritmo de Euclides

```
1  def mdc(a, b):
2      if b == 0:
3          return a
4      else:
5          return mdc(b, a % b)
```

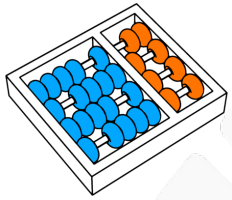
```
mdc        a:  40    b:  70
  mdc        a:  70    b:  40
    mdc        a:  40    b:  30
      mdc        a:  30    b:  10
        return mdc(b, a % b)
```



Exemplo: Algoritmo de Euclides

```
1  def mdc(a, b):
2      if b == 0:
3          return a
4      else:
5          return mdc(b, a % b)
```

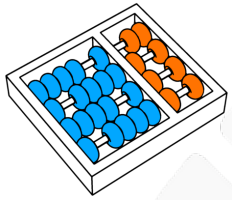
```
mdc        a:  40    b:  70
  mdc        a:  70    b:  40
    mdc        a:  40    b:  30
      mdc        a:  30    b:  10
        mdc        a:  10    b:  0
          return 10
```



Exemplo: Algoritmo de Euclides

```
1  def mdc(a, b):
2      if b == 0:
3          return a
4      else:
5          return mdc(b, a % b)
```

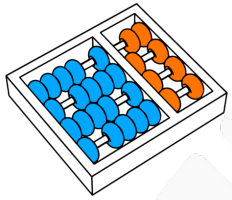
```
mdc        a:  40    b:  70
  mdc        a:  70    b:  40
    mdc        a:  40    b:  30
      mdc        a:  30    b:  10
        return 10
```



Exemplo: Algoritmo de Euclides

```
1  def mdc(a, b):
2      if b == 0:
3          return a
4      else:
5          return mdc(b, a % b)
```

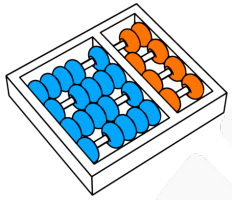
```
mdc        a:  40    b:  70
  mdc        a:  70    b:  40
    mdc        a:  40    b:  30
      return 10
```



Exemplo: Algoritmo de Euclides

```
1  def mdc(a, b):
2      if b == 0:
3          return a
4      else:
5          return mdc(b, a % b)
```

```
mdc        a:  40    b:  70
    mdc        a:  70    b:  40
        return 10
```



Exemplo: Algoritmo de Euclides

```
1 def mdc(a, b):
2     if b == 0:
3         return a
4     else:
5         return mdc(b, a % b)
```

```
mdc        a:  40    b:  70
   return 10
```

Considerações

Um mal exemplo de recursão: $3n + 1$

Considere a seguinte sequência de números:

Um mal exemplo de recursão: $3n + 1$

Considere a seguinte sequência de números:

- Comece com um número a_0 a sua escolha.

Um mal exemplo de recursão: $3n + 1$

Considere a seguinte sequência de números:

- Comece com um número a_0 a sua escolha.
- Se $a_i = 1$, pare.

Um mal exemplo de recursão: $3n + 1$

Considere a seguinte sequência de números:

- Comece com um número a_0 a sua escolha.
- Se $a_i = 1$, pare.
- Se a_i é par, então $a_{i+1} = a_i/2$.

Um mal exemplo de recursão: $3n + 1$

Considere a seguinte sequência de números:

- Comece com um número a_0 a sua escolha.
- Se $a_i = 1$, pare.
- Se a_i é par, então $a_{i+1} = a_i/2$.
- Se a_i é impar, então $a_{i+1} = 3 \cdot a_i + 1$.

Um mal exemplo de recursão: $3n + 1$

Considere a seguinte sequência de números:

- Comece com um número a_0 a sua escolha.
- Se $a_i = 1$, pare.
- Se a_i é par, então $a_{i+1} = a_i/2$.
- Se a_i é impar, então $a_{i+1} = 3 \cdot a_i + 1$.

