

Triângulos monocromáticos em 3-colorações planares

Fabio Rogério Piva
Instituto de Computação
Universidade Estadual de Campinas

Maio 2009

Resumo

O problema dos triângulos monocromáticos em 3-colorações é um dos vários problemas abertos no campo de estudo das colorações planares euclidianas. Neste trabalho realizarei um breve estudo sobre resultados recentes sobre triângulos monocromáticos em 2-colorações, na intenção de extendê-los para 3-colorações.

1 Introdução

Proposta por Frank P. Ramsey em 1930, a Teoria de Ramsey é um ramo da combinatória que estuda reconhecimento de padrões em conjuntos de estruturas aparentemente não-correlatas; mais estritamente, o quão grande deve ser um conjuntos de elementos com determinada estrutura para que possamos garantir que uma propriedade específica seja satisfeita.

Suponha, por exemplo, uma festa com seis pessoas. É possível verificar que quaisquer que sejam os convidados, sempre existirão pelo menos três pessoas que já se conheciam ou três pessoas que não se conheciam. Este resultado é conhecido como *teorema de amigos e desconhecidos* e baseia-se fortemente no *pigeonhole principle*, uma particularização do Teorema de Ramsey.

Neste trabalho abordaremos a Teoria de Ramsey Euclidiana, que estuda a aplicação da teoria de Ramsey a problemas geométricos. Em geral, tais problemas estudam “estruturas inevitáveis que permanecem quando um objeto geométrico suficientemente grande é particionado em um número finito de partes”[Graham 2004]. Um destes problemas refere-se à possibilidade de colorir-se um plano com três cores de forma que, dado um triângulo planar qualquer, não exista nenhuma seqüência de operações euclidianas sobre ele (i.e. translações, rotações e espelhamentos) que o levem a um estado monocromático (i.e., uma posição em que seus três vértices apresentem a mesma cor). Apresentarei um estudo mais específico sobre este problema na Seção 2.

Este documento está organizado da seguinte forma: Na Seção 2, apresentarei o enunciado do problema tratado, conforme proposto por Graham et al. [Graham 2004]. Na Seção 3, discutirei brevemente os principais resultados conhecidos sobre triângulos monocromáticos em 2-colorações, na intenção de utilizá-los de alguma forma como base para uma abordagem do problema em 3-colorações. Algumas idéias de abordagens são delineadas na Seção 4. Concluo com considerações finais e impressões sobre o problema, na Seção 5.

2 O problema dos triângulos monocromáticos em 3-colorações

Embora existam diversos resultados sobre triângulos monocromáticos em 2-colorações (estudaremos alguns deles na Seção 3), pouca atenção foi dedicada ao comportamento de triângulos em 3-coloração planares. Nesta seção apresentaremos brevemente o enunciado do problema a ser tratado neste documento, conforme originalmente proposto por Graham et al. [Graham 2004]. Algumas propostas de abordagem sobre o problema serão delineadas na Seção 4.

2.1 Descrição

O problema dos triângulos monocromáticos no plano 3-colorido é enunciado por Graham et al. [Graham 2004] da seguinte forma:

Conjectura 1 *“Para qualquer triângulo T , é possível produzir uma 3-coloração do plano infinito que não admita¹ cópias monocromáticas de T (uma cópia monocromática pode ser obtida através de uma sequência finita de translações e rotações dos três vértices de T , sem alterar as distâncias entre eles).”*[Graham 2004]

Embora não exista prova conhecida, conjectura-se que é possível produzir tal coloração. De fato, diversos resultados obtidos sobre triângulos monocromáticos em 2-colorações parecem indicar que a conjectura é válida. Na seção seguinte apresentaremos um breve estudo sobre alguns destes resultados, realizado no intuito de encontrar pontos de partida para a abordagem do problema em questão.

