O Número Cromático do Plano

Karina M. de Magalhães

Instituto de Computação
Universidade Estadual de Campinas

Resumo

Também conhecido com o Problema de Hadwiger–Nelson, o número cromático χ do plano $\mathbb{R}^2$ é definido como o número mínimo de cores necessárias para pintar o plano de tal forma que nenhum par de pontos distantes a uma unidade possuam a mesma cor. Este problema ainda está em aberto, mas sabe-se atualmente que $4 \leq \chi(\mathbb{R}^2) \leq 7$. Este trabalho tem como objetivo mostrar o estado da arte de tal problema e propor novos caminhos em busca de soluções.

1 Introdução

Seja $\{c_1, c_2, ..., c_n\}$ um conjunto de n cores. Produzir uma coloração sobre um plano significa atribuir uma cor c_i, $1 \leq i \leq n$, para cada ponto p do plano, de tal forma que todos os pontos do plano recebam uma e somente uma cor. A seqüência de atribuições pode seguir um padrão ou ser completamente arbitrária.

O problema do número cromático do plano é definido como o número de cores necessárias para pintar o plano de tal forma que nenhum par de pontos distantes de uma unidade possuam a mesma cor. Segundo Jensen & Toft [1], o problema foi formulado por E. Nelson em 1950, sendo publicado pela primeira vez por Gardner em 1960 [2]. O problema original é definido sobre o plano, ou seja, sobre $\mathbb{R}^2$, mas é possível restringi-lo para $\mathbb{R}^1$ formulando a seguinte questão: Quantas cores são necessária para pintar uma reta de tal forma que nenhum par de pontos distantes de uma unidade possuam a mesma cor? A solução para esta formulação é trivial: O número de cores é 2 e a coloração é a descrita na Figura 1.

No caso do plano, o número cromático ainda não está definido, mas existem limites inferiores e superiores estabelecidos. Sabemos que $4 \leq \chi(\mathbb{R}^2) \leq 7$. É importante observar também que este problema pode ser formulado sobre qualquer dimensão; para o espaço $(\mathbb{R}^3)$, por exemplo, temos que $6 \leq \chi(\mathbb{R}^3) \leq 15$ [3].

Outra formulação possível do problema equivale ao seguinte enunciado em teoria dos grafos: Qual o número cromático de um grafo G de distância unitária, onde G é um grafo infinito que representa o plano transformando todos os seus pontos em vértices e conectando por arestas vértices que estão a uma unidade de distância? Esta formulação do problema é adotada por Erdõs & Bruijn em um de seus trabalhos [4].

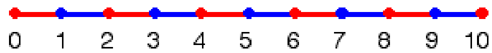

Figura 1: A coloração da reta, de tal forma que nenhum par de pontos distantes de uma unidade possuam a mesma cor.

Um outro problema conhecido que possui relação com número cromático do plano é o problema dos triângulos monocromáticos [5]. Neste problema, o plano deve ser colorido usando-se 3 cores de forma que, para um dado triângulo T, não seja possível posicioná-lo no plano de forma que seus três vértices possuam a mesma cor. Esta coloração do plano claramente irá depender do triângulo T escolhido.

2 Revisão do Problema

2.1 Limite Inferior e Superior para o Número Cromático do Plano

Em 1961, Hadwiger mostrou uma coloração do plano que mantinha a propriedade de que um par de pontos a uma unidade de distância não possuiam a mesma cor [6]. Tal coloração divide o plano em hexágonos de diâmetro menor que um e utiliza 7 cores, conforme ilustrado pela Figura 2.

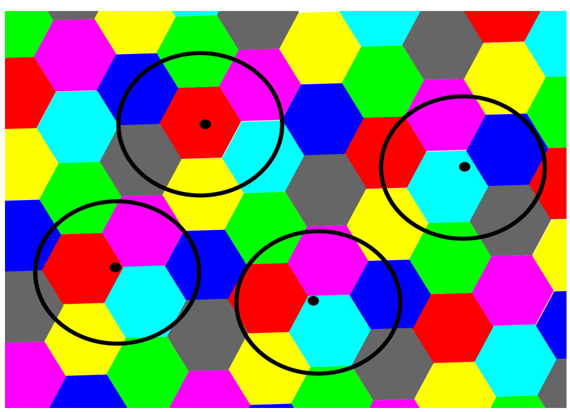

Figura 2: Uma 7 coloração do plano, em que um par de pontos a uma unidade de distância não possuem a mesma cor.