A **Conjectura de Collatz** é que, para qualquer a_0 escolhido, essa sequência sempre termina:

Um mal exemplo de recursão: $3n + 1$

Considere a seguinte sequência de números:

- Comece com um número a_0 a sua escolha.
- Se $a_i = 1$, pare.
- Se a_i é par, então $a_{i+1} = a_i/2$.
- Se a_i é impar, então $a_{i+1} = 3 \cdot a_i + 1$.

A **Conjectura de Collatz** é que, para qualquer a_0 escolhido, essa sequência sempre termina:

- Isto é, chegamos em $a_i = 1$.

Um mal exemplo de recursão: $3n + 1$

Considere a seguinte sequência de números:

- Comece com um número a_0 a sua escolha.
- Se $a_i = 1$, pare.
- Se a_i é par, então $a_{i+1} = a_i/2$.
- Se a_i é impar, então $a_{i+1} = 3 \cdot a_i + 1$.

A **Conjectura de Collatz** é que, para qualquer a_0 escolhido, essa sequência sempre termina:

- Isto é, chegamos em $a_i = 1$.

Podemos fazer um código em Python que gera essa sequência:

Um mal exemplo de recursão: $3n + 1$

Considere a seguinte sequência de números:

- Comece com um número a_0 a sua escolha.
- Se $a_i = 1$, pare.
- Se a_i é par, então $a_{i+1} = a_i/2$.
- Se a_i é impar, então $a_{i+1} = 3 \cdot a_i + 1$.

A **Conjectura de Collatz** é que, para qualquer a_0 escolhido, essa sequência sempre termina:

- Isto é, chegamos em $a_i = 1$.

Podemos fazer um código em Python que gera essa sequência:

- Mas não temos certeza se a execução terminaria. . .

Um mal exemplo de recursão: $3n + 1$

Considere a seguinte sequência de números:

- Comece com um número a_0 a sua escolha.
- Se $a_i = 1$, pare.
- Se a_i é par, então $a_{i+1} = a_i/2$.
- Se a_i é impar, então $a_{i+1} = 3 \cdot a_i + 1$.

A **Conjectura de Collatz** é que, para qualquer a_0 escolhido, essa sequência sempre termina:

- Isto é, chegamos em $a_i = 1$.

Podemos fazer um código em Python que gera essa sequência:

- Mas não temos certeza se a execução terminaria...
- Afinal, não sabemos se a conjectura é verdadeira...

Um mal exemplo de recursão: $3n + 1$

Considere a seguinte sequência de números:

- Comece com um número a_0 a sua escolha.
- Se $a_i = 1$, pare.
- Se a_i é par, então $a_{i+1} = a_i/2$.
- Se a_i é impar, então $a_{i+1} = 3 \cdot a_i + 1$.

A **Conjectura de Collatz** é que, para qualquer a_0 escolhido, essa sequência sempre termina:

- Isto é, chegamos em $a_i = 1$.

Podemos fazer um código em Python que gera essa sequência:

- Mas não temos certeza se a execução terminaria...
- Afinal, não sabemos se a conjectura é verdadeira...

O problema é que não estamos indo de uma instância maior para uma menor quando a_i é ímpar!

Dicas

- Você sempre precisa ter pelo menos um caso base!

Dicas

- Você sempre precisa ter pelo menos um caso base!
  - Senão, você alcança um caso pequeno que não sabe resolver.

Dicas

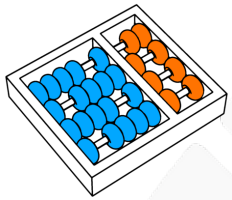
- Você sempre precisa ter pelo menos um caso base!
  - Senão, você alcança um caso pequeno que não sabe resolver.
- Você precisa sempre chegar em algum caso base!