3 Resultados sobre triângulos monocromáticos em 2-colorações

Embora não existam muitos resultados sobre o comportamento de triângulos em 3-colorações, o problema equivalente em 2-colorações planares é bem estudado. Nesta seção apresentaremos alguns dos resultados em 2-colorações que me pareceram mais passíveis de expansão para 3-colorações, e que portanto poderiam contribuir para a produção de uma prova da Conjectura 1. Todos os resultados aqui apresentados giram em torno de outra conjectura, mais forte e geral:

Conjectura 2 *Toda 2-coloração χ admite todo triângulo não-equilátero T .* [Erdős et al. 1973]

Embora a questão sobre a suficiência de duas cores para colorir o plano de forma a admitir pelo menos uma cópia monocromática de qualquer triângulo permaneça aberta, existem resultados interessantes para famílias particulares de triângulos e colorações. No restante desta seção, conheceremos alguns destes resultados.

¹Dizemos que uma coloração χ *admite* um triângulo T se existe alguma cópia monocromática de T em χ . Caso contrário, dizemos que χ *evita* T .

3.1 Resultados particulares em 2-colorações quaisquer

O Lema 1 condiciona a existência de triângulos equiláteros monocromáticos em uma 2-coloração à existência de outros triângulos monocromáticos, não-equiláteros, na mesma coloração. Proposto originalmente por Erdős et al. [Erdős et al. 1973], o lema é enunciado da seguinte forma:

Lema 1 *Seja χ uma 2-coloração do plano. Então as seguintes afirmações são válidas:*

1. *Se χ admite um (a, a, a) -triângulo para algum $a > 0$, então χ admite um (a, b, c) -triângulo para todo $b, c > 0$, desde que a, b, c satisfaçam a (possivelmente degenerada) desigualdade triangular.*
2. *Se χ admite um (a, b, c) -triângulo, então χ admite um (x, x, x) -triângulo para algum $x \in \{a, b, c\}$. [Erdős et al. 1973]*

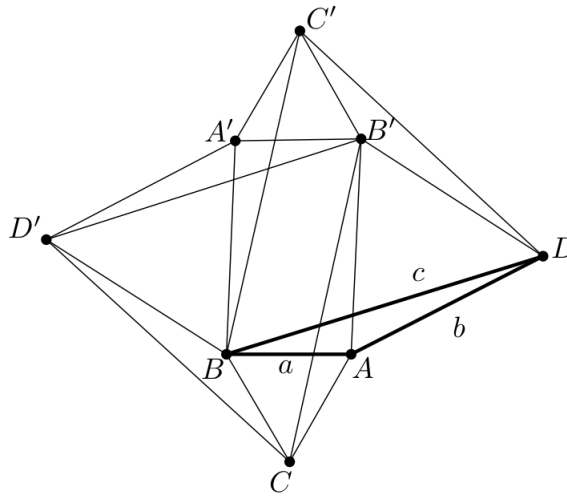


Figura 1: Prova do Lema 1.

A Figura 1 ilustra a prova do Lema 1. Analisando-se a construção do exemplo, é fácil notar que é impossível colorir com duas cores os vértices da figura de forma a admitir um triângulo equilátero monocromático (i.e., $A'D'B \equiv BC'D$, $A'B'C' \equiv ABC$ ou $B'CD' \equiv BC'D$), sem para isso admitir também um triângulo não-equilátero monocromático (i.e., $A'B'D' \equiv A'BC' \equiv B'C'D \equiv ABD \equiv AB'C \equiv BCD'$); da mesma forma, é impossível admitir que algum dos triângulos não-equiláteros da figura seja monocromático, sem para isso admitir também um triângulo equilátero monocromático.