É fácil perceber que qualquer círculo de raio unitário terá cores diferentes de seu centro. Isso ocorre, pois o centro de um círculo estará sempre dentro de um hexágono H, e o círculo estará contido na região formada pelos 6 hexágonos vizinhos a H. Como todos os vizinhos de um hexágono possuem cores diferentes dele, todas as cores dos pontos do círculo serão diferentes do seu centro. Assim, Hadwiger definiu um limite superior para o Problema da Coloração do Plano, i.e., $\chi(\mathbb{R}^2) \leq 7$.

No mesmo ano de 1961, os irmãos Moser provaram que 4 é um limite inferior para este problema, i.e., $4 \leq \chi(\mathbb{R}^2)$ [7]. Eles demonstraram que o grafo M de distância unitária com 7 nós descrito na Figura 3 possui número cromático 4. Tal grafo é conhecido como *Moser spindle* e é um subgrafo do grafo de distância unitária infinita G que pode ser utilizado para representar o plano. Assim, se o número cromático de M é 4 e M é um subgrafo de G, então o número cromático de G é pelo menos 4.

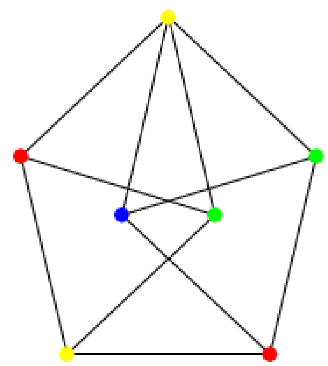

Figura 3: O *Moser spindle*, um subgrafo de número cromático 4 da formulação em grafos do problema do número cromático do plano.

Dessa forma, desde a década de 60, podemos afirmar que o número cromático do plano $\chi(\mathbb{R}^2)$ possui limite inferior 4 e limite superior 7, ou seja, $4 \leq \chi(\mathbb{R}^2) \leq 7$.

2.2 A Teoria Axiomática de Conjuntos e o Número Cromático do Plano

Para resolver os paradoxos encontrados na Teoria de Conjuntos informal – como o paradoxo de Russell – no começo do século XX, alguns matemáticos criaram axiomas para a Teoria Axiomática de Conjuntos. Alguns sistemas de axiomas foram criados, como o de Zermelo-Fraenkel, mas a principal contribuição foi o Axioma da Escolha:

Axioma da Escolha: Seja X um conjunto cujos elementos são conjuntos não-vazios. Então existe uma função f de domínio X tal que $f(x) \in x$, $\forall x \in X$.

Em outras palavras, o Axioma da Escolha diz que, dada uma família com n conjuntos, sempre é possível escolher um elemento de cada conjunto, mesmo que o número de conjuntos seja infinito e não exista nenhuma regra para a escolha dos elementos. O Axioma da Escolha estabelece que sempre existe uma forma de escolha, mesmo que ela não possa ser definida em um número finito de passos.

Segundo Shelah & Soifer [8] a escolha do sistema de axiomas da Teoria de Conjuntos, principalmente no que diz respeito ao Axioma da Escolha, é essencial para a definição do número cromático do plano. Erdõs & Brujin utilizaram-se deste axioma quando demonstraram, em 1951, que o número cromático do plano está relacionado com algum subgrafo finito. Shelah & Soifer mostraram que para o sistema de axiomas Zermelo-Fraenkel-Choice, o número cromático do plano formado pelos números racionais é 4, mas que o número não é contável, ou até mesmo pode não existir, quando usamos o Axioma da Escolha limitado somente para famílias contáveis de conjuntos.

2.3 O Número Cromático do Espaço

Diferente do Problema do Número Cromático para o Plano, que possui seus limites definidos desde a década de 60 (mas com pouca evolução desde então), apenas recentemente o mesmo problema em $\mathbb{R}^3$ teve seus limites inferiores e superiores restringidas.