Dicas

- Você sempre precisa ter pelo menos um caso base!
  - Senão, você alcança um caso pequeno que não sabe resolver.
- Você precisa sempre chegar em algum caso base!
  - Você precisa ir da instância maior para a menor.

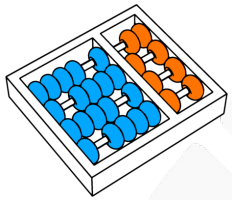
Dicas

- Você sempre precisa ter pelo menos um caso base!
  - Senão, você alcança um caso pequeno que não sabe resolver.
- Você precisa sempre chegar em algum caso base!
  - Você precisa ir da instância maior para a menor.
    - Se crescer pode nunca chegar na base!



Dicas

- Você sempre precisa ter pelo menos um caso base!
  - Senão, você alcança um caso pequeno que não sabe resolver.
- Você precisa sempre chegar em algum caso base!
  - Você precisa ir da instância maior para a menor.
    - Se crescer pode nunca chegar na base!
    - Se continuar igual, irá ciclar!



Dicas

- Você sempre precisa ter pelo menos um caso base!
  - Senão, você alcança um caso pequeno que não sabe resolver.
- Você precisa sempre chegar em algum caso base!
  - Você precisa ir da instância maior para a menor.
    - Se crescer pode nunca chegar na base!
    - Se continuar igual, irá ciclar!

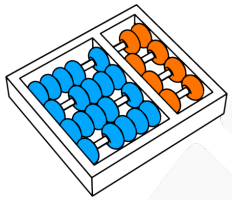
Veja esse exemplo:

Dicas

- Você sempre precisa ter pelo menos um caso base!
  - Senão, você alcança um caso pequeno que não sabe resolver.
- Você precisa sempre chegar em algum caso base!
  - Você precisa ir da instância maior para a menor.
    - Se crescer pode nunca chegar na base!
    - Se continuar igual, irá ciclar!

Veja esse exemplo:

```
1 def fib_defeituoso(n):
2     if n == 1:
3         return 1
4     else:
5         return fib_defeituoso(n - 1) + fib_defeituoso(n - 2)
```



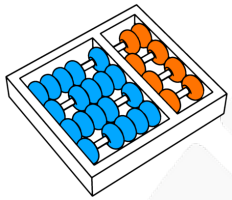
Dicas

- Você sempre precisa ter pelo menos um caso base!
  - Senão, você alcança um caso pequeno que não sabe resolver.
- Você precisa sempre chegar em algum caso base!
  - Você precisa ir da instância maior para a menor.
    - Se crescer pode nunca chegar na base!
    - Se continuar igual, irá ciclar!

Veja esse exemplo:

```
1 def fib_defeituoso(n):
2     if n == 1:
3         return 1
4     else:
5         return fib_defeituoso(n - 1) + fib_defeituoso(n - 2)
```

O que acontece para $n = 2$?



Dicas

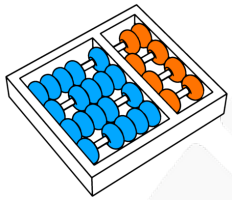
- Você sempre precisa ter pelo menos um caso base!
  - Senão, você alcança um caso pequeno que não sabe resolver.
- Você precisa sempre chegar em algum caso base!
  - Você precisa ir da instância maior para a menor.
    - Se crescer pode nunca chegar na base!
    - Se continuar igual, irá ciclar!

Veja esse exemplo:

```
1 def fib_defeituoso(n):
2     if n == 1:
3         return 1
4     else:
5         return fib_defeituoso(n - 1) + fib_defeituoso(n - 2)
```

O que acontece para $n = 2$?

- Nunca atingimos uma base para **fib_defeituoso(0)**...



Dicas

- Você sempre precisa ter pelo menos um caso base!
  - Senão, você alcança um caso pequeno que não sabe resolver.
- Você precisa sempre chegar em algum caso base!
  - Você precisa ir da instância maior para a menor.
    - Se crescer pode nunca chegar na base!
    - Se continuar igual, irá ciclar!