3.2 Uma 2-coloração especial que evita triângulos equiláteros

Em vista do Lema 1 descrito na seção anterior, a intuição indica que apenas triângulos muito particulares, em 2-colorações igualmente particulares, podem ser evitados. De fato, Erdős et al. conjecturam que existe apenas um par coloração/triângulo que evita cópias monocromáticas [Erdős et al. 1973]:

Conjectura 3 *“Para todo triângulo T e toda 2-coloração χ , se χ evita T , então T é um triângulo equilátero de lados l , e χ particiona o plano em faixas semi-abertas alternantes de altura $\frac{\sqrt{3}l}{2}$ ”. [Erdős et al. 1973]*

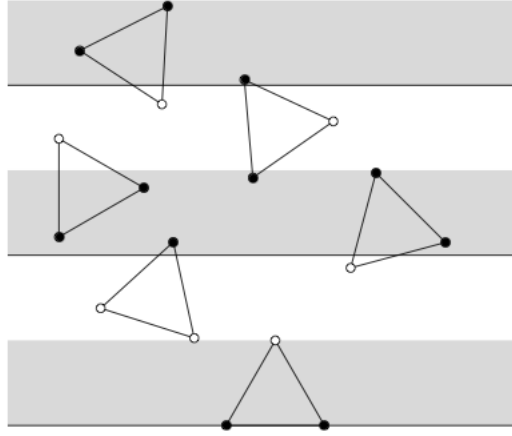


Figura 2: Único exemplo em que uma 2-coloração não admite um triângulo monocromático, segundo a Conjectura 3.

A Figura 2 ilustra uma 2-coloração que evita um triângulo equilátero de lado l , que é única, de acordo com a Conjectura 3. Embora esta coloração de fato evite o triângulo equilátero, Jelinek et al. [Jelinek et al. 2007] demonstram que existem outros exemplos de 2-colorações que evitam triângulos monocromáticos. Maiores detalhes sobre este resultado serão apresentados na Seção 3.4.

3.3 Triângulos especiais em 2-colorações quaisquer

Os resultados estudados até agora neste trabalho baseiam-se no comportamento de triângulos em colorações particulares. Se considerarmos 2-colorações quaisquer, Graham [Graham 1997] apresenta triângulos particulares que nunca podem ser evitados. Se o triângulo T em questão possui ângulos $(\alpha, 2\alpha, \pi - 3\alpha)$, com $0 < \alpha < \pi/3$, então T é admitido por qualquer 2-coloração do plano. Da mesma forma, triângulos de lados (a, b, c) que satisfaçam a igualdade $c^2 = a^2 + 2b^2$, com $a < 2b$, também são admitidos por qualquer 2-coloração.

3.4 2-colorações em zebra

Assim como Graham et al., muitos autores preferiram estudar os efeitos de propriedades especiais de triângulos particulares sobre 2-colorações genéricas, ao invés de restringir as 2-colorações sobre triângulos quaisquer. Uma exceção a esta abordagem foi conduzida por Jelínek et al. [Jelinek et al. 2007], que caracterizaram uma família de 2-colorações particulares que admite qualquer triângulo não-equilátero, mas evitam determinados triângulos equiláteros, desprovando portanto uma das conjecturas de Erdős et al.

A Figura 2 ilustra o hipotético único exemplo em que uma 2-coloração evita um triângulo monocromático, de acordo com a Conjectura 3. Em seu trabalho, os autores demonstraram que 2-colorações poligonais satisfazem a Conjectura 2, mas que existem 2-colorações poligonais particulares – denominadas *colorações em zebra* – que desprovam a Conjectura 3.

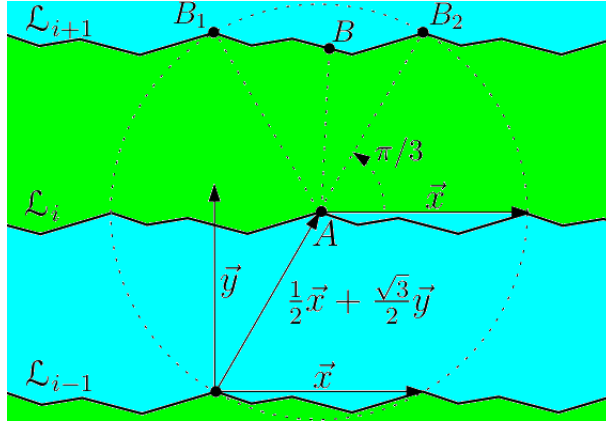


Figura 3: Fronteira da coloração em zebra.