O limite inferior do número cromático do espaço foi definido primeiramente em 1970, por Raiskii [9], que se utilizou um grafo análogo ao *Moser spindle* para o espaço. Este grafo também é um grafo de distância unitária e um subgrafo do grafo infinito que representa o problema do número cromático do espaço. O *Raiskii spindle* possui número cromático 5, definindo um limite inferior para o número cromático do espaço, e é ilustrado pela Figura 4.

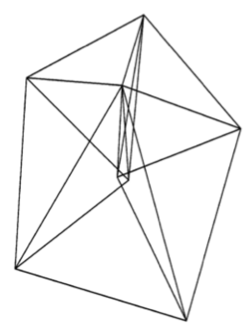

Figura 4: O *Raiskii spindle*, um subgrafo do problema do número cromático do espaço que possui número cromático 5.

Em 2002, Nechushtan [10] incrementou este limite inferior para 6, estabelecendo o que conhecemos atualmente: $6 \leq \chi(\mathbb{R}^3)$.

O limite superior é baseado na representação do espaço por um reticulado e na coloração de tal reticulado a partir de suas regiões de Voronoi. Em 1997, Coulson [11] mostrou que tal limite era 18 e em 2002 o mesmo autor [12] o restringiu para 15. Assim, temos atualmente que $6 \leq \chi(\mathbb{R}^3) \leq 15$.

2.4 O Número Cromático para $\mathbb{R}^n$

Atualmente conhecemos os seguintes limites para o número cromático em $\mathbb{R}^n$:

$(1.239... + o(1))^d \leq \chi(\mathbb{R}^n) \leq (3 + o(1))^d$.

O limite superior atual foi mostrado por Larman & Rogers em 1972 [13], e o limite inferior foi provado por Raigorodskii em 1996 em um trabalho em língua russa; apenas em 2002 este trabalho tornou-se acessível a pesquisadores do mundo todo através de uma tradução para o inglês [14].

Em 2004, Soifer [15] publicou uma extensão das idéias sobre o Axioma da Escolha da Teoria de Conjuntos para $\mathbb{R}^2$, e mostrou que o número cromático de $\mathbb{R}^n$ também é dependente do sistema de axiomas escolhidos para a Teoria de Conjuntos.

2.5 Cronologia do Estudo do Número Cromático do Plano

A Figura 5 abaixo mostra um resumo dos principais avanços no Estudo do Número Cromático do Plano (e de suas variações para outras dimensões). A seguir temos a descrição de cada evento representado na figura.

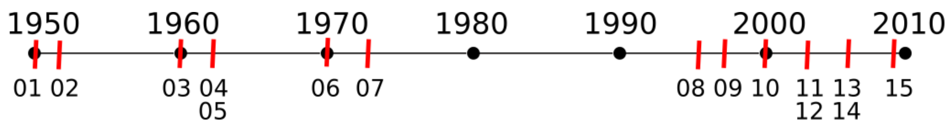

Figura 5: Cronologia dos principais avanços no Estudo do Número Cromático do Plano (e de suas variações para outras dimensões).

1. **1950**: Nelson formula o problema do número cromático do plano.
2. **1951**: Erdõs & Bruijn mostram que o número cromático do plano está relacionado com algum subgrafo finito.
3. **1960**: Gardner publica o primeiro trabalho sobre o problema.
4. **1961**: Hadwiger mostra que 7 é limite superior para $\mathbb{R}^2$.
5. **1961**: Os irmãos Moser mostram que 4 é limite inferior para $\mathbb{R}^2$.
6. **1970**: Raiskii mostra que 5 é limite inferior para $\mathbb{R}^3$.
7. **1972**: Larman & Rogers mostram um limite superior para $\mathbb{R}^n$.
8. **1996**: Raigorodskii mostra um limite inferior para $\mathbb{R}^n$ (artigo em russo).
9. **1997**: Coulson mostra que 18 é limite superior para $\mathbb{R}^3$.
10. **2000**: O artigo de Raigorodskii sobre o limite infeiror para $\mathbb{R}^n$ é finalmente traduzido para o inglês.
11. **2002**: Coulson mostra que 15 é limite superior para $\mathbb{R}^3$.
12. **2002**: Nechushtan mostra que 6 é limite inferior para $\mathbb{R}^3$.
13. **2003**: Shelah & Soifer mostram que o número cromático de $\mathbb{R}^2$ depende do sistema de axiomas escolhidos para a Teoria de Conjuntos.