Veja esse exemplo:

```
1 def fib_defeituoso(n):
2     if n == 1:
3         return 1
4     else:
5         return fib_defeituoso(n - 1) + fib_defeituoso(n - 2)
```

O que acontece para $n = 2$?

- Nunca atingimos uma base para **fib_defeituoso(0)**...

Recursão com listas

Recursão com listas

Até o momento, vimos o uso de recursão para operações matemáticas:

Recursão com listas

Até o momento, vimos o uso de recursão para operações matemáticas:

- Fibonnaci, mdc, PA, etc.

Recursão com listas

Até o momento, vimos o uso de recursão para operações matemáticas:

- Fibonnaci, mdc, PA, etc.

Mas podemos usar recursão para diversas tarefas computacionais:

Recursão com listas

Até o momento, vimos o uso de recursão para operações matemáticas:

- Fibonnaci, mdc, PA, etc.

Mas podemos usar recursão para diversas tarefas computacionais:

- Como, por exemplo, algoritmos que lidam com listas.

Recursão com listas

Até o momento, vimos o uso de recursão para operações matemáticas:

- Fibonnaci, mdc, PA, etc.

Mas podemos usar recursão para diversas tarefas computacionais:

- Como, por exemplo, algoritmos que lidam com listas.

Digamos que queremos imprimir uma lista:

Recursão com listas

Até o momento, vimos o uso de recursão para operações matemáticas:

- Fibonnaci, mdc, PA, etc.

Mas podemos usar recursão para diversas tarefas computacionais:

- Como, por exemplo, algoritmos que lidam com listas.

Digamos que queremos imprimir uma lista:

- **Base**: Se a lista for vazia, não temos nada para imprimir.

Recursão com listas

Até o momento, vimos o uso de recursão para operações matemáticas:

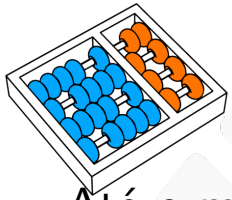
- Fibonnaci, mdc, PA, etc.

Mas podemos usar recursão para diversas tarefas computacionais:

- Como, por exemplo, algoritmos que lidam com listas.

Digamos que queremos imprimir uma lista:

- **Base**: Se a lista for vazia, não temos nada para imprimir.
- **Geral**: Imprimimos o primeiro elemento e imprimimos o resto recursivamente.



Recursão com listas

Até o momento, vimos o uso de recursão para operações matemáticas:

- Fibonnaci, mdc, PA, etc.

Mas podemos usar recursão para diversas tarefas computacionais:

- Como, por exemplo, algoritmos que lidam com listas.

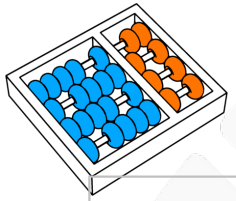
Digamos que queremos imprimir uma lista:

- **Base**: Se a lista for vazia, não temos nada para imprimir.
- **Geral**: Imprimimos o primeiro elemento e imprimimos o resto recursivamente.

```
1  def imprime(l):
2      if len(l) == 0:
3          print()
4      else:
5          print(l[0], end=' ')
6          imprime(l[1:])
```

Exemplo: Imprimindo uma lista

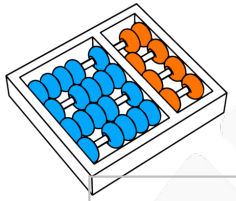
```
1  def imprime(l):
2      if len(l) == 0:
3          print()
4      else:
5          print(l[0], end=' ')
6          imprime(l[1:])
```



Exemplo: Imprimindo uma lista

```
1  def imprime(l):
2      if len(l) == 0:
3          print()
4      else:
5          print(l[0], end=' ')
6          imprime(l[1:])
```

Esse código é ruim porque estamos usando slices:

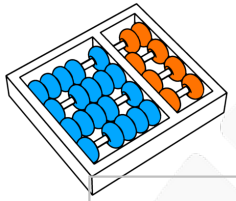


Exemplo: Imprimindo uma lista

```
1  def imprime(l):
2      if len(l) == 0:
3          print()
4      else:
5          print(l[0], end=' ')
6          imprime(l[1:])
```

Esse código é ruim porque estamos usando slices:

- Cada slice é uma nova cópia da lista.