A Figura 3 ilustra parte da coloração em zebra construída por Jelínek et al., que hipoteticamente evita o triângulo equilátero unitário. No restante desta seção delinearei as principais idéias por trás da prova que valida este exemplo.

O roteiro da prova é relativamente simples, ainda que as demonstrações dos resultados intermediários sejam bastante complexas. Inicialmente, os autores demonstram que toda 2-coloração $\chi = (\beta, \omega)$ em que uma e somente uma das partições é fechada, admite todo triângulo T . Para isso, partem do Lema 1, ilustrado pela Figura 1, que determina que é suficiente provar apenas que tais colorações admitem todo triângulo equilátero. De posse deste resultado, os autores passam a definir colorações poligonais, i.e., 2-colorações cuja fronteira é definida pela união de segmentos de curvas lineares. A seguir, prosseguem com a demonstração da Conjectura 2 para colorações poligonais. Um subproduto desta demonstração é a evidência de que toda coloração em zebra pode ser recolorida de forma a evitar o triângulo equilátero unitário (e conseqüentemente é possível escalar tais colorações de forma a evitar triângulos equiláteros não-unitários).

4 Abordando um problema aberto

Nesta seção delinearemos algumas possíveis abordagens para resolver o problema dos triângulos monocromáticos em 3-colorações, conforme enunciado na Seção 2. Iniciaremos com uma análise primária sobre as principais dificuldades apresentadas pelo problema.

4.1 Dificuldades e considerações iniciais

Em uma primeira análise sobre o problema proposto, algumas dificuldades vieram à tona. O primeiro obstáculo refere-se à constituição do próprio espaço euclidiano. Se por um lado seria possível produzir uma prova por construção, “simplesmente” mostrando uma coloração particular que evite um triângulo T genérico, é também verdade que existem infinitos pontos a serem coloridos no plano, assim como entre quaisquer dois deles. Isso implica na existência de infinitas cópias possíveis de T no plano, ao passo que nem toda combinação de três pontos quaisquer do plano constituem vértices válidos para T .

Assim, uma prova da Conjectura 1 possivelmente seguiria alguma das seguintes estruturas:

1. Identificação de alguma propriedade especial dos triângulos monocromáticos, que

permitisse a construção de um exemplo de 3-coloração que satisfizesse a conjectura para um triângulo genérico T ;

2. Produção ponto-a-ponto de uma coloração que satisfaça a conjectura, com base na análise dos pontos localizados sobre as três circunferências concêntricas centradas sobre cada ponto do plano, com raios iguais aos lados de um triângulo genérico T ;
3. Identificação de triângulos especiais que sejam evitados por alguma família suficientemente grande de 3-colorações, e procurar estender suas propriedades para 3-colorações genéricas;
4. Demonstração por indução forte, com descrição de uma passo de conquista possivelmente complexo;
5. Caracterização de uma 3-coloração planar especial, possivelmente estendendo-se alguma 2-coloração com propriedades especiais (alguns exemplos na Seção 3).

No restante desta seção aprofundaremos as idéias 4 e 5.

4.2 Prova por indução forte

A primeira idéia que me ocorreu foi tentar produzir uma demonstração por indução forte. A principal razão para essa escolha é que a hipótese de indução parece simplificar consideravelmente o problema: Dado um triângulo T , dividir o plano euclidiano com uma reta vertical e colorir os dois semi-planos resultantes de forma que não admitam uma cópia monocromática de T . Para concluir a prova, bastaria descrever uma forma de re-conectar os semi-planos sem introduzir cópias monocromáticas de T no processo.