14. **2004**: Soifer mostra que o número cromático de $\mathbb{R}^n$ depende do sistema de axiomas escolhidos para a Teoria de Conjuntos.

15. **2009**: O problema do número cormático do plano continua em aberto e Graham oferece U$ 1000.00 de recompensa.

3 Propostas

Mesmo a visão mais trivial do Problema de Hadwiger–Nelson não é tão simples, pois o plano possui infinitos pontos que devem ser testados para descobrirmos se existe algum par de pontos de mesma cor distanciados de uma unidade. Assim, reduzir tal problema para outros já mais conhecidos e descrever uma outra representação do problema pode viabilizar a obtenção de algum resultado mais facilmente.

3.1 Reduzindo o Problema para Círculos

Uma redução interessante poderia ser representar cada ponto como o centro de um círculo de raio unitário, e mostrar que todos os pontos pertencentes ao arco de tal círculo não possuem a mesma cor de seu centro. Podemos pensar em infinitos círculos, cada um centrado em um ponto. Tais círculos sempre terão uma intersecção de no máximo dois pontos. Este fato parece simplificar o problema, mas ao analisá-lo com maior profundidade percebemos que verificar somente dois círculos por vez não é suficiente, já que um mesmo ponto pode representar, além do centro de um círculo, a intersecção de diversos outros círculos. A Figura 6 ilustra esta visão do problema.

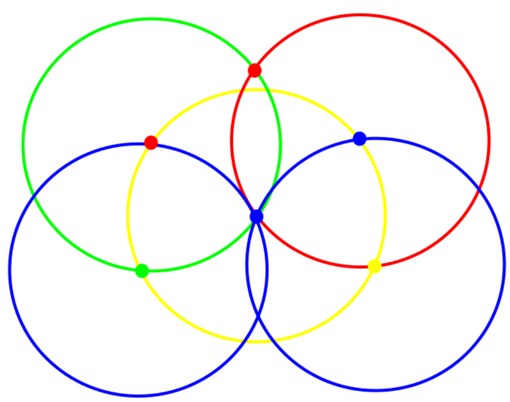

Figura 6: Analisando o problema do número cromático do plano por círculos.

3.2 Reduzindo o Problema para Grafos e Subgrafos

Alguns dos limites conhecidos atualmente para as diversas versões deste problema (incluindo o limite inferior atual para o número cromático do plano) utilizam um grafo infinito de distância unitária para representar o plano. Erdões & Brujin mostraram, em 1951, que o número cromático do plano está relacionado com algum subgrafo finito. Assim, é possível pensar que a procura em tal grafo infinito de distância unitária por subgrafos conhecidos, como o *Moser spindle*, o grafo de Petersen, o grafo de Desargues, ou o grafo de Hoffman–Singleton, por exemplo, parece uma forma satisfatória para restringirmos o limite inferior do problema. A Figura 7 mostra alguns grafos conhecidos.

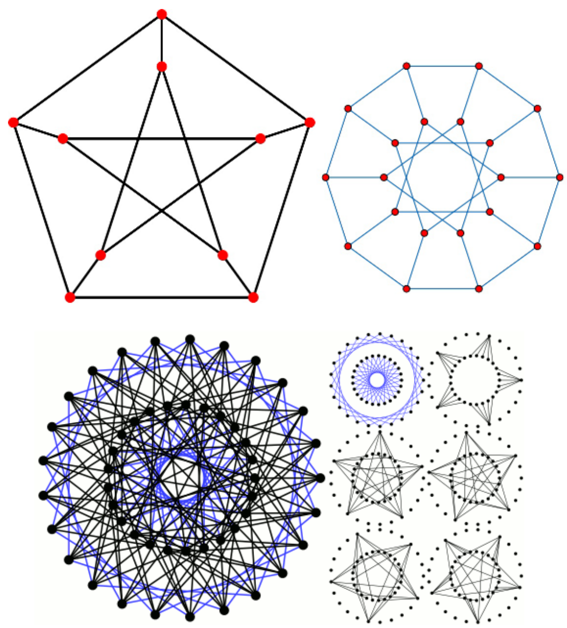

Figura 7: Grafos de Petersen e de Desargues acima, e o grafo de Hoffman–Singleton abaixo.