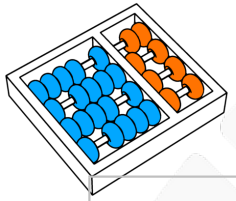


Exemplo: Imprimindo uma lista

```
1  def imprime(l):
2      if len(l) == 0:
3          print()
4      else:
5          print(l[0], end=' ')
6          imprime(l[1:])
```

Esse código é ruim porque estamos usando slices:

- Cada slice é uma nova cópia da lista.
- O que gasta espaço na memória e tempo para a cópia.



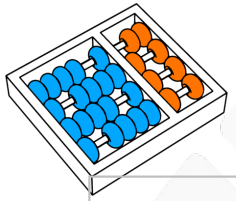
Exemplo: Imprimindo uma lista

```
1  def imprime(l):
2      if len(l) == 0:
3          print()
4      else:
5          print(l[0], end=' ')
6          imprime(l[1:])
```

Esse código é ruim porque estamos usando slices:

- Cada slice é uma nova cópia da lista.
- O que gasta espaço na memória e tempo para a cópia.

Uma versão melhor:



Exemplo: Imprimindo uma lista

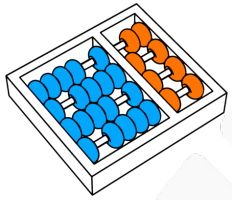
```
1  def imprime(l):
2      if len(l) == 0:
3          print()
4      else:
5          print(l[0], end=' ')
6          imprime(l[1:])
```

Esse código é ruim porque estamos usando slices:

- Cada slice é uma nova cópia da lista.
- O que gasta espaço na memória e tempo para a cópia.

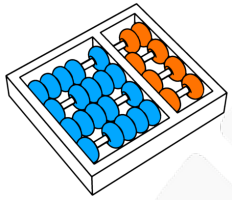
Uma versão melhor:

```
1  def imprime_rec(l, n):
2      if n > 0:  # a base n == 0 está implicita
3          imprime_rec(l, n - 1)
4          print(l[n - 1], end=' ')
5
6  def imprime(l):
7      imprime_rec(l, len(l))
8      print()
```



Exemplo: Imprimindo uma lista

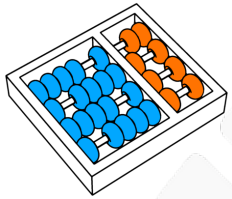
```
1  def imprime_rec(l, n):
2      if n > 0:  # a base n == 0 está implicita
3          imprime_rec(l, n - 1)
4          print(l[n - 1], end=' ')
5
6  def imprime(l):
7      imprime_rec(l, len(l))
8      print()
```



Exemplo: Imprimindo uma lista

```
1  def imprime_rec(l, n):
2      if n > 0:  # a base n == 0 está implicita
3          imprime_rec(l, n - 1)
4          print(l[n - 1], end=' ')
5
6  def imprime(l):
7      imprime_rec(l, len(l))
8      print()
```

A recursão é no tamanho **n** da sublista a ser impressa:

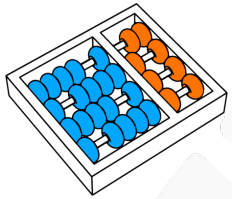


Exemplo: Imprimindo uma lista

```
1  def imprime_rec(l, n):
2      if n > 0:  # a base n == 0 está implicita
3          imprime_rec(l, n - 1)
4          print(l[n - 1], end=' ')
5
6  def imprime(l):
7      imprime_rec(l, len(l))
8      print()
```

A recursão é no tamanho **n** da sublista a ser impressa:

- **Base**: Temos **n == 0**.