Infelizmente, as primeiras ressalvas surgem já na própria hipótese de indução. Ao realizar a divisão, os dois espaços obtidos não são planos euclidianos, como o enunciado da conjectura requer. Ainda que sejam igualmente infinitos, estes semi-planos apresentam uma fronteira definida pela reta de separação vertical. A simples existência desta fronteira definida já seria suficiente para invalidar a demonstração, fato que só foi percebido após longa reflexão sobre esta abordagem.

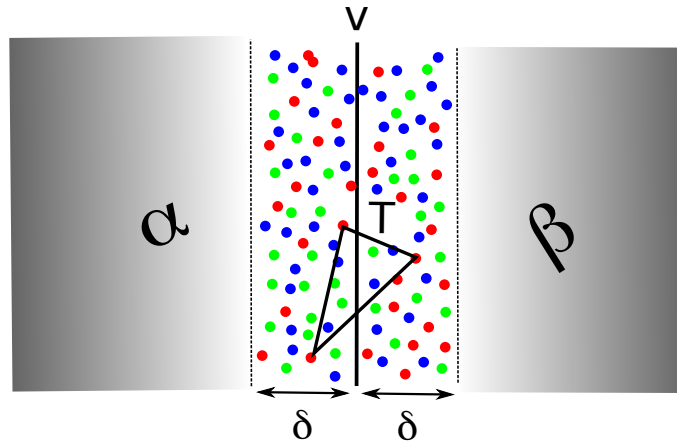


Figura 4: Passo de conquista de uma hipotética demonstração por indução do problema.

Assumamos, pelo restante desta seção e apenas em nome do espírito exploratório, que a hipótese de indução seja válida. A Figura 4 ilustra o esquema de um hipotético

passo de conquista. Por hipótese de indução, podemos garantir que se a 3-coloração sendo construída contiver alguma cópia monocromática de T , tal cópia estará contida na faixa $\mathcal{F}$ de largura 2δ , onde δ é igual ao maior lado de T (afinal, ambos os semi-planos α e β apresentam 3-colorações livres de cópias monocromáticas de T). Além disso, é correto afirmar que qualquer cópia monocromática de T contida na faixa cruzará a linha de separação v , contendo um de seus vértices em um semi-plano e dois no outro. O elemento final da prova seria demonstrar que, na eventualidade de encontrarmos uma cópia satisfazendo estas condições, podemos recolorir um dos vértices da cópia e possivelmente alguns outros pontos da faixa, sem introduzir novas cópias monocromáticas de T .

No entanto, além da falha na hipótese e das dificuldades enfrentadas no passo de conquista, uma prova por indução da conjectura dependeria da descrição de um caso base. Este elemento também não seria trivial, já que cada recorrência à hipótese cria uma nova instância do problema que, embora seja intuitivamente menor, contém um número igualmente infinito de pontos. Uma possibilidade de superar este obstáculo seria estabelecer um caso base que dependesse das dimensões do triângulo T , já que estas são bem definidas.

Assim, concluo que uma prova por indução da Conjectura 1 seria extremamente complexa, apresentando problemas particularmente difíceis em todos os aspectos da demonstração. Não obstante, talvez rendesse resultados interessantes.

4.3 Extensão de colorações em zebra

Na Seção 3.4 vimos que é possível produzir instâncias de 2-colorações que evitem qualquer triângulo equilátero. Estas 2-colorações, denominadas colorações em zebra, tem a estrutura em faixas em comum com o exemplo trivial de Erdős, ilustrado pela Figura 2.

Uma possível abordagem para resolver o problema dos triângulos monocromáticos em 3-colorações seria tentar estender as colorações em zebra para 3-colorações. Intuitivamente, se colorirmos uma de cada três faixas da coloração em zebra de Jelínek et al. com a terceira cor (Figura 5), muitas cópias que seriam monocromáticas com duas cores deixariam de sê-lo. A partir disso, talvez pudéssemos verificar que esta 3-coloração em zebra evita, de fato, os três triângulos equiláteros de lados a , b e c , respectivamente, onde (a, b, c) são os lados do triângulo T a ser evitado. De acordo com a parte 2. do Lema 1, só isso já bastaria, em uma 2-coloração, para provar que T é evitado.