Além disso, o problema de coloração para grafos é amplamente estudado, e alguns resultados desta área podem ser de grande valia para o estudo do número cromático do plano. Problemas já resolvidos, como o teorema das quatro cores, podem ajudar na resolução deste problema. Sabemos, por exemplo, que é possível colorir as faces de um plano com 4 cores sem que regiões vizinhas apresentem a mesma cor (teorema das quatro cores). Assim, podemos tentar dividir o plano em regiões, de maneira que dois pontos estejam a uma unidade de distância somente se eles estiverem em duas regiões vizinhas.

É importante notar que duas regiões não são consideradas vizinhas quando possuem somente um ponto de adjacência, o que pode complicar substancialmente o problema. Assim, tentaremos achar uma divisão do plano de tal forma que duas regiões vizinhas possuam sempre um segmento de reta (ou arco) em comum – nunca somente um ponto de adjacência. Esta divisão parece bem peculiar, mas não parece simples encontrá-la. As Figuras 8, 9 e 10 mostram algumas divisões do plano, tentando respeitar todas as propriedades acima.

A Figura 8 claramente não obedece às regras estabelecidas, já que os pontos $p1$ e $p2$ podem estar distanciados de uma unidade e ainda assim não pertencerem a regiões vizinhas. Esta divisão também não possui uma distribuição suficientemente regular para ser reproduzida por todo o plano, mas fica claro que mesmo que tal regularidade existisse, não seria possível

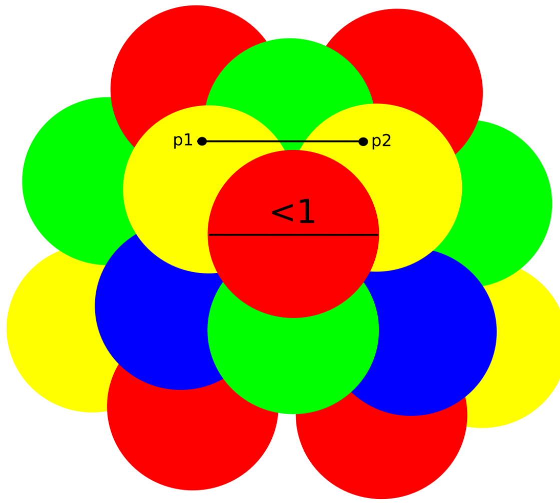

Figura 8: Um círculo e vários setores de círculos com raios igual a menos de uma unidade.

garantir que dois pontos distanciados de uma unidade sempre estariam em regiões vizinhas.

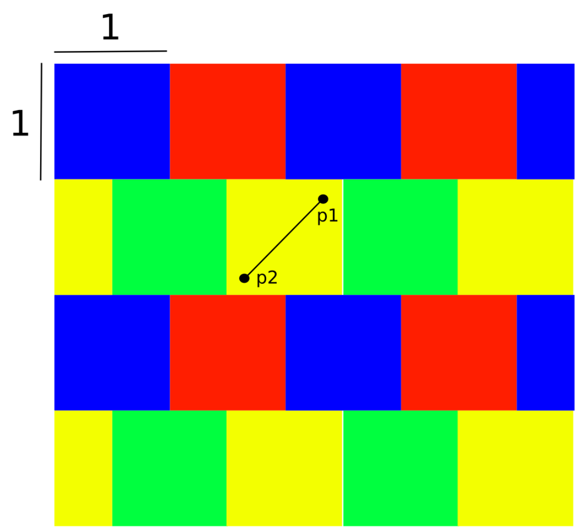

Figura 9: Uma divisão em quadrados de lados iguais a uma unidade.

A Figura 9 também não obedece a todas as regras, pois se o quadrado possui lado igual a uma unidade, os pontos $p1$ e $p2$ podem estar a uma unidade de distância e pertencerem à mesma região, pois a diagonal do quadrado terá tamanho $\sqrt{2}$ unidades.

Se mudarmos a figura para que cada quadrado possua diagonal igual a uma unidade, impedimos que dois pontos a uma unidade de distância estejam na mesma região; no entanto, podemos ter agora dois pontos $p1$ e $p2$ a uma unidade de distância que não estejam em regiões vizinhas, como mostra a Figura 10.