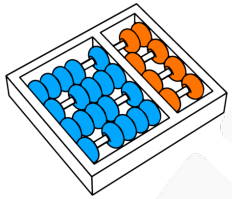


Exemplo: Imprimindo uma lista

```
1  def imprime_rec(l, n):
2      if n > 0:  # a base n == 0 está implicita
3          imprime_rec(l, n - 1)
4          print(l[n - 1], end=' ')
5
6  def imprime(l):
7      imprime_rec(l, len(l))
8      print()
```

A recursão é no tamanho **n** da sublista a ser impressa:

- **Base**: Temos **n == 0**.
  - Ou seja, nada a fazer.

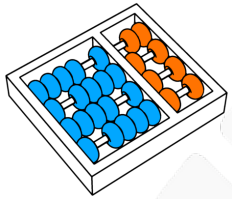


Exemplo: Imprimindo uma lista

```
1  def imprime_rec(l, n):
2      if n > 0:  # a base n == 0 está implicita
3          imprime_rec(l, n - 1)
4          print(l[n - 1], end=' ')
5
6  def imprime(l):
7      imprime_rec(l, len(l))
8      print()
```

A recursão é no tamanho **n** da sublista a ser impressa:

- **Base**: Temos **n == 0**.
  - Ou seja, nada a fazer.
- **Geral**: Temos **n > 0**:

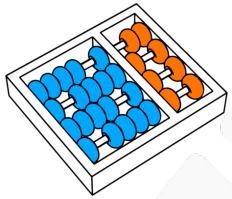


Exemplo: Imprimindo uma lista

```
1  def imprime_rec(l, n):
2      if n > 0:  # a base n == 0 está implicita
3          imprime_rec(l, n - 1)
4          print(l[n - 1], end=' ')
5
6  def imprime(l):
7      imprime_rec(l, len(l))
8      print()
```

A recursão é no tamanho **n** da sublista a ser impressa:

- **Base**: Temos **n == 0**.
  - Ou seja, nada a fazer.
- **Geral**: Temos **n > 0**:
  - Imprime recursivamente o começo da lista.



Exemplo: Imprimindo uma lista

```
1  def imprime_rec(l, n):
2      if n > 0:  # a base n == 0 está implicita
3          imprime_rec(l, n - 1)
4          print(l[n - 1], end=' ')
5
6  def imprime(l):
7      imprime_rec(l, len(l))
8      print()
```

A recursão é no tamanho **n** da sublista a ser impressa:

- **Base**: Temos **n == 0**.
  - Ou seja, nada a fazer.
- **Geral**: Temos **n > 0**:
  - Imprime recursivamente o começo da lista.
  - Imprime o último elemento.

Exercícios

Sobre recursão

Vamos fazer alguns exercícios?

Exercícios

1. Faça uma função recursiva que calcula a soma dos números naturais menores ou iguais a n.

Exercícios

1. Faça uma função recursiva que calcula a soma dos números naturais menores ou iguais a n.
2. Faça uma função recursiva que calcula a soma dos números naturais ímpares menores ou iguais a n.

Exercícios

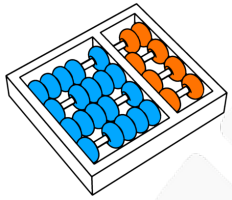
1. Faça uma função recursiva que calcula a soma dos números naturais menores ou iguais a n.
2. Faça uma função recursiva que calcula a soma dos números naturais ímpares menores ou iguais a n.
3. Faça uma função recursiva que calcula a soma de uma PA com valor inicial a_1, razão r e n termos.

Exercícios

1. Faça uma função recursiva que calcula a soma dos números naturais menores ou iguais a n.
2. Faça uma função recursiva que calcula a soma dos números naturais ímpares menores ou iguais a n.
3. Faça uma função recursiva que calcula a soma de uma PA com valor inicial a_1, razão r e n termos.
4. Faça uma função recursiva para contar quantos dígitos um número inteiro positivo tem na representação decimal.