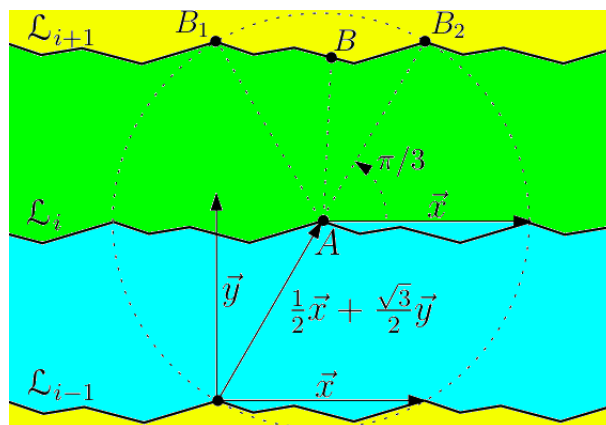


Figura 5: Extensão da coloração em zebra para 3 cores.

Dessa forma, uma extensão para 3-colorações do lema se faria também necessária. A

Figura 1 apresenta uma estrutura que demonstra o Lema 1. A demonstração baseia-se no fato de que, de posse de apenas duas cores e dadas algumas condições especiais, não é possível evitar que alguns dos triângulos presentes sejam monocromáticos. Assim, uma estrutura que comprove resultado semelhante para três cores certamente seria muito mais complexa, composta por mais triângulos e portanto mais vértices.

5 Conclusão

O problema dos triângulos monocromáticos em 3-colorações permanece aberto, e não existem resultados recentes que indiquem que este estado se alterará em breve. A maior parte das produções na área apresentam estudos sobre triângulos em 2-colorações, e diversos resultados para tais problemas têm sido publicados. No entanto, nenhum dos trabalhos estudados durante a escrita desta monografia parece imediatamente aproveitável para abordar problemas em 3-colorações planares.

Embora provenientes de demonstrações consideravelmente densas, os resultados obtidos por Jelínek et al. [Jelinek et al. 2007] sobre 2-colorações parecem candidatos interessantes para extensão para 3-colorações. O exemplo construído pelos autores – as colorações em zebra – apresentam propriedades interessantes que as permitem evitar triângulos equiláteros monocromáticos, mesmo tendo apenas duas cores disponíveis para o particionamento do plano euclidiano; o acréscimo de uma terceira cor talvez torne a construção mais robusta, ao ponto de evitar também determinados triângulos não-equiláteros. No entanto, uma primeira análise desta possível extensão mostrou-se infrutífera, o que sugere que um entendimento mais profundo das demonstrações originais sobre 2-colorações é fundamental para algum sucesso na empreitada.

Por outro lado, o problema aqui abordado é relativamente jovem, se comparado a outros problemas abertos da geometria computacional. Proposto há apenas seis anos, é seguro afirmar que ainda não foi exaustivamente estudado. Procurei me aproveitar deste fato para utilizar algum resultado conhecido sobre as muito mais estudadas 2-colorações, e embora não tenha obtido sucesso, tive a nítida impressão de que abordagens nesta direção deverão produzir resultados sobre este problema, no futuro.

Referências

- [Erdős et al. 1973] Erdős, P., Graham, R., Montgomery, P., Rothschild, B., Spencer, J., and Straus, E. (1973). Euclidean ramsey theorems iii. *Infinite and Finite Sets, Colloq. Math. Soc. J. Bolyai*, 10:559–583.
- [Graham 1997] Graham, R. L. (1997). Euclidean ramsey theory. pages 153–166.
- [Graham 2004] Graham, R. L. (2004). Open problems in euclidean ramsey theory. *Geocombinatorics*, XIII(4):165–177.
- [Jelinek et al. 2007] Jelinek, V., Kyncl, J., Stolar, R., and Valla, T. (2007). Monochromatic triangles in two-colored plane.