Assim, parece difícil achar tal divisão do plano. Mas talvez outras propostas, também baseadas no teorema das quatro cores ou em outros teoremas de coloração em grafos, possam

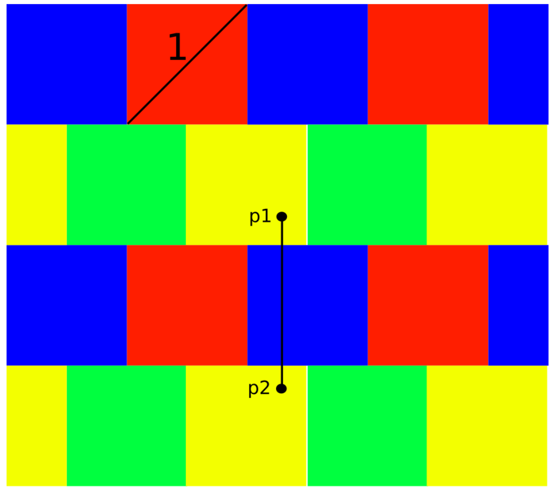

Figura 10: Uma divisão em quadrados de diagonais iguais a uma unidade.

alcançar resultados mais promissores.

4 Conclusão

O número cromático de um plano pode ser informalmente definido pela pergunta: "Quantas cores são necessárias para pintarmos o plano de tal forma que nenhum par de pontos distantes de uma unidade possuam a mesma cor?"

Este problema foi formulado por E. Nelson em 1950 e está sem resposta ainda nos dias de hoje. Sabemos somente alguns limites inferiores e superiores ($4 \leq \chi(\mathbb{E}^2) \leq 7$), mas nenhuma prova do valor exato foi encontrada. Em 2003, Shelah & Soifer [8] provaram que este valor exato pode depender da escolha do sistema de axiomas da Teoria de Conjuntos.

Este problema ainda está em aberto e é considerado por Ron Graham [16] difícil o suficiente para valer U$ 1000.00.

Referências

[1] Tommy R. Jensen and Bjarne Toft. *Graph Coloring Problems*. Wiley-Interscience Series in Discrete Mathematics and Optimization, 1995.

[2] Martin Gardner. *Mathematical Games*. Scientific American, 1960.

[3] A. M. Raigorodskii. The Nelson–Erdõs–Hadwiger problem and a space realization of a random graph. *UMN*, 61:195–196, 2006.

[4] P. Erdõs N. G. de Bruijn. A colour problem for infinite graphs and a problem in the theory of relations. *Indag. Math.*, 13(5):371–373, 1951.

[5] Joseph O'Rourke. Computational geometry column 46. *SIGACT News*, 35(3):42–45, 2004.

[6] Hugo Hadwiger. Ungelöste probleme no. 40. *Elem. Math.*, 16:103–104, 1961.

[7] L. Moser and W. Moser. Problem 10. *Canad. Math. Bull.*, 4:187–189, 1961.

[8] Saharon Shelah and Alexander Soifer. Axiom of choice and chromatic number of the plane. *J. Comb. Theory Ser. A*, 103(2):387–391, 2003.

[9] D. E. Raiskii. Realization of all distances in a decomposition of the space R^n into n+1 parts. *Mathematical Notes*, 7(3):194–196, 1970.

[10] Oren Nechushtan. On the space chromatic number. *Discrete Math.*, 256(1-2):499–507, 2002.

[11] D. Coulson. A 18-colouring of 3-space omitting distance one. *Discrete Math.*, 170:241–247, 1997.

[12] D. Coulson. A 15-colouring of 3-space omitting distance one. *Discrete Math.*, 256(1-2):83–90, 2002.

[13] D. G. Larman and C. A. Rogers. The realization of distances within sets in euclidean space. *Mathematika*, 19:1– 24, 1972.

[14] A.M. Raigorodskii. On the chromatic number of a space. *Uspekhi Mat. Nauk*, 55(2):147–148, 2000.

[15] Alexander Soifer. Axiom of choice and chromatic number of R^n. *J. Comb. Theory Ser. A*, 110(1):169–173, 2004.

[16] Ron L. Graham. Open problems in euclidean Ramsey theory. *Geocombinatorics*, XIII(4):165–177, 2004.