Exercícios

1. Faça uma função recursiva que calcula a soma dos números naturais menores ou iguais a n.
2. Faça uma função recursiva que calcula a soma dos números naturais ímpares menores ou iguais a n.
3. Faça uma função recursiva que calcula a soma de uma PA com valor inicial a_1, razão r e n termos.
4. Faça uma função recursiva para contar quantos dígitos um número inteiro positivo tem na representação decimal.
5. Faça uma função recursiva que, dada uma string representando um número inteiro positivo em binário, acha o seu valor em decimal.

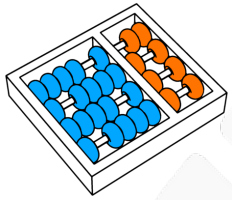


Exercícios

1. Faça uma função recursiva que calcula a soma dos números naturais menores ou iguais a n.
2. Faça uma função recursiva que calcula a soma dos números naturais ímpares menores ou iguais a n.
3. Faça uma função recursiva que calcula a soma de uma PA com valor inicial a_1, razão r e n termos.
4. Faça uma função recursiva para contar quantos dígitos um número inteiro positivo tem na representação decimal.
5. Faça uma função recursiva que, dada uma string representando um número inteiro positivo em binário, acha o seu valor em decimal.
6. Faça uma função recursiva que, dado um número inteiro positivo, acha o seu valor em binário (em uma string).

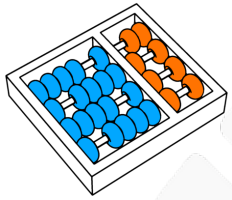
Exercícios com listas

1. Faça uma função recursiva que calcula a soma dos elementos de uma lista.



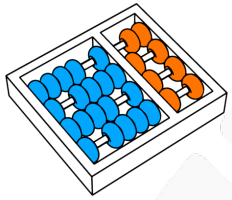
Exercícios com listas

1. Faça uma função recursiva que calcula a soma dos elementos de uma lista.
2. Faça uma função recursiva que encontra o máximo de uma lista.



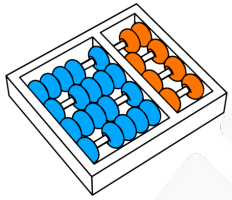
Exercícios com listas

1. Faça uma função recursiva que calcula a soma dos elementos de uma lista.
2. Faça uma função recursiva que encontra o máximo de uma lista.
3. Faça uma função recursiva que busca um elemento em uma lista não ordenada.



Exercícios com listas

1. Faça uma função recursiva que calcula a soma dos elementos de uma lista.
2. Faça uma função recursiva que encontra o máximo de uma lista.
3. Faça uma função recursiva que busca um elemento em uma lista não ordenada.
4. Faça uma função recursiva que recebe uma lista e devolve uma copia da lista invertida.



Exercícios com listas

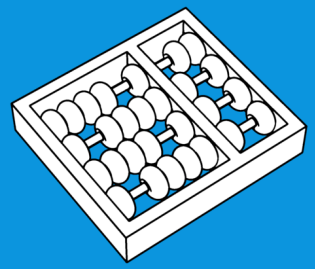
1. Faça uma função recursiva que calcula a soma dos elementos de uma lista.
2. Faça uma função recursiva que encontra o máximo de uma lista.
3. Faça uma função recursiva que busca um elemento em uma lista não ordenada.
4. Faça uma função recursiva que recebe uma lista e devolve uma copia da lista invertida.
5. Faça uma função recursiva que checa se duas listas dadas são iguais.

Recursão

MC102 - Algoritmos e Programação de Computadores

06/25

23

Santiago Valdés Ravelo
https://ic.unicamp.br/~santiago/
ravelo@unicamp.br

UNICAMP